Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 1 - Präsenzübungen

Aufgabe 1. Die Tatsache, dass bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe vorliegt, folgt aus den Vektorraumaxiomen. Die Kommutativität der Multiplikation ist offensichtlich, ebenso, dass $(1,0)$ ein neutrales Element für die Multiplikation ist. Nur das Assoziativ- und Distributivgesetz erfordern eine Rechnung. Abschließend rechnet man nach, dass

$$(a,b)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a,-b)$$

ein multiplikatives Inverses ist.

Aufgabe 2.

a) Folgt unmittelbar durch Nachrechnen.

b) Folgt unmittelbar durch Nachrechnen.

c) Für $z = x + \mathrm{i}y$ folgt aus

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

dank der Monotonie der Wurzel

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

mit Gleichheit genau für $y = \operatorname{im} z = 0$, also reelles z. Die andere Ungleichung folgt analog mit Gleichheit für rein imaginäres z.

d) Durch Konjugieren findet man

$$\overline{a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n} = 0\ .$$

Da die Konjugation ein Körperautomorphismus ist, folgt sofort

$$a_0 + a_1 \overline{z}_0 + \ldots + a_n \overline{z}_0^n = 0\,.$$

Komplexe Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten kommen also immer in komplex konjuguierten Paaren.

Aufgabe 3.

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
wz &= |w||z|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)\\
&= |w||z|(\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi + \mathrm{i}\sin\psi\cos\psi + \mathrm{i}\cos\psi\sin\phi)\\
&= |w||z|\left(\cos(\psi+\phi) + \mathrm{i}(\sin(\phi+\psi)\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.

Es liegt eine unter der Addition abgeschlossene Teilmenge des reell vierdimensionalen Vektorraums $M(2\times 2, \mathbb{R})$ der 2×2-Matrizen vor. Damit ist klar, dass bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe vorliegt.

Wegen

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & xy' + yx' \\ -yx' - xy' & -yy' + xx' \end{pmatrix}$$

ist die vorgegebene Menge auch unter der Multiplikation abgeschlossen. Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ und distributiv, ihr neutrales Element, die Einheitsmatrix, liegt mit $x = 1, y = 0$ in der Menge. Aus der expliziten Formel folgt auch, dass die Multiplikation kommutativ ist. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = x^2 + y^2$$

ist jedes von Null verschiedene Element der Menge auch invertierbar und liegt wegen

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

auch wieder in der Menge.

Aufgabe 5.

1. Wir finden

   $$\tilde{f}(x,y) = (x,y)$$

   und

   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} &= 1 = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}\\
   \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} &= 0 = -\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}
   \end{aligned}$$

2. Wir finden

   $$\tilde{f}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

   und

   $$\begin{aligned}
   \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} &= 2x = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}\\
   \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} &= 2y = -\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}
   \end{aligned}$$

3. Wir finden

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_1(x,y) &= \textstyle\sum_{kgerade} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k (-1)^{k/2} \\
\tilde{f}_2(x,y) &= \textstyle\sum_{kungerade} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k (-1)^{(k-1)/2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} &= \textstyle\sum_{kgerade} (n-k) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k-1} y^k (-1)^{k/2} \\
\tfrac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y} &= \textstyle\sum_{kungerade} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^{k-1} (-1)^{(k-1)/2} \\
&= \tfrac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}
\end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y} \ .$$

4. Wir finden

$$\tilde{f}(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^x \sin y)$$

und

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x} &= \mathrm{e}^x \cos y &= \tfrac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y} \\
\tfrac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} &= \mathrm{e}^x \sin y &= -\tfrac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}
\end{aligned}$$