Übungen zur Mengenlehre
WiSe 2015/16

4. Übungsblatt

(Abgabe: 11.12.2015)

Achtung: Wenn nicht anders angegeben dürfen Sie auf diesem Übungsblatt weiterhin nur die Axiome von **ZF**, also insbesondere *nicht* das Auswahlaxiom benutzen.

Aufgabe 1 (AC und Vergleichbarkeit von Kardinalitäten) – 4P.

Zeigen Sie, dass die folgende Aussage äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Für je zwei Mengen X und Y gibt es immer eine Injektion $f : X \to Y$ oder eine Injektion $g : Y \to X$.

[**Hinweis:** Für eine Richtung können Sie das Lemma von Hartogs benutzen.]

Aufgabe 2 (Lemma von Zorn) – 4P.

1. Zeigen Sie, dass aus dem Lemma von Zorn folgt, dass jede Halbordnung zu einer totalen Ordnung erweitert werden kann.
2. Zeigen Sie (ohne **AC** zu benutzen!), dass das Lemma von Zorn für abzählbare halbgeordnete Mengen gilt.

Aufgabe 3 (Auswahlaxiom und Wohlordnung) – 4P.

Zeigen Sie, dass aus der Annahme, dass die Potenzmenge jeder wohlgeordneten Menge wohlgeordnet werden kann, bereits das Auswahlaxiom folgt.
[**Hinweis:** Zeigen Sie induktiv, dass dann jedes V_α wohlgeordnet werden kann. Dies ist weniger offensichtlich, als es zunächst erscheint; achten Sie besonders auf den Limes-Schritt.]

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Schwächere Auswahlprinzipien) – 4P.

Das Prinzip der abhängigen Auswahl (Dependent Choices, kurz **DC**) sagt folgendes aus: Für jede nicht-leere Menge X und jede Relation $R \subseteq X \times X$, sodass es für jedes $x \in X$ ein $y \in X$ mit $x \; R \; y$ gibt, gibt es eine Funktion $f : \omega \to X$ sodass für alle $n \in \omega$ bereits $f(n) \; R \; f(n+1)$ gilt.

Das Prinzip der abzählbaren Auswahl (Countable Choices, kurz **CC**) sagt folgendes aus: Für jede Funktion $F : \omega \to \mathbf{V}$, sodass $F(n) \neq \emptyset$ für alle $n \in \omega$ gilt, gibt es eine Funktion $f : \omega \to \bigcup F[\omega]$, sodass $f(n) \in F(n)$ für alle $n \in \omega$ gilt.

Wir nennen eine Menge X *endlich*, wenn es ein $n \in \omega$ und eine Bijektion $s : n \to X$ gibt. Ansonsten nennen wir sie *unendlich*.

1. Zeigen Sie, dass **DC** aus dem Auswahlaxiom folgt.
2. Zeigen Sie, dass **CC** aus **DC** folgt.
3. Zeigen Sie: Aus **CC** folgt, dass jede unendliche Menge eine abzählbare Teilmenge hat.

Aufgabe 5* (Bonusaufgabe) – 4 Bonus-P.

Es sei ω_1 die Menge aller abzählbaren Ordinalzahlen.
Gibt es eine injektive Funktion $f : (\omega_1 \setminus \omega) \to \omega_1$, sodass für alle $\omega < \alpha < \omega_1$ gilt, dass $f(\alpha) < \alpha$?