Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

# Aufgabenblatt 11

**Aufgabe 1.**

1. Da $\varphi$ biholomorph ist, existiert eine holomorphe Funktion $\varphi^{-1}$, für die auch $\varphi^{-1}(0) = 0$. Wir können daher den ersten Teil des Lemmas von Schwarz 3.4.5 auf die beiden Funktionen $\varphi$ und $\varphi^{-1}$ anwenden und finden für alle $z \in D_1(0)$

$$|z| = |\varphi^{-1}(\varphi(z))| \leq |\varphi(z)| \leq |z|$$

und finden $|\varphi(z)| = |z|$ für alle $z \in D_1(0)$. Wir können also auch den zweiten Teil des Schwarzschen Lemmas anwenden und schließen, dass es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ vom Betrag Eins gibt, so dass

$$\varphi(z) = \zeta \cdot z$$

für alle $z$ mit $|z| < 1$ gilt. Die biholomorphen Selbstabbildungen von $D_1(0)$, die den Ursprung 0 festlassen, sind also gerade die Drehungen um den Ursprung.

2. Die Abbildung ist die Einschränkung einer Möbiustransformation $T$ auf die offene Kreisscheibe $D_1(0)$, also insbesondere eine Bijektion auf ihr Bild. $T$ bildet den Einheitskreis $S^1$ in sich ab, denn wegen

$$\begin{array}{rcccl} |1 \pm \overline{a}|^2 &=& (1 \pm \operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2 &=& |1 \pm a|^2 \\ |\mathrm{i} + \overline{a}|^2 &=& (\operatorname{Re} a)^2 + (1 - \operatorname{Im} a)^2 &=& |-\mathrm{i} + a|^2 \end{array}$$

folgt

$$\begin{array}{rclrclcl} \varphi_a(1) &=& \frac{1-a}{\overline{a}-1} & |\varphi_a(1)| &=& \frac{|1-a|}{|1-\overline{a}|} &=& 1 \\ \varphi_a(-1) &=& \frac{-1-a}{-\overline{a}-1} & |\varphi_a(-1)| &=& \frac{|1+a|}{|1+\overline{a}|} &=& 1 \\ \varphi_a(\mathrm{i}) &=& \frac{\mathrm{i}-a}{\mathrm{i}\overline{a}-1} & |\varphi_a(\mathrm{i})| &=& \frac{|\mathrm{i}-a|}{|\overline{a}+\mathrm{i}|} &=& 1 \end{array}$$

Das Innere der Kreisscheibe $TD_1(0)$ ist gerade die Zusammenhangskomponente von $a = T(0)$ in $\mathbb{C} \setminus S^1$. Wegen $|a| < 1$ ist $\varphi_a$ in der Tat eine Selbstabbildung von $D_1(0)$ und damit wohldefiniert.

Weiter ist die Abbildung $\varphi_a$ holomorph als Möbiustransformation. Die inverse Möbiustransformation ist gegeben durch die inverse Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ \overline{a} & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|a|^2 - 1} \begin{pmatrix} -1 & a \\ -\overline{a} & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Bemerkung 1.5.3.7 liefern Matrizen, deren Einträge sich um ein Vielfaches einer nicht-verschwindenden komplexen Zahl unterscheiden, die gleich Möbiustransformation. Indem man einen Faktor $-\frac{1}{|a|^2-1}$ herauszieht, findet man $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.

3. Aus $\varphi_a(a) = 0$ folgt $\varphi_{\varphi(0)} \circ \varphi(0) = 0$. Wir können daher das Ergebnis der ersten Teilaufgabe auf die Abbildung $\varphi_{\varphi(0)} \circ \varphi$ anwenden und schließen, dass es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ vom Betrag 1 gibt mit $\varphi_{\varphi(0)} \circ \varphi(z) = \zeta z$. Also ist

$$\varphi(z) = \varphi_{\varphi(0)}(\zeta z) = \zeta \varphi_{\varphi(0)/\zeta}(z) \ .$$

**Aufgabe 2.**

1. Es ist $f(z) = \frac{z^2+\mathrm{i}z+2}{z+\mathrm{i}}$ für $z \neq \mathrm{i}$. Da das Nennerpolynom nur noch eine weitere Nullstelle für $z = -\mathrm{i}$ besitzt, ist $f$ auf einer punktierten Umgebung von $z = \mathrm{i}$ holomorph und somit beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist die Singularität in $a = \mathrm{i}$ hebbar.

2. Die Nennerfunktion $\exp(z) - 1$ ist periodisch mit $2\pi$. Alle ihre Nullstellen haben daher gleich Polstellenordnung. Für $z = 0$ zeigt die definierende Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$\exp(z) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \ ,$$

so dass eine Nullstelle erster Ordnung vorliegt. Das Zählerpolynom hat eine Nullstelle erster Ordnung nur für $k = 0$. Nach Aufgabe 3 ist somit

$$\omega(\exp(z) - 1; 0) = 1 - 1 = 0$$

und die Singularität in $a = 0$ ist hebbar. Für $k \neq 0$ finden wir

$$\omega(\exp(z) - 1; 2\pi \mathrm{i} k) = 0 - 1 = -1 \ ,$$

so dass ein Pol der Ordnung 1 vorliegt.

3. Wir betrachten die Funktion für reelle $r \neq 0$. Für $r \to 0^+$ geht $exp(-\frac{1}{r}) \to 0$ und somit $\lim_{r \to 0^+} f(r) = 1$. Also kann kein Pol vorliegen. Für $r \to 0^-$ geht $exp(-\frac{1}{r}) \to +\infty$ und somit $\lim_{r \to 0^-} |f(r)| = \infty$. Die Singularität kann also nicht hebbar sein. Folglich muss eine wesentliche Singularität vorliegen. Dies kann man auch durch explizite Reihenentwicklung sehen.

**Aufgabe 3.**
Die Funktion $g_n(z) := z^n f(z)$ ist genau dann beschränkt auf einer punktierten Umgebung von $z = 0$, wenn $g^2$ dort beschränkt ist. Geht $|f| \to \infty$ für

$z \to 0$, so auch $|f^2| \to \infty$. $f$ hat also nach Satz 4.2.6. einen Pol der Ordnung $n \geq 1$ / eine hebbare Singularität genau dann, wenn $f^2$ einen Pol der Ordnung $2n \geq 2$ / eine hebbare Singularität hat.

Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß ist das Bild jeder punktierten Umgebung von 0 unter $f$ bzw. von $f^2$ dicht in $\mathbb{C}$, wenn $f$ bzw. $f^2$ eine wesentliche Singularität in 0 hat.

Aus den Eigenschaften der Funktion $w \mapsto w^2$ folgt aber, dass das Bild unter $f^2$ genau dann dicht ist, wenn das Bild unter $f$ dicht ist. Da im Falle von Polen oder hebbaren Singularitäten das Bild nicht dicht ist, folgt die Behauptung.

**Aufgabe 4.**

1. Wir schreiben
$$f = \sum_{n=\omega(f;a)}^{\infty} a_n (z-a)^n$$
mit $a_{\omega(f;a)} \neq 0$. Damit folgen unmittelbar die Behauptungen.

2. (a) Liegt eine hebbare Singularität vor, so hat die eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung von $f$ eine Taylorentwicklung, die mit der Laurentreihe übereinstimmt.
   (b) Ein Pol der Ordnung $k$ liegt vor, wenn $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ gilt mit einer holomorphen Funktion $g$ mit $g(a) \neq 0$. Den Zähler kann man in eine Taylorreihe entwickeln und findet wegen $g(0) \neq 0$ $a_{-k} \neq 0$.
   (c) Folgt durch Ausschluss der ersten beiden Fälle.

**Aufgabe 5.** Die Laurententwicklungen erhält man aus der Partialbruchzerlegung
$$f(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{z+2}$$
durch Entwicklung der Summanden mit Hilfe der geometrischen Reihe:

1. Beide Pole liegen außerhalb der offenen Einheitskreisscheibe, also ist $f|_{D_1(0)\setminus\{0\}}$ holomorph:
$$f(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-z} - \frac{1}{6}\frac{1}{1-(-z/2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{6 \cdot 2^n}\right) z^n.$$
Der Hauptteil verschwindet also.

2. Nur der Pol $z = 1$ liegt im Inneren des Kreisrings, also
$$f(z) = \frac{1}{3z}\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{6}\frac{1}{1-(-z/2)} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6 \cdot 2^n} z^n.$$

3. Beide Pole $z = 1, z = -2$ liegen im Inneren des Kreisrings, also

$$f(z) = \frac{1}{3z} \frac{1}{1 - 1/z} + \frac{1}{6z} \frac{1}{1 - (-1/2z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{(-2)^n}{6} \right) z^{-n}.$$

Der Nebenteil verschwindet.