Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 2 - Lösungshinweise

Aufgabe 1.

Wir untersuchen allgemein den Ring $\mathbb{R}[X]/(X^2 - r)$. Für $r = 0$ ist in diesem Ring die Restklasse $\bar{X}$ von X ein Nullteiler. Der Ring kann also kein Körper sein, insbesondere nicht isomorph zu $\mathbb{C}$.

Im Falle $r > 0$ finde eine Wurzel ρ von r und schreibe

$$X^2 - r = (X - \rho)(X + \rho)$$

Die Restklassen der Polynome $X \pm \rho$ bilden ein Paar von Nullteilern:

$$(X + \rho)(X - \rho) = X^2 - r = 0 \ .$$

Der Ring kann also nicht isomorph zu $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Algebra sein. Nach dem chinesischen Restsatz gilt in diesem Fall explizit:

$$\mathbb{R}[X]/X^2 - r \cong \mathbb{R}[X]/(X + \rho) \oplus \mathbb{R}[X]/(X - \rho) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \ .$$

Im Falle $r < 0$ finde $\rho \in \mathbb{R}$ mit $(\mathrm{i}\rho)^2 = r$. Der Einsetzehomomorphismus

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{C} \\ X & \mapsto & \mathrm{i}r \end{array}$$

hat als Kern das von $X^2 - r$ erzeugte Hauptideal. Da er surjektiv ist, folgt

$$\mathbb{R}[X]/(X^2 - r) \cong \mathbb{C} \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2.

Man rechnet nach, dass $\mathcal{H}$ abgeschlossen unter Multiplikation und Addition, also ein Unterring von $M(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist. Damit genügt es zu prüfen, ob jedes $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ invertierbar bezüglich der Multiplikation ist:

$$\begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \frac{1}{|w|^2 + |z|^2} \begin{pmatrix} \overline{z} & w \\ -\overline{w} & z \end{pmatrix} = 1.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3.

a) erhält man durch elementares Nachrechnen: $\frac{a-\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}} = \frac{b-\mathrm{i}}{b+\mathrm{i}}$ dann und nur dann, wenn $(a-\mathrm{i})(b+\mathrm{i}) = (a+\mathrm{i})(b-\mathrm{i}) \iff a = b$.

b) Mit $z = x + \mathrm{i}y$ ist das Normquadrat des Zählers gleich $x^2 + (y-1)^2$, das des Nenners $x^2 + (y+1)^2$. Wegen $y > 0$ ist $|1-y| \leq |1+y|$, also hat das Bild Norm strikt kleiner als 1.

Man sieht leicht, dass die Inverse Abbildung gegeben ist durch

$$w \mapsto z = \frac{\mathrm{i}w + \mathrm{i}}{-w + 1}$$

mit $|w| < 1$. Mit $w = w_1 + \mathrm{i}w_2$ findet man für den Imaginärteil von z

$$\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{i}w + \mathrm{i})\mathrm{Im}\,(1-w) + \mathrm{Im}\,(\mathrm{i}w + \mathrm{i})\mathrm{Re}\,(1-w) = 1 - w_1^2 - w_2^2$$

was zeigt, dass z in der oberen Halbebene liegt.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4.

a) Aus der Monotonie der Wurzelfunktion folgt

$$\max(|x|, |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2}\max(|x|, |y|)$$

und somit die Äquivalenz der Normen ν_2 und ν_3. Die Ungleichungen

$$\frac{1}{2}\nu_1(x, y) \leq \nu_2(x, y) \leq \nu_1(x, y)$$

sind elementar.

b) Sei $e_1, ..., e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, $v_i = \langle e^i, v\rangle$ die Komponenten von $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede Norm $||\cdot||$:

$$||v|| \leq |v_1| \cdot ||e_1|| + ... + |v_n| \cdot ||e_n|| \leq \nu_2(v)C$$

mit $C = \sum ||e_i||$ und $\nu_2(v) = \max(v_i)$ der Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$. Also ist die Norm $||\cdot||$ stetig bezüglich der von der Maximumsnorm induzierten Topologie und muss daher auf dem Kompaktum $K := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$, der Sphäre bezüglich der Maximumsnorm, sein Minimum c annehmen – mit Wert $c > 0$ wegen $0 \notin K$. Damit folgt $c\nu_2(v) \leq ||v|| \leq C\nu_2(v)$, also die Äquivalenz der Normen.

c) Sei wieder ν_2 die Maximumsnorm und ν_3 durch die Wurzel aus den Quadratsummen gegeben. Offenbar gilt auch jetzt

$$\nu_2(a) \leq \nu_3(a)\ ,$$

so dass jede Nullfolge bezüglich ν_3 auch Nullfolge bezüglich ν_2 ist.

Um die Inäquivalenz der Topologien zu zeigen, geben wir eine Folge von Folgen an, die Nullfolge bezüglich ν_2 ist, nicht aber bezüglich der Norm ν_3. Wir starten mit der quadratsummierbaren Folge

$$a_n^{(0)} = \frac{1}{n+1}$$

mit $\nu_2(a) = 1$. Wir wollen nun daraus induktiv eine Folge von Folgen konstruieren, die alle die gleiche ν_3-Norm haben. Dazu ersetzen wir $a_1^{(0)} = 1$ durch $a_1^{(1)} = \frac{1}{2}$ und vergrern die nächsten sechs Terme gemä

$$(a_n^{(1)})^2 = (a_n^{(0)})^2 + \frac{1}{8}$$

für $n = 2, 3, \dots 7$, um die ν_3-Norm zu erhalten. Sie fährt man fort, indem man die ersten Terme immer kleiner macht und die Differenz auf immer mehr weitere Terme verteilt.

(1+2+2 Punkte)