Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1.

1. Es ist
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cdot \cos x - 1$$
und daher
$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} \ .$$
Wir finden für das Integral
$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{a + \cos^2 x} &= \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{a + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(a+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\cos x} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2a+1) + \cos x} \end{aligned}$$
Wir können nun Beispiel 4.5.2 anwenden und finden
$$\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{(2a+1)^2 - 1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + a}}$$

2. Der Integrand f ist eine gerade rationale Funktion mit Polstellenmenge $Z := \{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\pi k/3} : k \in \{0, ..., 5\}\}$. Alle Pole sind einfach und nicht reell. Sie sind die Eckpunkte eines regulären Sechsecks, bei dem ein Seitenpaar senkrecht auf der reellen Achse steht. Es liegt eine rationale Funktion vor, bei der der Grad des Nennerpolynoms um zwei größer als der des Zählerpolynoms ist. Nach Satz 4.5.4 der Vorlesung ist die Funktion absolut integrierbar und somit auch integrierbar. Nach dem gleichen Satz folgt
$$\int_0^\infty \tfrac{x^4}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \tfrac{x^4}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i} \sum_{\zeta \in Z : \operatorname{Im}\zeta > 0} \operatorname{res}_{z=\zeta} \tfrac{z^4}{z^6+1}$$
Wir berechnen das Residuum bei der Polstelle ζ mit der Regel von L'Hospital zu
$$\lim_{z\to\zeta} \frac{z^4(z-\zeta)}{z^6+1} = \lim_{z\to\zeta} \frac{z^3(z-\zeta) + z^4}{6z^5} = \frac{1}{6\zeta}$$

Relevant sind die drei Polstellen in der oberen Halbebene

$$z_1 = \mathrm{i} \quad z_{2,3} = \mathrm{i}e^{\pm 2\pi \mathrm{i}/6}$$

Wir finden daher für das Integral

$$\int_0^\infty \tfrac{x^4}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}(1 + 2\cos\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6}(1 + 2\cdot\frac{1}{2}) = \tfrac{\pi}{3}.$$

3. Wir überlegen uns: die Funktion $f(z)$ habe einen Pol der Ordnung m an der Stelle z_0,

$$f(z) \ = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \dots \ .$$

Dann ist die Funktion

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots$$

holomorph in z_0 und es gilt

$$\mathrm{res}_{z=z_0}(f) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}|_{z=z_0}\left((z - z_0)^m f(z)\right)$$

Hier ist der Integrand eine gerade Funktion mit Polen $\pm \mathrm{i}a$ der Ordnung n, also folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \tfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} &= \pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}_{z=a}\ \tfrac{1}{(z^2+a^2)^n} = \tfrac{\pi\mathrm{i}}{(n-1)!}\tfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\Big|_a \tfrac{1}{(z+\mathrm{i}a)^n} \\
&= \tfrac{\mathrm{i}\pi}{(n-1)!}(-n)\cdots(-n-n+1)\tfrac{1}{(2\mathrm{i}a)^{n-1}} = \tfrac{\mathrm{i}\pi}{(n-1)!}\tfrac{(2n-2)!}{(n-1)!}\tfrac{1}{(2\mathrm{i}a)^{n-1}} \\
&= \tfrac{\pi}{(2a)^{2n-1}}\tfrac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.
\end{aligned}$$

4. Sei $\gamma_R^\pm$ der positiv orientierte Rand des Rechtecks mit Eckenmenge $\{-R, R, R \pm \mathrm{i}R, -R \pm \mathrm{i}R\}$ und $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion, die keine Pole auf der reellen Achse hat und und für die $\mathrm{grad} q \geq \mathrm{grad} p + 2$ gilt. Aus der Vorlesung wissen wir, dass es dann Konstanten $c > 0$ und $M > 0$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq c$ gilt

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}\ .$$

Für reelle x finden wir somit auch die Abschätzung des Betrags der beiden Integranden

$$|f(z)e^{\pm \mathrm{i}x}| \leq \frac{M}{|z|^2}$$

deren Summe wir untersuchen wollen. Sei R so groß gewählt, dass das Rechteck alle Pole von f in der oberen bzw. in der unteren komplexen Halbebene umfasst.

Wir behaupten, dass dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{\pm \mathrm{i}x}\mathrm{d}x = \pm \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^\pm} f(z)e^{\pm \mathrm{i}z}\mathrm{d}z = \pm 2\pi \mathrm{i} \sum_{\pm \mathrm{Re}\, w>0} \mathrm{res}_w f(z)e^{\pm \mathrm{i}z}\,.$$

Dazu schätzen wir zunächst das Integral über den rechten Rand ab:

$$\begin{array}{rcl} |\int_0^R f(R+\mathrm{i}t)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}t)}\mathrm{d}t| & \leq & \int_0^R |f(R+\mathrm{i}t)|\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ & \leq & \frac{M}{R^2}\int_0^R \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{M}{R^2}(1-\mathrm{e}^{-R}) \leq \frac{M}{R^2}\ , \end{array}$$

was für $R\to\infty$ gegen Null geht. Das Integral über die linke Kante wird ähnlich abgeschätzt und verschwindet ebenfalls im Limes $R\to\infty$.

Schließlich schätzen wir noch das Integral über die obere Kante ab:

$$\begin{array}{rcl} |\int_{-R}^R f(\mathrm{i}R+t)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}R+t)}\mathrm{d}t| & \leq & \int_{-R}^R \frac{M}{R^2+t^2}\mathrm{e}^{-R}\mathrm{d}t \\ & \leq & \frac{2MR\mathrm{e}^{-R}}{R^2} = \frac{2M\mathrm{e}^{-R}}{R}\ , \end{array}$$

was ebenfalls für große R gegen Null geht. Für negatives Vorzeichen im Exponenten des Integrands gehen die Argumente analog durch für das Rechteck in der unteren komplexen Halbebene. Damit ist unsere Behauptung gezeigt.

Wir wenden dies nun auf die Funktion $f(x) := (a^2+x^2)^{-2}$ an, die Pole in $\pm ia$ hat, die beide von der Ordnung zwei sind. Wir berechnen die Residuen:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{res}_{\pm \mathrm{i}a} f(z)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}z} & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big|_{\pm \mathrm{i}a}(z\pm \mathrm{i}a)^{-2}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}z} \\ & = & \left(\frac{\pm \mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}z}}{(z\pm \mathrm{i}a)^2} - \frac{2\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}z}}{(z\pm \mathrm{i}a)^3}\right)\Big|_{\pm \mathrm{i}a} \\ & = & \mathrm{e}^{-a}\left(\frac{\pm \mathrm{i}}{(\pm 2\mathrm{i}a)^2} - \frac{2}{(\pm 2\mathrm{i}a)^3}\right) = \mp \mathrm{i}\mathrm{e}^{-a}(\frac{1}{4a^3}+\frac{1}{4a^2}) \end{array}$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\mathrm{i}x})\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-a}}{8}\pi(a^{-2}+a^{-3}).$$

Aufgabe 2.

1. Für jedes a_i lässt sich f auf einem Kreisring um a_i schreiben als

   $$f(z) = (z-a_i)^m u_i(z)$$

   mit $m = \mathrm{ord}(f;a_i)$ und $u_i(z)$ holomorph, $u_i(a_i)\neq 0$. Somit ist auf diesem Kreisring

   $$\begin{array}{rcl} g(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)} & = & g(z)\frac{m(z-a_i)^{m-1}u_i(z)+(z-a_i)^m u_i'(z)}{(z-a_i)^m u_i(z)} \\ & = & g(z)\frac{m u_i(z)+(z-a_i)u_i'(z)}{(z-a_i)u_i(z)} \end{array}$$

Ist $g(a_i) \neq 0$, so ist daher a_i ein Pol erster Ordnung dieser Funktion und es gilt

$$\text{res } g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = mg(a_i) \ .$$

Ist $g(a_i) = 0$, so ist a_i eine hebbare Singularität dieser Funktion und das Residuum ist für $z = a_i$ gleich Null. Es gilt also ebenfalls

$$\text{res } g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = mg(a_i) = \text{ord}(f; a_i)g(a_i) \ .$$

Aus dem Residuensatz folgt nun die Behauptung.

Aufgabe 3.

1. Sei

$$h_s(z) := g(z) + s(f(z) - g(z))$$

mit $|s| \leq 1$. Für $z \in \partial D_r(a)$ gilt

$$|h_s(z)| \geq |g(z)| - |s| \cdot |f(z) - g(z)| > |g(z)| - |s||g(z)| \geq 0$$

so dass $h_s(r)$ keine Nullstellen auf $\partial D_r(a)$ hat. Da f und g holomorph sind, ist auch h_s holomorph. Die Funktion h_s hat daher auch für kein s mit $|s| \leq 1$ eine Polstellen in $\partial U_r(a)$.

Betrachte den Weg $\gamma : t \mapsto a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt für die Anzahl N_s der Nullstellen von h_s, jeweils mit ihrer Vielfachheit gezählt:

$$N_s := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{h_s'(z)}{h_s(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g'(z) + s(f'(z) - g'(z))}{g(z) + s(f(z) - g(z))}\mathrm{d}z \ .$$

Das Integral ist stetig in s. Da N_s ganzzahlig ist, ist N_s konstant. Somit ist

$$N_f = N_1 = N_0 = N_g$$

und die Funktionen f und g haben in $U_r(a)$ die gleiche Anzahl von Nullstellen.

2. Es gilt für $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| = |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(z)} \leq \mathrm{e}^1 < 3$$

und

$$g(z) = |-3z| = 3 \ ,$$

so dass die Voraussetzungen aus Teilaufgabe 1 erfüllt sind. Somit haben f und g in der offenen Kreisscheibe $U_1(0)$ die gleiche Anzahl von Nullstellen. Die Funktion $g(z)$ hat nur eine einfache Nullstelle für $z = 0$, also kann $f(z)$ ebenfalls nur eine Nullstelle haben. Nun ist aber

$$f(\frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{1/2} - \frac{3}{2} > 0 \quad \text{und} \quad f(1) = \mathrm{e}^1 - 3 < 0 \ .$$

Nach dem Zwischenwertsatz, angewandt auf das Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$, folgt die Behauptung.

Aufgabe 4.

1. Aus
$$z = \pm\frac{1}{2} + \rho \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$
schließen wir
$$z^2 = \frac{1}{4} \pm \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} + \mathrm{i}\rho^2 \, .$$
Der Kosekans hat im Innern des Parallelogramms nur den Pol $z = 0$ mit Residuum $1/\pi$. Wir finden daher
$$K = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\pi} = 2\mathrm{i} \ .$$
Andererseits folgt durch explizite Rechnung, weil die beiden vertikalen Seiten im Grenzfall $R \to \infty$ nicht beitragen,
$$\begin{aligned} K &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\pi/4}\mathrm{d}\rho \exp(\mathrm{i}\pi \left(\mathrm{i}\rho^2 + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} + \frac{1}{4}\right) \csc\pi(\rho\mathrm{e}^{\imath\pi/4} + \frac{1}{2}) \\ &\quad - \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\pi/4}\mathrm{d}\rho \exp(\mathrm{i}\pi \left(\mathrm{i}\rho^2 - \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} + \frac{1}{4}\right) \csc\pi(\rho\mathrm{e}^{\imath\pi/4} - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$
Beim Zusammenfassen der Integranden benutzen wir die Identität
$$\begin{aligned} &\exp(\mathrm{i}\pi\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}) \csc\pi(\rho\mathrm{e}^{\imath\pi/4} + \tfrac{1}{2}) - \exp(-\mathrm{i}\pi\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}) \csc\pi(\rho\mathrm{e}^{\imath\pi/4} - \tfrac{1}{2}) \\ &= 2\tfrac{\exp(\mathrm{i}\pi\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}) + \exp(-\mathrm{i}\pi\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})}{\exp(\mathrm{i}\pi\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}) + \exp(-\mathrm{i}\pi\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})} = 2 \end{aligned}$$
wobei wir $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/2} = \pm\mathrm{i}$ ausgenutzt haben und den Kosekans durch Exponentialfunktionen ausgedrückt haben. Daher ist
$$K = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\rho \mathrm{e}^{-\pi\rho^2} = \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-x^2}$$
wobei wir im letzten Schritt $x = \sqrt{\pi}\rho$ substituiert haben.

2. Zwei Kanten des Parallelogramms sind parallel zur reellen Achse im Abstand $\pm\mathrm{Im}\, aR$. Die anderen Kanten schneiden die reelle Achse in den Punkten $-\epsilon$ und $n - \epsilon$. Die Polstellen innerhalb des Parallelogramm sind also genau die ganzen Zahlen $\{0, ..., n-1\}$ und alle einfache Pole. Also ist nach dem Residuensatz das Integral I gerade die Summe der Terme
$$\begin{aligned} 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to k} \tfrac{(\exp(2\pi\mathrm{i}z^2/n)\cdot(z-k)}{\exp(2\pi\mathrm{i}z)-1} &= 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to k} \tfrac{(4\pi\mathrm{i}z/n)\exp(2\pi\mathrm{i}z^2/n)\cdot(z-k) + \exp(2\pi\mathrm{i}z^2/n)}{2\pi\mathrm{i}\exp(2\pi\mathrm{i}z)} \\ &= \exp(2\pi\mathrm{i}k^2/n) \end{aligned}$$

für $k = 1, 2, \ldots n-1$. Diese Summe ist aber gerade die linke Seite der Gaußformel.

Zu I als explizites Integral über γ_R tragen im Limes $R \to \infty$ nur die nicht-horizontalen Seiten bei, d.h. die beiden Teilwege

$$t \mapsto at - \varepsilon \text{ und } t \mapsto -at - \varepsilon + n, \quad t \in [-R, R]$$

wobei hier zur positiven Orientierung von γ_R die Wurzel von a so gewählt werden muss, dass $\operatorname{Re} a < 0$, also

$$a = -\sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{1+\mathrm{i}}{2} = -\sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{1}{1-\mathrm{i}}.$$

Nach Umorientierung des rechten Weges erhalten wir mit Hilfe der binomischen Formeln:

$$\begin{aligned}
I &= a \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(2\pi\mathrm{i}(at-\varepsilon)^2/n) - \exp(2\pi\mathrm{i}(at-\varepsilon+n)^2/n)}{\exp(2\pi\mathrm{i}(at-\varepsilon)) - 1} \mathrm{d}t \\
&= a \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(2\pi\mathrm{i}(at-\varepsilon)^2/n)(1 - \exp(4\pi\mathrm{i}(at-\varepsilon)))}{\exp(2\pi\mathrm{i}(at-\varepsilon)) - 1} \mathrm{d}t \\
&= -a \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi\mathrm{i}(at-\varepsilon)^2/n)(1 + \exp(2\pi\mathrm{i}(at-\varepsilon)) - 1) \mathrm{d}t \\
&= -a \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi\mathrm{i}(at-\varepsilon)^2/n) + \exp(2\pi\mathrm{i}(at-\varepsilon+n/2)^2/n) \cdot \exp(-n\pi\mathrm{i}/2) \mathrm{d}t \\
&= -a(1 + \exp(-n\pi\mathrm{i}/2)) \int_{\mathbb{R}} \exp(-(t-\varepsilon/a)^2) \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Invarianz des Integrals unter Translationen des Integranden benutzt haben. Beachten wir, dass der zweite Faktor gleich $1 + \exp(-n\pi\mathrm{i}/2) = 1 + \exp(-\pi\mathrm{i}/2)^n = 1 + (-\mathrm{i})^n$ und der dritte Faktor gemäß des ersten Teils gleich $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ ist, so ergibt sich das Integral zu

$$I = \sqrt{n} \frac{1 + (-\mathrm{i})^n}{1 - \mathrm{i}} \ .$$