Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

1. Ist $\varphi : D_1(0) \to D_1(0)$ eine biholomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe mit $\varphi(0) = 0$, so gibt es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$, so dass $\varphi(z) = \zeta z$ für alle $z \in D_1(0)$ gilt.
2. Für alle $a \in D_1(0)$ ist die Abbildung
$$\begin{aligned} \varphi_a : D_1(0) &\to D_1(0) \\ z &\mapsto \tfrac{z-a}{\bar{a}z-1} \end{aligned}$$
wohldefiniert, holomorph und bijektiv mit Umkehrabbildung $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.
3. Ist $\varphi : D_1(0) \to D_1(0)$ biholomorph, so gibt es ein $a \in D_1(0)$ und ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$, so dass $\varphi(z) = \zeta\varphi_a(z)$ für alle $z \in D_1(0)$ gilt.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die Art der Singularität der Funktion f im angegebenen Punkt a.

1. $f(z) = \frac{z^3+3z-2\mathrm{i}}{z^2+1}$ an der Stelle $a = \mathrm{i}$.
2. $f(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z-1}$ an den Stellen $a = 2\pi\mathrm{i}k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
3. $f(z) = \exp\big(\exp(-\frac{1}{z})\big)$ an der Stelle $a = 0$.

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 3.
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge mit $0 \in U$. Sei $f : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.
Zeigen Sie:
f hat in 0 genau dann eine hebbare Singularität / einen Pol / eine wesentliche Singularität, wenn f^2 in 0 eine hebbare Singularität / einen Pol / eine wesentliche Singularität hat.

(3 Punkte)

Aufgabe 4.

1. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und die holomorphen Funktionen $f, g, : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ sollen in a keine wesentliche Singularität haben.

   Zeigen Sie, dass dann auch die Funktionen $f+g$, $f \cdot g$ und, falls g in einer Umgebung von a keine Nullstelle hat, $\frac{f}{g}$ in a keine wesentliche Singularität haben und dass gilt

$$\begin{array}{rcl} \omega(f+g;a) & \geq & \min\left(\omega(f;a), \omega(g;a)\right) \\ \omega(f \cdot g;a) & = & \omega(f;a) + \omega(g;a) \\ \omega(\frac{f}{g};a) & = & \omega(f;a) - \omega(g;a) \end{array}$$

2. Es sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f : D_r(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{für} \quad z \in D_r(a) \setminus \{a\} \; .$$

   Beweisen Sie: f hat in a genau dann

   (a) eine hebbare Singularität, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$ gilt.

   (b) einen Pol der Ordnung k, wenn $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$.

   (c) eine wesentliche Singularität, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele negative Werte von n.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Laurentreihenentwicklung der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} \setminus \{1, -2\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{(z+2)(z-1)} \end{array}$$

für die folgenden Kreisringe um $a = 0$:

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z|\}$

(1+1+1 Punkte)

Abgabe: Am Montag, 18.1.2010 in der Vorlesung. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe erkennbar auf die Abgabe.