Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1. Wir zeigen (a) $\Rightarrow$(b) $\Rightarrow$(c) $\Rightarrow$(a):

(a)$\Rightarrow$(b) ist trivial.

(b)$\Rightarrow$(c): Finde wegen der Stetigkeit in Null $\delta > 0$, so dass aus $|y_1||y_2|\dots|y_n| < \delta$ folgt $f(y_1, y_2, \dots, y_n) < 1$. Für ein beliebigs n-tupel $x_1, x_2, \dots x_n$ setze $y_i := \frac{x_i}{|x_i|}\sqrt[n]{\delta}$ und finde

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt[n]{\delta}}{|x_i|} f(x_1, x_2, \dots x_n) < 1$$

woraus sofort die gewünschte Ungleichung folgt.

(c)$\Rightarrow$(a): Aus $f(x_1, ..., x_n) - f(p_1, ..., p_n) = \sum f(p_1, ..., p_{i-1}, x_i - p_i, x_{i+1} ..., x_n)$ und $\max\{||x_i - p_i||\} \leq \delta$ folgt nach (c) die Abschätzung

$$||f(x) - f(p)|| \leq c(f) \sum ||p_1|| \cdots ||p_{i-1}|| \delta ||x_{i+1}|| \cdots ||x_n|| \leq \delta K,$$

mit einer Konstante $K \in \mathbb{R}$, also die Stetigkeit von f.

Aufgabe 2.

a) Mit Hilfe der in der Vorlesung definierten Umkehrabbildung Φ^{-1} finden wir

$$\Phi^{-1}(x - \mathrm{i}y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}(2x, -2y, x^2 + y^1 - 1) = (x_1, -x_2, x_3)$$

Es liegt die Spiegelung an der x_1-x_3-Ebene vor, die offenbar Abstände erhält.

b) Für das Inverse der komplexen Zahl $r\cos\varphi + \mathrm{i}r\sin\varphi$ finden wir $\frac{1}{r}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$, was unter der Umkehrabbildung ergibt:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\tfrac{1}{r}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)) &= \tfrac{r^2}{1+r^2}(\tfrac{2}{r}\cos\varphi, -\tfrac{2}{r}\sin\varphi, \tfrac{1-r^2}{r^2}) \\ &= (\tfrac{2r\cos\varphi}{1+r^2}, \tfrac{-2r\sin\varphi}{1+r^2}, \tfrac{1-r^2}{1+r^2}) = (x_1, -x_2, -x_3) \end{aligned}$$

Es handelt sich um die Hintereinanderausführung der Spiegelungen an der x_1-x_2-Ebene und der x_1-x_3-Ebene, die offenbar den Abstand erhält.

c) Man stellt die Abbildung $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$ als Verkettung

$$z \mapsto -z \mapsto \frac{1}{-z} \mapsto \overline{\frac{1}{-z}}$$

dar und erhält in kartesischen Koordinaten von $\mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, -x_2, x_3) \mapsto (-x_1, x_2, -x_3) \mapsto (-x_1, -x_2, -x_3) \ ,$$

also genau die Spiegelung am Ursprung.

Aufgabe 3.

a) Da jede Möbiustransformation als Produkt einer Translation, einer Drehstreckung und einer Inversion geschrieben werden kann, reicht es aus, die Aussage für jede dieser Abbildungen zu zeigen. Die Behauptung ist klar für Translationen und Drehstreckungen.

Nun sind Geraden und Kreise in $\mathbb{C}$ gerade die Nullstellengebilde höchstens quadratischer Polynome der Form $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{C}, b\bar{b} > ac$. Setzt man hier $z = 1/w$ ein, so erhält man eine Gleichung derselben Form durch Multiplikation mit $w\overline{w}$.

b) Sei T eine solche Möbiustransformation. Ihr Inverses bildet die Zahlen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf $0, 1, \infty$ ab, ist also durch das Doppelverhältnis gegeben:

$$z \mapsto DV(z, x_1, x_2, x_3) \ = \frac{z - x_1}{z - x_3} \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3}$$

Somit ist T^{-1} von der Form

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

kann also durch eine rein reelle Matrix beschrieben werden. Das Inverse dieser Matrix beschreibt T und ist auch rein reell.

Aufgabe 4.

a) Folgt direkt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und wurde in der Vorlesung vorgeführt.

b) Wir rechnen für

$$f(x+\mathrm{i}y) = \log\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

direkt nach

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass f harmonisch ist.
Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen suchen wir für den Imaginärteil eine Funktion $g(x,y)$ mit

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

In Radialkoordinaten finden wir

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{x^2+y^2}(y\cos\varphi - x\sin\varphi) = 0$$

sowie

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\sin\varphi - x\cos\varphi) = r$$

Daher kommt als Lösung nur eine Funktion der Form $r\varphi + c$ in Betracht, die aber nicht auf ganz $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ stetig gewählt werden kann.