Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1. Die Einschränkung von $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ bzw. $\tan : \mathbb{R} \setminus \pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$ auf das Interval $[0, \pi]$ bzw. auf das Interval $(-\pi/2, \pi/2)$ sind stetig, streng monoton und surjektiv, also stetig invertierbar. Der gewählte Definitionsbereich ist maximal.

Sei φ das Argument im vorgegebenen Bereich $(-\pi, \pi]$; aus der Gleichung

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

folgt wegen $\cos(x) = \cos(-x)$ die Gleichung

$$|\varphi| = \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

Wir bestimmen das Vorzeichen aus dem Imaginärteil:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Im}(z) \geq 0 & \Rightarrow & \varphi \in [0, \pi] \\ \operatorname{Im}(z) < 0 & \Rightarrow & \varphi \in (-\pi, 0] \end{array}$$

und somit für $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ den Ausdruck

$$\varphi = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|\operatorname{Im}(z)|} \cdot \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \ .$$

Für $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ ist $\varphi = \pi/2$ für $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\varphi = -\pi/2$ für $\operatorname{Re}(z) < 0$. Hieraus folgt auch die Stetigkeit für $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. Man sieht sofort, dass das Argument für die positive reelle Halbachse $\operatorname{Re}(z) > 0$ stetig ist, aber für negative reelle Halbachse $\operatorname{Re}(z) < 0$ nicht: bei Annährung von oben geht das Argument gegen π, aber bei Annährung von unten gegen $-\pi$.

Im Falle des tangens folgt aus

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$$

sofort

$$\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \mod \pi\mathbb{Z} \ .$$

Für positiven Realteil $\operatorname{Re}(z) > 0$ liegt das Argument $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Es gilt dann $\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$.

Für $\operatorname{Re}(z) < 0$ und $\operatorname{Im} z \geq 0$ liegt das Argument in $(\frac{\pi}{2}, \pi]$. Wir haben $\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} + \pi$.

Für $\operatorname{Re}(z) < 0$ und $\operatorname{Im} z < 0$ liegt das Argument in $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$. Wir haben $\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} - \pi$.

Für $\operatorname{Re}(z) = 0$ finden wir $\varphi = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|\operatorname{Im}(z)|}\pi/2$.

Aufgabe 2. Sei $f : S^1 \to \mathbb{R}$ bijektiv, dann ist das Bild $f(S^1 \setminus \{p\})$ der zusammenhängenden Menge $S^1 \setminus \{p\}$ die nicht zusammenhängende Menge $\mathbb{R} \setminus \{f(p)\} = (-\infty, f(p)) \amalg (f(p), \infty)$, also kann f nicht stetig sein.

Aufgabe 3.

Sei $x \in X \setminus K$. Wegen der Dreiecksungleichung sind für jedes $k \in K$ die offenen Kugeln X_k, K_k vom Radius $\operatorname{dist}(x,k)/2$ um x, k disjunkt. Betrachte die Überdeckung $\cup_{k \in K} K_k \supset K$ von K durch offene Kugeln. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset K$, so dass $K \subset \bigcup_{k \in J} X_k$, also $\bigcap_{k \in J} X_k$ offene Umgebung von x disjunkt zu K ist. Also ist $X \setminus K$ offen und somit K abgeschlossen. Außerdem ist K selbst in einer endlichen Vereinigung von Kugeln und damit in einer Kugel von endlichem Radius enthalten, also ist K beschränkt.

Die Umkehrung gilt nicht, denn die diskrete Metrik definiert durch $\operatorname{dist}(x, y) = 1$ für alle $x \neq y$ auf einer unendlichen Menge liefert mit der so genannten diskreten Topologie ein Gegenbeispiel: in dieser Topologie sind alle Mengen abgeschlossen, aber nur endliche Mengen kompakt.

Aufgabe 4.

a) $f(z) = z^n$ ist komplex differenzierbar. Der Beweis beruht analog zum reellen Fall auf dem binomischen Lehrsatz:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z^k h^{n-k-1} \to \binom{n}{n-1} z^{n-1}$$

für $h \to 0$.

b) Wir finden wie oben:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \overline{z}^k \overline{h}^{n-k}/h$$

Für rein reelle h ist der limes für $h \to 0$ gleich $n\overline{z}^{n-1}$, für rein imaginäres h dagegen gleich $-n\overline{z}^{n-1}$. Daher ist die Funktion für $z \neq 0$ nicht komplex differenzierbar. Sie ist für $n > 1$ in $z = 0$ komplex differenzierbar mit Ableitung 0, für $n = 1$ in $z = 0$ aber nicht komplex differenzierbar. Allerdings ist sie für alle n nirgendwo holomorph.

c) $f(z) = e^{|z|}(\cos(\operatorname{Re} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$ ergibt die beiden Funktionen

$$u(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \cos x \quad v(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \sin y$$

Mit Ableitungen

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \cos x - \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \sin x \\ \frac{\partial v}{\partial y} & = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \sin y + \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \cos x \end{array}$$

beziehungsweise

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial y} & = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \cos x \\ \frac{\partial v}{\partial x} & = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \sin y \end{array}$$

Die Funktion ist reelldifferenzierbar für $z \neq 0$. Die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ der Gleichungen

$$y \cos x = -x \sin y \quad \text{und} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos x - \sin x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin y + \cos x$$

enthält z.B. die abzählbar unendlichen Mengen $\pi\mathbb{N}$ und $-\arctan 2 - \pi\mathbb{N}$, denn für $y = 0$ reduziert sich das Gleichungssystem auf $(1 - \frac{x}{|x|}) \cos x = -\sin x$, also $\sin x = 0$ für $x > 0$ und $2 = -\tan x$ für $x < 0$. Mithin ist die Funktion komplex differenzierbar in L, aber nicht holomorph in einer Umgebung von L.

Die eigentlich beabsichtigte Funktion

$$f(z) = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + \mathrm{i} \sin(\operatorname{Im} z))$$

ist überall differenzierbar, da nach Blatt 0 auf ganz $\mathbb{C}$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.