Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Existenz der folgenden bestimmten Integrale und berechnen Sie diese mit Hilfe des Residuensatzes:

1. $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{a+\cos^2 x}$ für $a > 0$.
2. $\int_0^\infty \frac{x^4}{x^6+1}\ \mathrm{d}x$.
3. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.
4. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$ für $a > 0$.

(1+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 2.
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ meromorph mit paarweise verschiedenen Null- bzw. Polstellen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in U$. Weiter sei die Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und γ ein Weg in $U \setminus \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} g(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^n j(\gamma; a_i)\mathrm{ord}(f, a_i) g(a_i)\ .$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3.

1. Zeigen Sie den Satz von Rouché:
   Die Funktionen $f, g : U \to \mathbb{C}$ seien auf dem Gebiet U holomorph. Es seien $a \in U$ und $r > 0$ so gewählt, dass $\overline{D_r(a)} \subset U$. Weiter sei vorausgesetzt, dass die strikte Ungleichung
   $$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$
   für alle $z \in \partial D_r(a)$ gilt. Zeigen Sie, dass dann die Anzahlen der Nullstellen von f und g in $D_r(a)$ übereinstimmen.
   Hinweis: Betrachten Sie für $|s| \leq 1$ die Funktion $h_s(z) := g(z)+s(f(z)-g(z))$.

2. Beweisen Sie, dass die Funktion
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \mathrm{e}^z - 3z \end{array}$$
genau eine Nullstelle in der offenen Kreisscheibe $D_1(0)$ hat. Zeigen Sie weiter, dass diese Nullstelle reell ist und im offenen Intervall $(\frac{1}{2}, 1)$ liegt. Hinweis: verwenden Sie Teil 1 mit $g(z) = -3z$.

(3+1 Punkte)

Aufgabe 4.

1. Zeigen Sie die Formel für das Gaußintegral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$
indem Sie das Integral
$$K := \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z^2} \csc(\pi z)\ \mathrm{d}z$$
in zweierlei Weise über ein Parallelogramm integrieren, dessen vertikale Seiten auf den Geraden
$$\{\pm\tfrac{1}{2} + \rho \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} :\ \rho \in \mathbb{R}\}$$
liegen und dessen andere Seiten auf den Geraden $\mathrm{Re}\,(z) = \pm R$ liegen. Betrachten Sie den Grenzwert $R \to \infty$.

   Hinweis: Zeigen Sie erst, dass der cosecans
$$\csc(x) \;=\; \frac{1}{\sin(x)}$$
Pole der Ordnung 1 an den Stellen $x = n\pi$ mit Residuum eins hat.

2. Zeigen Sie folgende Formel für die sogenannte Gaußsche Summe für $n \in \mathbb{N}$:
$$G_n := \sum_{k=0}^{n-1} \exp \frac{2\pi \mathrm{i} k^2}{n} = \frac{1+(-\mathrm{i})^n}{1+(-\mathrm{i})}\sqrt{n}\ .$$
Berechnen Sie dazu das Wegintegral
$$I := \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\exp(2\pi \mathrm{i} z^2/n)}{\exp(2\pi \mathrm{i} z) - 1}\ \mathrm{d}z$$
längs des positiv orientierten Randes γ_R des Parallelogramms mit Eckenmenge $\{-\varepsilon + aR, -\varepsilon - aR, n - \varepsilon - aR, n - \varepsilon + aR\}$ und $a^2 := -\frac{n}{2\pi\mathrm{i}}$, $0 < \varepsilon < 1$ auf zwei Weisen: zum Einen direkt unter Verwendung des Resultats von Teilaufgabe 1 und zum Anderen mit Hilfe des Residuensatzes.

(3+3 Punkte)

Abgabe: Am Montag, 25.1.2010 in der Vorlesung. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe erkennbar auf die Abgabe.