Multiple Teilersummenfunktionen

Henrik Bachmann

Seminar arithmetische Geometrie und Zahlentheorie

17 April 2013

Inhalt

Multiple Zeta-Werte

$$28\zeta(9,3) + 150\zeta(7,5) + 168\zeta(5,7) = \frac{5197}{691}\zeta(12)$$

$$\zeta(4) = 2\zeta(2,2) - 2\zeta(3,1)$$

$$\zeta(s_1, \dots, s_l) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}}$$

$$\zeta(3) = \zeta(2,1)$$

$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$$

Motivische MZV

$\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, \dots, n_r)$

$\big\downarrow \mathit{per}$

Multiple Zeta-Werte

$28\zeta(9,3) + 150\zeta(7,5) + 168\zeta(5,7) = \frac{5197}{691}\zeta(12)$

$\zeta(4) = 2\zeta(2,2) - 2\zeta(3,1)$

$$\zeta(s_1, \dots, s_l) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot n_l^{s_l}}$$

$\zeta(3) = \zeta(2,1)$

$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$

(quasi-) Modulformen

$$G_k = \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n$$
$$= \zeta(k) + [k]_k$$
$$\Delta(\tau) = \sum_{n>0} \tau(n) q^n$$

Motivische MZV

$\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1, \ldots, n_r)$

$\xrightarrow{per}$

Multiple Zeta-Werte

$28\zeta(9,3) + 150\zeta(7,5) + 168\zeta(5,7) = \frac{5197}{691}\zeta(12)$

$\zeta(4) = 2\zeta(2,2) - 2\zeta(3,1)$

$$\zeta(s_1, ..., s_l) := \sum_{n_1 > n_2 > ... > n_l > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot ... \cdot n_l^{s_l}}$$

$\zeta(3) = \zeta(2,1)$

$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$

(quasi-) Modulformen

$$G_k = \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n>0}\sigma_{k-1}(n)q^n$$
$$= \zeta(k) + [k]_k$$
$$\Delta(\tau) = \sum_{n>0}\tau(n)q^n$$

Multiple Eisensteinreihen

$$G_{4,4} = \underline{\zeta(4,4)} + 20\underline{\zeta(6)}\underline{[2]_2} + 3\underline{\zeta(4)}\underline{[4]_4} + \underline{[4,4]_8}$$

Const.

Motivische MZV

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1,\dots,n_r)$$

per

Multiple Zeta-Werte

$$28\zeta(9,3) + 150\zeta(7,5) + 168\zeta(5,7) = \frac{5197}{691}\zeta(12)$$

$$\zeta(4) = 2\zeta(2,2) - 2\zeta(3,1)$$

$$\zeta(s_1,\dots,s_l) := \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l>0}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdot\ldots\cdot n_l^{s_l}}$$

$$\zeta(3) = \zeta(2,1)$$

$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$$

(quasi-) Modulformen

$$G_k = \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n>0}\sigma_{k-1}(n)q^n$$
$$= \zeta(k) + [k]_k$$
$$\Delta(\tau) = \sum_{n>0}\tau(n)q^n$$

Multiple Teilersummenfunktionen

$$\sigma_{r_1,\dots,r_l}(n) = \sum_{\substack{u_1v_1+\dots+u_lv_l=n \\ u_1>\dots>u_l>0}} v_1^{r_1}\dots v_l^{r_l}$$
$$[s_1,\dots,s_l] := \frac{1}{(s_1-1)!\dots(s_l-1)!}\sum_{n>0}\sigma_{s_1-1,\dots,s_l-1}(n)q^n$$
$$[4]_4 = 2[2,2]_4 - 2[3,1]_4 + [3]_4 - \frac{1}{3}[2]_4$$

Multiple Eisensteinreihen

$$G_{4,4} = \underline{\zeta(4,4)} + 20\underline{\zeta(6)}\underline{[2]_2} + 3\underline{\zeta(4)}\underline{[4]_4} + \underline{[4,4]_8}$$

Motivische MZV

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1,\dots,n_r)$$

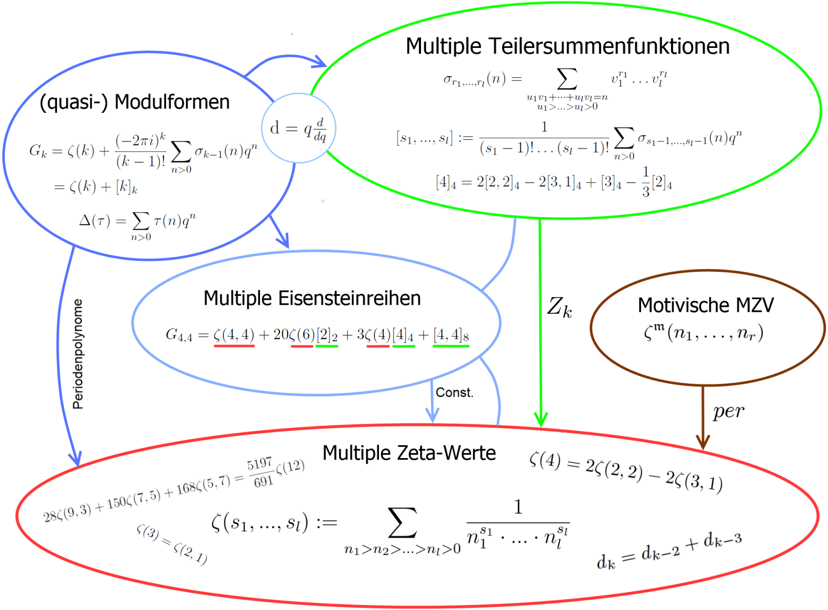
Periodenpolynome

Const.

per

Multiple Zeta-Werte

$$28\zeta(9,3) + 150\zeta(7,5) + 168\zeta(5,7) = \frac{5197}{691}\zeta(12)$$
$$\zeta(4) = 2\zeta(2,2) - 2\zeta(3,1)$$
$$\zeta(s_1,\dots,s_l) := \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l>0}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdot\ldots\cdot n_l^{s_l}}$$
$$\zeta(3) = \zeta(2,1)$$
$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$$



Multiple Teilersummenfunktionen
$\sigma_{r_1,\dots,r_l}(n) = \sum_{\substack{u_1v_1+\dots+u_lv_l=n \\ u_1>\dots>u_l>0}} v_1^{r_1}\dots v_l^{r_l}$
$[s_1,\dots,s_l] := \frac{1}{(s_1-1)!\dots(s_l-1)!}\sum_{n>0}\sigma_{s_1-1,\dots,s_l-1}(n)q^n$
$[4]_4 = 2[2,2]_4 - 2[3,1]_4 + [3]_4 - \frac{1}{3}[2]_4$
(quasi-) Modulformen
$G_k = \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n>0}\sigma_{k-1}(n)q^n$
$= \zeta(k) + [k]_k$
$\Delta(\tau) = \sum_{n>0}\tau(n)q^n$
$\mathrm{d} = q\frac{d}{dq}$
Multiple Eisensteinreihen
$G_{4,4} = \zeta(4,4) + 20\zeta(6)[2]_2 + 3\zeta(4)[4]_4 + [4,4]_8$
Z_k
Motivische MZV
$\zeta^{\mathfrak{m}}(n_1,\dots,n_r)$
Periodenpolynome
Const.
per
Multiple Zeta-Werte
$\zeta(4) = 2\zeta(2,2) - 2\zeta(3,1)$
$28\zeta(9,3) + 150\zeta(7,5) + 168\zeta(5,7) = \frac{5197}{691}\zeta(12)$
$\zeta(3) = \zeta(2,1)$
$\zeta(s_1,\dots,s_l) := \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l>0}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdot\dots\cdot n_l^{s_l}}$
$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$

Inhalt

Multiple Teilersummen

Definition

Für $r_1, \dots, r_l \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *multiplen Teilersummen* durch

$$\sigma_{r_1,\dots,r_l}(n) := \sum_{\substack{u_1 v_1 + \dots + u_l v_l = n \\ u_1 > \dots > u_l > 0}} v_1^{r_1} \dots v_l^{r_l} .$$

Ihre Erzeugendenreihen nennen wir *multiple Teilersummenfunktionen* und schreiben für $s_1, \dots, s_l \in \mathbb{N}$ und $k \geq s_1 + \dots + s_l$:

$$[s_1, ..., s_l] := \frac{1}{(s_1 - 1)! \dots (s_l - 1)!} \sum_{n>0} \sigma_{s_1-1,\dots,s_l-1}(n) q^n \ \in \mathbb{Q}[[q]]$$

und

$$[s_1, ..., s_l]_k := (-2\pi i)^k \cdot [s_1, ..., s_l] \ \in \mathbb{Q}[-2\pi i][[q]] .$$

Multiple Teilersummen - Beispiele

$$[2] = q + 3q^2 + 4q^3 + 7q^4 + 6q^5 + 12q^6 + 8q^7 + 15q^8 + \dots$$

$$[4,2] = \frac{1}{6}\left(q^3 + 3q^4 + 15q^5 + 27q^6 + 78q^7 + 135q^8 + \dots\right)$$

$$[4,4,4] = \frac{1}{216}\left(q^6 + 9q^7 + 45q^8 + 190q^9 + 642q^{10} + 1899q^{11} + \dots\right)$$

$$[3,1,3,1] = \frac{1}{4}\left(q^{10} + 2q^{11} + 8q^{12} + 16q^{13} + 43q^{14} + 70q^{15} + \dots\right)$$

$$[1,2,3,4,5] = \frac{1}{288}\left(q^{15} + 17q^{16} + 107q^{17} + 512q^{18} + 1985q^{19} + \dots\right)$$

Multiple Teilersummen

Das Gewicht und die Länge von $[s_1, ..., s_l]_k$ definieren wir durch k und l. Für $l = 0$ setzen wir

$$[\emptyset]_k = (-2\pi i)^k \,.$$

Es gilt offensichtlich $[\emptyset]_{k_1} \cdot [s_1, ..., s_l]_{k_2} = [s_1, ..., s_l]_{k_1+k_2}$. Damit definieren wir für $k \in \mathbb{N}_0$ den $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller multiplen Teilersummenfunktionen vom Gewicht k bis Länge L durch

$$\mathcal{MD}_k^{(L)} := \bigoplus_{\substack{L \geq l \geq 0 \\ s_1,...,s_l > 0 \\ k \geq s_1 + \cdots + s_l}} < [s_1, ..., s_l]_k >_{\mathbb{Q}}$$

und den Raum aller multiplen Teilersummen vom Gewicht k bezeichnen wir mit

$$\mathcal{MD}_k := \mathcal{MD}_k^{(k)} \,.$$

Multiple Teilersummen - Algebra

Theorem

Der $\mathbb{Q}$-Vektorraum

$$\mathcal{MD} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{MD}_k$$

ist mit der gewöhnlichen Multiplikation von Potenzreihen eine graduierte $\mathbb{Q}$-Algebra, wobei die Graduierung durch das Gewicht gegeben ist. Es gilt

$$\mathcal{MD}_{s_1}^{(l_1)} \cdot \mathcal{MD}_{s_2}^{(l_2)} \subset \mathcal{MD}_{s_1+s_2}^{(l_1+l_2)} .$$

Aufgrund der Transzendenz von π ist klar, dass die Algebra graduiert ist. Es muss daher nur die Abgeschlossenheit unter der Multiplikation gezeigt werden.

Multiple Teilersummen - Algebra

Definition

Wir definieren

$$\tilde{\mathrm{Li}}_s(z) := \frac{\mathrm{Li}_{1-s}(z)}{\Gamma(s)},$$

wobei für $s, z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ der Polylogarithmus $\mathrm{Li}_s(z)$ von Gewicht s gegeben ist durch

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n>0} \frac{z^n}{n^s}\,.$$

Proposition

Für $q \in \mathbb{C}$ und $|q| < 1$ und alle $s_1, \ldots, s_l \in \mathbb{N}$ können wir damit die multiplen Teilersummenfunktionen schreiben als

$$[s_1, \ldots, s_l] = \sum_{n_1 > \cdots > n_l > 0} \tilde{\mathrm{Li}}_{s_1}\left(q^{n_1}\right) \ldots \tilde{\mathrm{Li}}_{s_l}\left(q^{n_l}\right)\,.$$

Multiple Teilersummen - Algebra

Proposition

Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt

$$\tilde{\mathrm{Li}}_a(z) \cdot \tilde{\mathrm{Li}}_b(z) = \sum_{j=1}^{a} \lambda_{a,b}^{j} \tilde{\mathrm{Li}}_j(z) + \sum_{j=1}^{b} \lambda_{b,a}^{j} \tilde{\mathrm{Li}}_j(z) + \tilde{\mathrm{Li}}_{a+b}(z)\,,$$

wobei der Koeffizient $\lambda_{a,b}^{j} \in \mathbb{Q}$ für $1 \leq j \leq a$ gegeben ist durch

$$\lambda_{a,b}^{j} = (-1)^{b-1} \binom{a+b-j-1}{a-j} \frac{B_{a+b-j}}{(a+b-j)!}\,.$$

Beispiel: Da $\lambda_{1,1}^{1} = B_1 = -\frac{1}{2}$ ist

$$\tilde{\mathrm{Li}}_1(z) \cdot \tilde{\mathrm{Li}}_1(z) = -\tilde{\mathrm{Li}}_1(z) + \tilde{\mathrm{Li}}_2(z)\,.$$

Beweis: Zum Beweis benutzen wir die Erzeugendenreihe

$$L(X) := \sum_{k>0} \tilde{\mathrm{Li}}_k(z) X^{k-1} = \sum_{k>0} \sum_{n>0} \frac{n^{k-1} z^n}{(k-1)!} X^{k-1} = \sum_{n>0} e^{nX} z^n = \frac{e^X z}{1 - e^X z} \,.$$

Beweis: Zum Beweis benutzen wir die Erzeugendenreihe

$$L(X) := \sum_{k>0} \tilde{\mathrm{Li}}_k(z) X^{k-1} = \sum_{k>0}\sum_{n>0} \frac{n^{k-1} z^n}{(k-1)!} X^{k-1} = \sum_{n>0} e^{nX} z^n = \frac{e^X z}{1 - e^X z}\,.$$

Für diese lässt sich direkt nachrechnen, dass gilt

$$L(X) \cdot L(Y) = \frac{1}{e^{X-Y} - 1} L(X) + \frac{1}{e^{Y-X} - 1} L(Y)\,.$$

Beweis: Zum Beweis benutzen wir die Erzeugendenreihe

$$L(X) := \sum_{k>0} \tilde{\mathrm{Li}}_k(z) X^{k-1} = \sum_{k>0} \sum_{n>0} \frac{n^{k-1} z^n}{(k-1)!} X^{k-1} = \sum_{n>0} e^{nX} z^n = \frac{e^X z}{1 - e^X z} .$$

Für diese lässt sich direkt nachrechnen, dass gilt

$$L(X) \cdot L(Y) = \frac{1}{e^{X-Y} - 1} L(X) + \frac{1}{e^{Y-X} - 1} L(Y) .$$

Aus der Definition der Bernoullizahlen

$$\frac{X}{e^X - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$$

folgt somit

$$\begin{aligned} L(X) \cdot L(Y) = &\sum_{n>0} \frac{B_n}{n!} (X-Y)^{n-1} L(X) + \sum_{n>0} \frac{B_n}{n!} (Y-X)^{n-1} L(Y) \\ &+ \frac{L(X) - L(Y)}{X - Y} . \end{aligned}$$

Betrachtet man nun den Koeffizienten von $X^{a-1} Y^{b-1}$, so erhält man das Gewünschte.

Multiple Teilersummen - Produkt Beispiele

$$\begin{aligned}
[1]\cdot[1] &= 2[1,1]+[2]-[1]\,,\\
[1]\cdot[2] &= [1,2]+[2,1]+[3]-\frac{1}{2}[2]\,,\\
[1]\cdot[2,1] &= [1,2,1]+2[2,1,1]-\frac{3}{2}[2,1]+[2,2]+[3,1]\,,\\
[4]^2 &= 2[4,4]+[8]-\frac{1}{1512}[2]+\frac{1}{360}[4]\,,\\
[2]\cdot[2,1] &= [2,3]+[4,1]+[2,1,2]+2[2,2,1]-\frac{1}{6}[2,1]-\frac{1}{2}[2,2]\,.
\end{aligned}$$

Multiple Teilersummen - Produkt allgemein

Um zu zeigen das ein beliebiges Produkt $[s_1, \dots, s_l] \cdot [r_1, \dots, r_t]$ wieder als Linearkombination von multiplen Teilersummen geschrieben werden kann benutzt man die vorige Proposition mehrfach und macht Induktion über l und t. Es ist aber offensichtlich, dass dies stets klappt. Z.B. hat man:

$$
\begin{aligned}
&[s_1] \cdot [r_1, r_2] = \sum_{n>0} \tilde{\mathrm{Li}}_{s_1}(q^{n_1}) \sum_{m_1>m_2>0} \tilde{\mathrm{Li}}_{r_1}(q^{m_1})\, \tilde{\mathrm{Li}}_{r_2}(q^{m_2}) \\
&= \sum_{n>m_1>m_2>0} \cdots + \sum_{m_1>n>m_2>0} \cdots + \sum_{m_1>m_2>n>0} \cdots + \sum_{n=m_1>m_2>0} \cdots + \sum_{m_1>m_2=n>0} \cdots \\
&= [s_1, r_1, r_2] + [r_1, s_1, r_2] + [r_1, r_2, s_1] + \underbrace{\sum_{n>m_2>0} \underbrace{\tilde{\mathrm{Li}}_{s_1}(q^n)\, \tilde{\mathrm{Li}}_{r_1}(q^n)}_{=\sum_j \alpha_j \tilde{\mathrm{Li}}_j(q^n)} \tilde{\mathrm{Li}}_{r_2}(q^{m_2})}_{=\sum_j \alpha_j [j, r_2]} + \sum_{m_1>m_2=n>0} \cdots
\end{aligned}
$$

Multiple Teilersummen - Produkt allgemein

Um zu zeigen das ein beliebiges Produkt $[s_1, \dots, s_l] \cdot [r_1, \dots, r_t]$ wieder als Linearkombination von multiplen Teilersummen geschrieben werden kann benutzt man die vorige Proposition mehrfach und macht Induktion über l und t. Es ist aber offensichtlich, dass dies stets klappt. Z.B. hat man:

$$
\begin{aligned}
&[s_1] \cdot [r_1, r_2] = \sum_{n>0} \tilde{\mathrm{Li}}_{s_1}(q^{n_1}) \sum_{m_1>m_2>0} \tilde{\mathrm{Li}}_{r_1}(q^{m_1}) \tilde{\mathrm{Li}}_{r_2}(q^{m_2}) \\
&= \sum_{n>m_1>m_2>0} \dots + \sum_{m_1>n>m_2>0} \dots + \sum_{m_1>m_2>n>0} \dots + \sum_{n=m_1>m_2>0} \dots + \sum_{m_1>m_2=n>0} \dots \\
&= [s_1, r_1, r_2] + [r_1, s_1, r_2] + [r_1, r_2, s_1] + \underbrace{\sum_{n>m_2>0} \underbrace{\tilde{\mathrm{Li}}_{s_1}(q^n) \tilde{\mathrm{Li}}_{r_1}(q^n)}_{=\sum_j \alpha_j \tilde{\mathrm{Li}}_j(q^n)} \tilde{\mathrm{Li}}_{r_2}(q^{m_2})}_{=\sum_j \alpha_j [j, r_2]} + \sum_{m_1>m_2=n>0} \dots
\end{aligned}
$$

Bemerkung

Die Algebra der multiplen Teilersummenfunktionen ist ein Beispiel für eine Quasi-shuffle Algebra.

Inhalt

Modulformen

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Eisensteinreihe von Gewicht k durch

$$G_k = \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n = \zeta(k) + [k]_k$$

und den Ring der Modulformen und quasi-Modulformen durch

$$M = \mathbb{Q}[G_4, G_6] \,, \qquad \tilde{M} = \mathbb{Q}[G_2, G_4, G_6] \,.$$

Mit M_k und $\tilde{M}_k$ bezeichnen wir jeweils die entsprechenden Räume von Gewicht k.
Nach Euler ist

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

und somit

$$G_{2n} = -\frac{1}{2} \frac{B_{2n}}{(2n)!} [\emptyset]_{2n} + [2n]_{2n} \in \mathcal{MD}_{2n}$$

$$M_k \subset \tilde{M}_k \subset \mathcal{MD}_k$$

Modulformen - Relationen

Aus der Theorie der Modulformen ist bekannt, dass

$$G_4^2 = \frac{7}{6} G_8 \,.$$

Dies liefert eine Relation in Gewicht 8, denn aus

$$\begin{aligned} G_4^2 = (\zeta(4) + [4]_4)^2 &= \left(-\frac{1}{2} \frac{B_4}{4!} [\emptyset]_4 + [4]_4 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2073600} [\emptyset]_8 + 2[4,4]_8 - \frac{1}{1512} [2]_8 + \frac{1}{240} [4]_8 + [8]_8 \end{aligned}$$

und $G_8 = \frac{1}{2419200} [\emptyset]_8 + [8]_8$ folgt

$$2[4,4]_8 - \frac{1}{1512} [2]_8 + \frac{1}{240} [4]_8 = \frac{1}{6} [8]_8 \,.$$

Modulformen - Spitzenformen

Eine Modulform $f = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$ heißt *Spitzenform*, wenn $a_0 = 0$. Die erste Spitzenform tritt in Gewicht 12 auf und ist gegeben durch

$$(-2\pi i)^{12}\Delta = (-2\pi i)^{12} \sum_{n>0} \tau(n) q^n = c_1 G_6^2 + c_2 G_4 G_8 \in \mathcal{MD}_{12} \ .$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$.

Modulformen - Spitzenformen

Eine Modulform $f = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$ heißt *Spitzenform*, wenn $a_0 = 0$. Die erste Spitzenform tritt in Gewicht 12 auf und ist gegeben durch

$$(-2\pi i)^{12}\Delta = (-2\pi i)^{12} \sum_{n>0} \tau(n) q^n = c_1 G_6^2 + c_2 G_4 G_8 \in \mathcal{MD}_{12} \;.$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$. Wie wir später sehen werden sind für uns Elemente in $\mathcal{MD}_k$ interessant, deren Fourierkoeffizienten "langsam wachsen". Für Spitzenformen ist dies der Fall:

Proposition

Ist $f = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$ eine Spitzenform von Gewicht k, dann gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq C n^{\frac{k}{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Vergleich: Für die Fourierkoeffizienten von Eisensteinreihen gilt:
$n^{k-1} \leq \sigma_{k-1}(n) < \zeta(k-1) n^{k-1}$.

Proposition

Der Raum der quasi-Modulformen ist abgeschlossen unter dem Operator $\mathrm{d} = (-2\pi i)^2 q \frac{d}{dq}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, G_2 &= 5G_4 - 2G_2^2\,, \\ \mathrm{d}\, G_4 &= 14G_6 - 8G_2G_4\,, \\ \mathrm{d}\, G_6 &= \frac{120}{7}G_4^2 - 12G_2G_6\,, \end{aligned}$$

d.h. insbesondere ist $\mathrm{d}\, \tilde{M}_k \subset \tilde{M}_{k+2}$.

Beweis: Folgt aus dem allgemeinen Resultat später.

Inhalt

Multiple Teilersummen - Derivation

Theorem

Der Operator $\mathrm{d} = (-2\pi i)^2 q \frac{d}{dq}$ ist eine Derivation von $\mathcal{MD}_k^{(l)}$ nach $\mathcal{MD}_{k+2}^{(l+1)}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[1] &= [3] + \frac{1}{2}[2] - [2,1]\,, \\ \mathrm{d}[2] &= [4] + 2[3] - \frac{1}{6}[2] - 4[3,1]\,, \\ \mathrm{d}[1,1] &= [3,1] + \frac{3}{2}[2,1] + \frac{1}{2}[1,2] + [1,3] - 2[2,1,1] - [1,2,1]\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Beweisidee:

Benutze die Erzeugendenreihen der multiplen Teilersummenfkt

$$T(X_1,\ldots,X_l) = \sum_{s_1,\ldots,s_l>0} [s_1,\ldots,s_l] X_1^{s_1-1}\ldots X_l^{s_l-1}$$

und zeige

$$\begin{aligned} T(X)\cdot T(Y_1,\ldots,Y_l) = &\sum_{j=1}^{l} T(X+Y_1,\ldots,X+Y_j,Y_j,\ldots,Y_l) \\ &-\sum_{j=1}^{l} T(X+Y_1,\ldots,X+Y_j,Y_{j+1},\ldots,Y_l) \\ &+T(X+Y_1,\ldots,X+Y_l,X)+R_l \end{aligned}$$

wobei R_l ein Restterm ist für den gilt $D(R_l) = \mathrm{d}\,T(Y_1,\ldots,Y_l)$ mit $D(f) = \left(\frac{d}{dX} f\right)\big|_{X=0}$. Wendet man D auf die linke Seite der Gleichung an erhält man $[2]T(Y_1,\ldots,Y_l)$ und somit liefert ein Koffizientenvergleich das Gewünschte.

Multiple Teilersummen - Derivation in Länge 1

Proposition

Mit

$$T^*(X) := \sum_{k>0} \frac{\mathrm{d}[k]}{k} X^{k-1}$$

gilt

$$\begin{aligned} T(X)\cdot T(Y) =& T(X+Y,X) + T(X+Y,Y) + [2] - T(X+Y) \\ &+ (X+Y)T^*(X+Y)\,. \end{aligned}$$

Korollar

Für s_1, s_2 mit $s_1 + s_2 > 2$ und $k = s_1 + s_2 - 2$ haben wir folgende Darstellung für $d[k]$:

$$\binom{k}{s_1-1}\frac{d[k]}{k} = [s_1]\cdot[s_2] + \binom{k}{s_1-1}[k+1] - \sum_{a+b=k+2}\left(\binom{a-1}{s_1-1} + \binom{a-1}{s_2-1}\right)[a,b]$$

Wählt man $s_1 \leq s_2$ dann liefert dies $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ verschiedene Darstellungen.

Inhalt

Multiple Teilersummen - Relationen durch Derivation

Beispiel

- Im kleinsten Fall $k = 1$ gibt es nur die Möglichkeit $s_1 = 1$, $s_2 = 2$:

$$d[1] = [3] + \frac{1}{2}[2] - [2,1]\,.$$

- Für $k = 2$ gibt es die Möglichkeiten $s_1 = 1, s_2 = 3$ und $s_1 = s_2 = 2$:

$$d[2] = 2[4] + [3] + \frac{1}{6}[2] - 2[2,2] - 2[3,1]\,,$$
$$d[2] = [4] + 2[3] - \frac{1}{6}[2] - 4[3,1]\,,$$

womit sich die erste Relation im Gewicht 4 zeigen lässt:

$$[4]_4 = 2[2,2]_4 - 2[3,1]_4 + [3]_4 - \frac{1}{3}[2]_4\,.$$

Multiple Teilersummen - Dimension in Länge 2

Theorem

- Die Dimension von $\mathcal{MD}_k^{(2)}$ besitzt folgende obere Schranke

$$\dim\left(\mathcal{MD}_k^{(2)}\right) \leq k + 1 + \left\lfloor \frac{k^2(k+2)^2}{4(k+1)^2} \right\rfloor$$

- Für $0 \leq k \leq 20$ erhält man eine Gleichheit.

Vermutung: Die Dimension von $\mathcal{MD}_k^{(2)}$ ist in jedem Gewicht gleich der rechten Seite.

Beweis: Zähle die Relationen die durch das Korollar entstehen.

Multiple Teilersummen - Dimension

Für die Dimension in höheren Längen gibt es bisher keine Vermutung.

Aber vielleicht hat Jemand eine Idee?

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(0)})$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(1)})$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(2)})$	1	2	4	7	10	14	18	23	28	34	40
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(3)})$	1	2	4	8	14	22	32	44	59	76	97
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(4)})$	1	2	4	8	15	27	44	67	97	135	183
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(5)})$	1	2	4	8	15	28	50	84	133	200	290
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(6)})$	1	2	4	8	15	28	51	91	156	254	396
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(7)})$	1	2	4	8	15	28	51	92	164	284	474
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(8)})$	1	2	4	8	15	28	51	92	165	293	512
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(9)})$	1	2	4	8	15	28	51	92	165	294	522
$\dim(\mathcal{MD}_k^{(10)})$	1	2	4	8	15	28	51	92	165	294	523

Inhalt

Anwendung: MZV

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $Z_k : \mathcal{MD}_k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$Z_k\left([s_1, \ldots, s_l]_k\right) = \lim_{q \to 1} (1-q)^k [s_1, \ldots, s_l]\,.$$

Anwendung: MZV

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $Z_k : \mathcal{MD}_k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$Z_k\left([s_1, \ldots, s_l]_k\right) = \lim_{q \to 1} (1-q)^k [s_1, \ldots, s_l] \,.$$

Proposition

- Die Abbildung Z_k ist auf den Erzeugern von $\mathcal{MD}_k$ gegeben durch

$$Z_k\left([s_1, \ldots, s_l]_k\right) = \begin{cases} \zeta(s_1, \ldots, s_l)\,, & k = s_1 + \cdots + s_l,\ s_1 > 1 \\ 0\,, & k > s_1 + \cdots + s_l \\ \infty\,, & \text{sonst} \end{cases} \,.$$

- Sei $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ eine quasi- Modulform von Gewicht k. Dann ist Z_k die Projektion auf den konstanten Term d.h. $Z_k(f) = a_0$.
- Gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq C n^{k-2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in \ker(Z_k)$ d.h. $Z_k(f) = 0$.

Beweisidee i)

Für eine natürliche Zahl n definiert man das q-Analogon durch

$$n_q := \frac{1-q^n}{1-q} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j$$

wofür offensichtlich $\lim\limits_{q \to 1} n_q = n$ gilt. Damit erhalten wir

$$(1-q)^k \frac{q^n \cdot P_{k-1}(q^n)}{(1-q^n)^k} = \frac{q^n \cdot P_{k-1}(q^n)}{n_q^k}$$

und da $P_{k-1}(1) = (k-1)!$ ergibt sich

$$\lim_{q \to 1} (1-q)^k \frac{q^n \cdot P_{k-1}(q^n)}{(k-1)! \cdot (1-q^n)} = \frac{1}{n^k} \,.$$

Beweisidee i)

Für eine natürliche Zahl n definiert man das q-Analogon durch

$$n_q := \frac{1-q^n}{1-q} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j$$

wofür offensichtlich $\lim_{q\to 1} n_q = n$ gilt. Damit erhalten wir

$$(1-q)^k \frac{q^n \cdot P_{k-1}(q^n)}{(1-q^n)^k} = \frac{q^n \cdot P_{k-1}(q^n)}{n_q^k}$$

und da $P_{k-1}(1) = (k-1)!$ ergibt sich

$$\lim_{q\to 1} (1-q)^k \frac{q^n \cdot P_{k-1}(q^n)}{(k-1)! \cdot (1-q^n)} = \frac{1}{n^k}\,.$$

Wir hatten gesehen, dass

$$[s_1,\dots,s_l] = \sum_{n_1>\dots>n_l>0} \prod_{j=1}^{l} \frac{q^{n_j} P_{s_1-1}(q^{n_j})}{(s_j-1)!(1-q^{n_j})^{s_j}}$$

und somit erhält man für $s_1 > 1, s_2,\dots,s_l \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{q\to 1} (1-q)^k [s_1,\dots,s_l] = \zeta(s_1,\dots,s_l)\,.$$

Beweisidee ii) und iii)

- Für die Eisensteinreihen von Gewicht k gilt $Z_k(G_k) = \zeta(k)$. Zusammen mit $Z_{r+s}(G_r \cdot G_s) = Z_r(G_r) \cdot Z_s(G_s)$ folgt ii).
- Um iii) zu zeigen schätzt man die $Z_k(f)$ nach oben hin mit

$$\lim_{q \to 1} (1-q)^k \sum_{n>0} n^{k-2} q^n = 0$$

ab.

Insbesondere kann man damit auch zeigen, dass gilt $\mathrm{d}\left(\mathcal{MD}_{k-2}\right) \subset \ker(Z_k)$.

Anwendung: MZV

Mit dem Satz haben wir somit mehrere Möglichkeiten mit Hilfe der multiplen Teilersummen Relationen zwischen multiplen Zeta-Werten zu erhalten:

- Relationen zwischen Teilersummen

$$[4]_4 = 2[2,2]_4 - 2[3,1]_4 + [3]_4 - \frac{1}{3}[2]_4 \xRightarrow{Z_4} \zeta(4) = 2\zeta(2,2) - 2\zeta(3,1)$$

Anwendung: MZV

Mit dem Satz haben wir somit mehrere Möglichkeiten mit Hilfe der multiplen Teilersummen Relationen zwischen multiplen Zeta-Werten zu erhalten:

- Relationen zwischen Teilersummen

$$[4]_4 = 2[2,2]_4 - 2[3,1]_4 + [3]_4 - \frac{1}{3}[2]_4 \stackrel{Z_4}{\Longrightarrow} \zeta(4) = 2\zeta(2,2) - 2\zeta(3,1)$$

- Spitzenformen

$$\Delta \in \mathcal{MD}_{12}^{(2)} \stackrel{Z_{12}}{\Longrightarrow} 28\zeta(9,3) + 150\zeta(7,5) + 168\zeta(5,7) = \frac{5197}{691}\zeta(12)$$

Anwendung: MZV

Mit dem Satz haben wir somit mehrere Möglichkeiten mit Hilfe der multiplen Teilersummen Relationen zwischen multiplen Zeta-Werten zu erhalten:

- Relationen zwischen Teilersummen

$$[4]_4 = 2[2,2]_4 - 2[3,1]_4 + [3]_4 - \frac{1}{3}[2]_4 \overset{Z_4}{\Longrightarrow} \zeta(4) = 2\zeta(2,2) - 2\zeta(3,1)$$

- Spitzenformen

$$\Delta \in \mathcal{MD}_{12}^{(2)} \overset{Z_{12}}{\Longrightarrow} 28\zeta(9,3) + 150\zeta(7,5) + 168\zeta(5,7) = \frac{5197}{691}\zeta(12)$$

- Ableitungen

$$\mathrm{d}[1] = [3] + [2] - [2,1] \overset{Z_3}{\Longrightarrow} \zeta(3) = \zeta(2,1)$$

Anwendung: MZV

Frage

Was liegt noch in $\ker(Z_k)$ außer $S_k,\ (-2\pi i)\,\mathcal{MD}_{k-1}$ und $\mathrm{d}\,(\mathcal{MD}_{k-2})$?

Vermutung: Für Länge 2 nichts.

Ab Länge 3 aber z.B. in Gewicht 4 vermutungsweise

$$[2,1,1]_4 - [4]_4 \in \ker(Z_4)$$

und in Gewicht 7 vermutungsweise

$$16[3,2,2]_7 + 2[7]_7 - 18[5,2]_7 - 21[4,3]_7 \in \ker(Z_7)\,.$$

Zusammenfassung & Ausblick

- Multiple Teilersummen sind rein kombinatorische Objekte und bilden eine Brücke zwischen Modulformen und multiplen Zeta-Werten.
- Es lassen sich viele Relationen zwischen Teilersummen explizit herleiten.
- Mit der Abbildung Z_k lassen sich Relationen zwischen multiplen Zeta-Werten untersuchen.
- Der Kern von Z_k ist mysteriös und interessant und es gibt noch viel zu Entdecken.
- Mit den Teilersummen lassen sich "alternative" Definitionen von multiplen Eisensteinreihen angeben.
- Offene Fragen: Dimensionen? Basis? Hecke-Operatoren? Rankin-Cohen Brackets? L-Reihen? ... .