Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Argumentsfunktion $\arg : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi, \pi]$.

a) Beschreiben Sie Beziehungen zwischen arg und den Funktionen arccos bzw. arctan.

b) Bestimmen Sie die Teilmenge $S \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, auf der arg stetig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(1+2 Punkte)

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Bijektion $f : S^1 \to \mathbb{R}$. (Hinweis: Betrachten Sie die Einschränkung von f auf $S^1 \setminus \{p\}$.)

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Ist $K \subset X$ kompakt, so ist K abgeschlossen (d.h. jeder Punkt des Komplements $X \setminus K$ ist ein innerer Punkt von $X \setminus K$) und beschränkt. Gilt auch die Umkehrung?

(2+2+1 Punkte)

Aufgabe 4. Überprüfen Sie die folgenden Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf komplexe Differenzierbarkeit:

a) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

b) $f(z) = \overline{z}^n$, $n \in \mathbb{N}$

c) $f(z) = e^{|z|}(\cos(\operatorname{Re} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$

(3 Punkte)

Abgabe: Am Montag, 9.11.2009 in der Vorlesung. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe (Montag/Donnerstag) erkennbar auf die Abgabe.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt ist möglich, aber nicht empfohlen. In diesem Fall muss pro Studierenden in erkennbarer Handschrift jeweils eine volle A4-Seite geschrieben worden sein und mit dem Namen des Studierenden gekennzeichnet sein.