Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1.
Berechnen Sie mit Hilfe der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale. Hierbei meinen wir mit $|z-a| = r$ den geschlossenen Weg $\gamma(t) = a + r\exp(\mathrm{i}t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$.

1. $\int_{|z+1|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)(z-1)^3}$
2. $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\mathrm{d}z$
3. $\int_{|z+2\mathrm{i}|=3} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+\pi^2}$

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 2.

1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{D_r(z_0)}$ in U enthalten. Falls
$$|f(z_0)| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$
gilt, hat f in $D_r(z_0)$ eine Nullstelle.
Hinweis:
Betrachten Sie die Funktion $g(z) := 1/f(z)$.
2. Es sei f eine nicht konstante holomorphe Funktion auf einem Gebiet U. Zeigen Sie, dass dann auch die Bildmenge $f(U)$ wieder ein Gebiet ist.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 3.

1. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Es gelte

$$f(z + w_1) = f(z + w_2) = f(z) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\ .$$

   Zeigen Sie, dass f dann konstant ist. Es gibt also keine interessanten doppelt periodischen Funktionen auf $\mathbb{C}$.

2. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und der Realteil von f sei nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass f dann konstant ist.

   Hinweis:
   Betrachten Sie die Verkettung $z \mapsto \exp(f(z))$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 4.

1. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und nicht konstant. Zeigen Sie, dass zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $|f(z) - w| < \epsilon$. (Dies bedeutet, dass das Bild einer ganzen Funktion f dicht in $\mathbb{C}$ liegt.)

2. Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : U \to \mathbb{C}$ und $g : V \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $g(V) \subset U$. Zeigen Sie: ist g nicht konstant und $f \circ g(z) = 0$ für alle $z \in V$, so ist $f = 0$.

(2+2 Punkte)

Abgabe: Am Montag, 11.1.2010 in der Vorlesung. Bitte schreiben Sie Ihre Übungsgruppe erkennbar auf die Abgabe.