Prof. C. Schweigert
Dr. Michael Carl
Department Mathematik
Universität Hamburg

Funktionentheorie
Wintersemester 2009/10

Aufgabenblatt 1 - Präsenzübungen

Aufgabe 1. Rechnen Sie nach, dass der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$ zusammen mit der üblichen Addition und der Multiplikation

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

ein Körper ist.

Aufgabe 2.

a) Rechnen Sie nach, dass die komplexe Konjugation einen Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ definiert.

b) Zeigen Sie durch Nachrechnen:

$$\overline{\overline{z}} = z \quad z\overline{z} = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} z = \tfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} z = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(z + \overline{z})\,.$$

c) Zeigen Sie die beiden Ungleichungen

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{und} \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|\ .$$

und beschreiben Sie alle komplexen Zahlen, für die jeweils die Gleichheit gilt.

d) Seien $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ und sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n = 0\ .$$

Zeigen Sie, dass dann auch gilt:

$$a_0 + a_1 \overline{z}_0 + \ldots + a_n \overline{z}_0^n = 0.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie für $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\phi := \arg(z), \psi := \arg(w)$ unter Verwendung der Additionstheoreme für Sinus- und Kosinusfunktion:

$$\begin{aligned} wz &= |w||z|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) \\ &= |w||z|\left(\cos(\psi + \phi) + \mathrm{i}(\sin(\phi + \psi)\right)) \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Bilden die reellen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

einen Körper? Geben Sie eine geometrische Interpretation und vergleichen Sie die erhaltene algebraische Struktur mit $\mathbb{C}$.