Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1.

1. Die Funktion $f(\zeta) := (\zeta - 1)^{-3}$ ist auf einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_1(-1)}$ holomorph. Also folgt

$$\int_{|z+1|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)(z-1)^3} = \int_{|z+1|=1} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z+1)} = 2\pi\mathrm{i} f(-1) = -\frac{\pi\mathrm{i}}{4}.$$

2.
$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sin(-i) = 2\pi\mathrm{i}\sinh(-1).$$

3. Die Funktion $f(\zeta) := (z - \mathrm{i}\pi)^{-1}$ ist auf einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_3(-2\mathrm{i})}$ holomorph. Da $-\mathrm{i}\pi \in D_3(-2\mathrm{i})$ folgt

$$\int_{|z+2\mathrm{i}|=3} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+\pi^2} = \int_{|z+2\mathrm{i}|=3} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z+\mathrm{i}\pi} = 2\pi\mathrm{i} f(-\mathrm{i}\pi) = -1.$$

Aufgabe 2.

1. Wenn f auf der abgeschlossenen Kreisscheibe keine Nullstelle hat, so ist g holomorph. Aus der Cauchyschen Ungleichung für $n = 0$ folgt

$$|g(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |g(z)|$$

und daher

$$\frac{1}{|f(z_0)|} \leq \max_{|z-z_0|=r} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\min_{|z-z_0|=r} |f(z)|}$$

und somit

$$|f(z_0)| \geq \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. $f(U)$ ist als Bild der zusammenhängenden Menge U unter der holomorphen Funktion f, die insbesondere stetig ist, zusammenhängend. Es bleibt zu zeigen, dass das Bild offen ist.

   Sei also $w_0 \in f(U)$ und wähle ein $z_0 \in U$ mit $f(z_0) = w_0$. Die Funktion $f(z) - w_0$ hat in z_0 eine Nullstelle, die isoliert ist. Deshalb finden wir eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_r(z_0)}$ auf der f den Wert w_0 nur in z_0 annimmt.

   Auf dem Rand der Kreisscheibe ist dann $|f(z) - w_0|$ strikt positiv, $|f(z) - w_0| \geq d > 0$ für alle z mit $|z - z_0| = r$. Wählen wir w so, dass $|w - w_0| < d/3$ gilt, so gilt für diese z daher

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq d - d/3 = \frac{2}{3}d$$

   Andererseits ist

$$|f(z_0) - w| = |w - w_0| \leq d/3$$

   Wir können also für jedes w mit $|w - w_0| < d/3$ die Aussage aus Teil 1 dieser Aufgabe auf die Funktion $z \mapsto f(z) - w$ anwenden und finden eine Nullstelle, also einen Wert $z' \in D_r(z_0)$, so dass $f(z') = w$ gilt.

Aufgabe 3.

1. Offenbar bilden dann die Vektoren (w_1, w_2) eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$. Das Bild von $\mathbb{C}$ unter f ist gleich dem Bild des kompakten Parallelogramms

$$\{z \in \mathbb{C} | z = t_1 w_1 + t_2 w_2 \quad \text{mit} \quad t_1, t_2 \in [0, 1]\}$$

   in $\mathbb{C}$. Daher ist die ganze Funktion f auf $\mathbb{C}$ beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant.

2. Auch die Funktion $z \mapsto \exp(f(z))$ ist eine ganze Funktion, für die gilt:

$$|g(z)| = |\exp(f(z))| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, f(z)} \; .$$

   Daher ist g beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant. Für die Ableitung finden wir

$$0 = g'(z) = f'(z) \exp(f(z)) \; .$$

   Da die auch die komplexe Exponentialfunktion nie den Wert Null annimmt, folgt $f'(z) = 0$. Da U ein Gebiet ist, ist f konstant.

Aufgabe 4.

1. Angenommen, es existiert ein Wert $w \in \mathbb{C}$ und eine Schranke $d > 0$, so dass
$$|f(z) - w| > d > 0$$
für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Dann ist
$$\frac{1}{|f(z) - w|} < \frac{1}{d}$$
und damit $z \mapsto 1/(f(z) - w)$ eine beschränkte ganze Funktion, die nach dem Satz von Liouville konstant ist. Damit ist aber auch f konstant, im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Das Bild $g(V)$ ist wegen Aufgabe 2.2 ein Gebiet. Wegen des Prinzips der Isoliertheit der Nullstellen lässt sich eine Folge $z_n \in V$ finden, deren Funktionswerte paarweise verschieden sind und die einen Häufungspunkt besitzt. Betrachte die Folge $w_n := g(z_n) \in U$, die ebenfalls einen Häufungspunkt besitzt. Es gilt aber $f(w_n) = f(g(w_n)) = 0$, so dass f und die konstante Funktion 0 auf einer Eindeutigkeitsmenge übereinstimmen. Daher ist $f = 0$.