Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1. Eine unitale $\mathbb{R}$-Algebra ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V, zusammen mit einer $\mathbb{R}$-bilinearen Abbildung

$$m : V \times V \to V \ ,$$

die assoziativ ist und ein neutrales Element $1 \in V$ besitzt. Man beachte, dass $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ insbesondere eine zwei-dimensionale $\mathbb{R}$-Algebra ist.

Betrachten Sie im Polynomring $\mathbb{R}[X]$ den Restklassenring nach den von den folgenden Polynomen erzeugten Idealen. Ist dieser als $\mathbb{R}$-Algebra isomorph zu $\mathbb{C}$? Begründen Sie Ihre Antwort und beschreiben Sie die $\mathbb{R}$-Algebra durch Angabe einer Basis und der Multiplikation in dieser Basis.

a) $X^2 + 1$
b) $X^2 - 1$
c) $X^2 - \sqrt{2}$
d) $X^2 + \sqrt{2}$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to M(2 \times 2, \mathbb{C}) \\ (z, w) &\mapsto \begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und bezeichnen ihr Bild mit $\mathcal{H}$. Man zeige, dass $\mathcal{H}$ ein Schiefkörper ist, d.h. in $\mathcal{H}$ gelten alle Axiome eines Körpers mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.
Bemerkung: Man nennt $\mathcal{H}$ den Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die komplexe obere Halbebene. Betrachten Sie die Cayley-Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \tfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: f ist injektiv.

b) Bestimmen Sie das Bild von f.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4.

a) Man betrachte auf $\mathbb{R}^2$ die folgenden Normen

$$\begin{aligned} \nu_1(x,y) &= |x| + |y| \\ \nu_2(x,y) &= \max(|x|,|y|) \\ \nu_3(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

und zeige durch Angabe expliziter positiver Konstanten, dass diese Normen äquivalent sind.

b) Zeigen Sie unter Ausnützung der Kompaktheit der Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, dass alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

c) Geben Sie auf dem Vektorraum

$$l^1(\mathbb{R}) := \{(a_n) \mid a_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty\}$$

der absolut summierbaren reellwertigen Folgen zwei *inäquivalente* Normen an und begründen Sie, warum die Normen inäquivalent sind.

(2+2 Punkte)

Abgabe: Am Montag, 2.11.2009 in der Vorlesung.

Hinweis: Abgabe in Gruppen von maximal drei Studierenden pro Blatt ist möglich, aber nicht empfohlen. In diesem Fall muss pro Studierenden in erkennbarer Handschrift jeweils eine volle A4-Seite geschrieben worden sein und mit dem Namen des Studierenden gekennzeichnet sein.