Die Algebra der bi-Klammern

Henrik Bachmann

Seminar arithmetische Geometrie und Zahlentheorie
Universität Hamburg - 16. April 2014

Ablauf

- Partitionen und Definition der bi-Klammern
- Wiederholung der Ergebnisse für die gewöhnlichen Klammern (früher multiple Teilersummenfunktionen)
- Verbindung zu multiplen Zeta-Werten
- Aktuelle Ergebnisse und Vermutungen zu den bi-Klammern

Partitionen

Unter einer Partition einer natürlichen Zahl n mit l Teilen verstehen wir eine Darstellung von n als Summe von l unterschiedlichen Zahlen (die in der Summe mehrfach auftreten dürfen).

Zum Beispiel ist

$$15 = 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1$$

eine Partition von 15 mit 4 Teilen.

Partitionen

Unter einer Partition einer natürlichen Zahl n mit l Teilen verstehen wir eine Darstellung von n als Summe von l unterschiedlichen Zahlen (die in der Summe mehrfach auftreten dürfen).

Zum Beispiel ist

$$15 = 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1$$

eine Partition von 15 mit 4 Teilen.

Wir identifizieren eine Partition von n mit l Teilen mit einem Tupel $(u, v) \in \mathbb{N}^l \times \mathbb{N}^l$

- Die u_j entsprechen den Summanden
- Die v_j zählen die Häufigkeit ihres Auftreten in der Summe

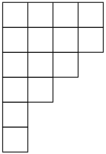
Obige Partition identifizieren wir somit mit $\binom{u}{v} = \binom{4,3,2,1}{2,1,1,2}$.

Partitionen

Die Menge aller Partitonen von n mit l Teilen bezeichnen wir mit $P_l(n)$ und setzen daher

$$P_l(n) := \left\{ (u,v) \in \mathbb{N}^l \times \mathbb{N}^l \;\middle|\; n = u_1 v_1 + \dots + u_l v_l \,,\;\; u_1 > \dots > u_l > 0 \right\} .$$

Eine Element in $P_l(n)$ kann man durch ein Young Diagramm darstellen. Zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 4,3,2,1 \\ 2,1,1,2 \end{pmatrix} =$$  $$\in P_4(15)$$

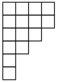
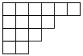
Wie kann man sich hieraus ein weiteres Element in $P_4(15)$ basteln?

Partitionen

Die Menge aller Partitonen von n mit l Teilen bezeichnen wir mit $P_l(n)$ und setzen daher

$$P_l(n) := \left\{ (u,v) \in \mathbb{N}^l \times \mathbb{N}^l \;\middle|\; n = u_1 v_1 + \cdots + u_l v_l \,,\;\; u_1 > \cdots > u_l > 0 \right\} .$$

Auf der Menge $P_l(n)$ haben wir eine Involution gegeben durch die Konjugation ρ von Partitionen (Drehung und Spiegelung des Young Diagramms)

$$\begin{pmatrix} 4,3,2,1 \\ 2,1,1,2 \end{pmatrix} =$$  $\xrightarrow{\qquad\rho\qquad}$  $$= \begin{pmatrix} 6,4,3,2 \\ 1,1,1,1 \end{pmatrix}$$

Auf $P_l(n)$ ist ρ explizit gegeben durch $\rho((u,v)) = (u',v')$, wobei $u'_j = v_1 + \cdots + v_{l-j+1}$ und $v'_j = u_{l-j+1} - u_{l-j+2}$ mit $u_{l+1} := 0$, dh

$$\rho : \begin{pmatrix} u_1, \ldots, u_l \\ v_1, \ldots, v_l \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1 + \cdots + v_l, \ldots, v_1 + v_2, v_1 \\ u_l, u_{l-1} - u_l, \ldots, u_1 - u_2 \end{pmatrix} .$$

Partitionen & q-Reihen

Wir wollen uns nun q-Reihen basteln, deren n-te Koeffizienten gegeben sind durch Summen über $P_l(n)$. Durch die Abbildung ρ erhält man lineare Relationen zwischen diesen q-Reihen.

Beispiel

$$\sum_{n>0} \left(\sum_{(u,v) \in P_2(n)} v_1 \cdot v_2 \right) q^n$$

Wir wollen uns nun q-Reihen basteln, deren n-te Koeffizienten gegeben sind durch Summen über $P_l(n)$. Durch die Abbildung ρ erhält man lineare Relationen zwischen diesen q-Reihen.

Beispiel

$$\sum_{n>0}\left(\sum_{(u,v)\in P_2(n)} v_1\cdot v_2\right)q^n = \sum_{n>0}\left(\sum_{\rho((u,v))=(u',v')\in P_2(n)} u_2'\cdot(u_1'-u_2')\right)q^n$$
$$= \sum_{n>0}\left(\sum_{(u,v)\in P_2(n)} u_2\cdot u_1\right)q^n - \sum_{n>0}\left(\sum_{(u,v)\in P_2(n)} u_2^2\right)q^n\,.$$

Bi-Klammern

Definition

Für $r_1, \dots, r_l \geq 0$, $s_1, \dots, s_l > 0$ und $c := (r_1!(s_1-1)! \dots r_l!(s_l-1)!)^{-1}$ definieren wir die folgende q-Reihe

$$\begin{bmatrix} s_1, \dots, s_l \\ r_1, \dots, r_l \end{bmatrix} := c \cdot \sum_{n>0} \left(\sum_{(u,v) \in P_l(n)} u_1^{r_1} v_1^{s_1-1} \dots u_l^{r_l} v_l^{s_l-1} \right) q^n$$

$$= \sum_{\substack{u_1 > \dots > u_l > 0 \\ v_1, \dots, v_l > 0}} \frac{u_1^{r_1}}{r_1!} \dots \frac{u_l^{r_l}}{r_1!} \cdot \frac{v_1^{s_1-1} \dots v_l^{s_l-1}}{(s_1-1)! \dots (s_l-1)!} \cdot q^{u_1 v_1 + \dots + u_l v_l} \in \mathbb{Q}[[q]]$$

welche wir **bi-Klammer** von Gewicht $r_1 + \dots + r_k + s_1 + \dots + s_l$ und Länge l nennen. Mit $\mathcal{BD}$ bezeichnen wir den $\mathbb{Q}$-Vektorraum der durch 1 und alle bi-Klammern aufgespannt wird. Gilt $r_1 = \dots = r_l = 0$, so schreiben wir auch

$$\begin{bmatrix} s_1, \dots, s_l \\ 0, \dots, 0 \end{bmatrix} = [s_1, \dots, s_l]$$

Bi-Klammern - Beispiele

$$[2] = \sum_{n>0} \sigma_1(n) q^n = q + 3q^2 + 4q^3 + 7q^4 + 6q^5 + 12q^6 + \dots ,$$

$$\begin{bmatrix} 2,2 \\ 1,0 \end{bmatrix} = 2q^3 + 7q^4 + 23q^5 + 42q^6 + 89q^7 + 142q^8 + 221q^9 + 342q^{10} + \dots ,$$

$$\begin{bmatrix} 2,2 \\ 0,1 \end{bmatrix} = q^3 + 3q^4 + 10q^5 + 16q^6 + 35q^7 + 52q^8 + 78q^9 + 120q^{10} + \dots ,$$

$$\begin{bmatrix} 1,1,1 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\left(12q^6 + 28q^7 + 96q^8 + 481q^9 + 747q^{10} + 2042q^{11} + \dots\right) ,$$

$$[4,4,4] = \frac{1}{216}\left(q^6 + 9q^7 + 45q^8 + 190q^9 + 642q^{10} + 1899q^{11} + \dots\right) ,$$

$$[3,1,3,1] = \frac{1}{4}\left(q^{10} + 2q^{11} + 8q^{12} + 16q^{13} + 43q^{14} + 70q^{15} + \dots\right) .$$

Bi-Klammern - Wayne?

- Zwischen den bi-Klammern gibt es zahlreiche lineare Relationen. Das Beispiel von eben entspricht z.B.

$$\begin{bmatrix} 2,2 \\ 0,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 1,1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1,1 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

- Die Klammern $[s_1, \ldots, s_l]$ besitzen eine direkte Verbindung zu multiplen Zeta-Werten durch eine Abbildung die einer Klammer $[s_1, \ldots, s_l]$ den multiplen Zeta-Wert $\zeta(s_1, \ldots, s_l)$ zuordnet.
- Was haben aber die bi-Klammern mit multiplen Zeta-Werten zu tun ?
- Dazu wiederholen wir zunächst einige Begriffe und Ergebnisse für die Klammern $[s_1, \ldots, s_l]$.

Multiple Zeta-Werte

Definition

Für natürliche Zahlen $s_1 \geq 2, s_2, ..., s_l \geq 1$ nennt man

$$\zeta(s_1, ..., s_l) = \sum_{n_1 > ... > n_l > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_l^{s_l}}$$

multiplen Zeta-Wert (MZV) von Gewicht $s_1 + ... + s_l$ und Länge l. Mit $\mathcal{MZ}$ bezeichnen wir den $\mathbb{Q}$-Vektorraum der durch alle MZV aufgespannt wird.

- Das Produkt von zwei MZV kann wieder als Linearkombination von MZV geschrieben werden (**Stuffle Produkt**), z.B.:

$$\zeta(r) \cdot \zeta(s) = \zeta(r, s) + \zeta(s, r) + \zeta(r + s)\,.$$

- Durch eine alternative Darstellung durch iterierte Integrate erhält man eine zweite Darstellung für das Produkt von zwei MZV (**Shuffle Produkt**), z.B.:

$$\zeta(r) \cdot \zeta(s) = \sum_{a+b=r+s} \left(\binom{a-1}{r-1} + \binom{a-1}{s-1} \right) \zeta(a, b)\,.$$

Multiple Zeta-Werte - Relationen

Zwischen MZV gibt es viele lineare Relationen. Die erste Relation tritt auf in Gewicht 3 und ist gegeben durch

$$\zeta(3) = \zeta(2,1)\,.$$

Weitere sind z.B.:

$$\begin{aligned}
\zeta(4) &= \zeta(2,1,1)\,,\\
\zeta(5) &= \zeta(4,1) + \zeta(3,2) + \zeta(2,3)\,,\\
16\zeta(3,2,2) &= 18\zeta(5,2) + 21\zeta(4,3) - 2\zeta(7)\,,\\
\frac{5197}{691}\zeta(12) &= 168\zeta(5,7) + 150\zeta(7,5) + 28\zeta(9,3)\,.
\end{aligned}$$

Klammern - Filtrierungen

Gewichts- und Längenfiltrierung

Sei $\mathcal{MD}$ der durch 1 und allen Klammern $[s_1, \dots, s_l]$ aufgespannte Unterraum von $\mathcal{BD}$.

Auf $\mathcal{MD}$ haben wir eine aufsteigende Filtrierung $\operatorname{Fil}^{\mathrm{W}}_{\bullet}$ gegeben durch das Gewicht und eine aufsteigende Filtrierung $\operatorname{Fil}^{\mathrm{L}}_{\bullet}$ gegeben durch die Länge. Für $A \subseteq \mathcal{MD}$ schreiben wir

$$\operatorname{Fil}^{\mathrm{W}}_{k}(A) := \Big\langle [s_1, \dots, s_l] \in A \,\Big|\, 0 \leq l \leq k\,,\; s_1 + \dots + s_l \leq k \Big\rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$\operatorname{Fil}^{\mathrm{L}}_{l}(A) := \Big\langle [s_1, \dots, s_r] \in A \,\Big|\, r \leq l \Big\rangle_{\mathbb{Q}}\,.$$

Betrachten wir beide Filtrierung gleichzeitig schreiben wir auch $\operatorname{Fil}^{\mathrm{W,L}}_{k,l} := \operatorname{Fil}^{\mathrm{W}}_{k} \operatorname{Fil}^{\mathrm{L}}_{l}$.

Mit $\operatorname{gr}^{\mathrm{W}}_{k}(A) = \operatorname{Fil}^{\mathrm{W}}_{k}(A) / \operatorname{Fil}^{\mathrm{W}}_{k-1}(A)$ bezeichnen wir die graduierten Anteile.
($\operatorname{gr}^{\mathrm{L}}_{l}$ und $\operatorname{gr}^{\mathrm{W,L}}_{k,l}$ analog)

Klammern

Theorem

$\mathcal{MD}$ hat die Struktur einer bifiltrierten $\mathbb{Q}$-Algebra $(\mathcal{MD}, \cdot, \mathrm{Fil}^{\mathrm{W}}_{\bullet}, \mathrm{Fil}^{\mathrm{L}}_{\bullet})$, wobei die Multiplikation gegeben ist durch die gewöhnliche Multiplikation von q-Reihen und die Filtrierungen $\mathrm{Fil}^{\mathrm{W}}_{\bullet}$ and $\mathrm{Fil}^{\mathrm{L}}_{\bullet}$ durch Gewicht und Länge induziert sind. Insbesondere ist

$$\mathrm{Fil}^{\mathrm{W,L}}_{k_1,l_1}(\mathcal{MD}) \cdot \mathrm{Fil}^{\mathrm{W,L}}_{k_2,l_2}(\mathcal{MD}) \subset \mathrm{Fil}^{\mathrm{W,L}}_{k_1+k_2,l_1+l_2}(\mathcal{MD}).$$

Für das Produkt von zwei beliebigen Klammern gibt es explizite Formeln und die Algebra $\mathcal{MD}$ ist ein Beispiel für eine sogenannte quasi-shuffle Algebra.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
[1] \cdot [1] &= 2[1,1] + [2] - [1]\,, \\
[1] \cdot [2] &= [1,2] + [2,1] + [3] - \frac{1}{2}[2]\,, \\
[1] \cdot [2,1] &= [1,2,1] + 2[2,1,1] + [2,2] + [3,1] - \frac{3}{2}[2,1]\,.
\end{aligned}$$

Klammern - Ableitungen

Theorem

Der Operator $\mathrm{d} = q\frac{d}{dq}$ ist eine Derivation auf $\mathcal{MD}$ und bildet $\mathrm{Fil}^{\mathrm{W,L}}_{k,l}(\mathcal{MD})$ auf $\mathrm{Fil}^{\mathrm{W,L}}_{k+2,l+1}(\mathcal{MD})$ ab.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[1] &= [3] + \frac{1}{2}[2] - [2,1]\,,\\
\mathrm{d}[2] &= [4] + 2[3] - \frac{1}{6}[2] - 4[3,1]\,,\\
\mathrm{d}[2] &= 2[4] + [3] + \frac{1}{6}[2] - 2[2,2] - 2[3,1]\,,\\
\mathrm{d}[1,1] &= [3,1] + \frac{3}{2}[2,1] + \frac{1}{2}[1,2] + [1,3] - 2[2,1,1] - [1,2,1]\,.
\end{aligned}$$

Die zweite und dritte Darstellung für $\mathrm{d}[2]$ liefert die erste Relation zwischen Klammern im Gewicht 4:

$$[4] = 2[2,2] - 2[3,1] + [3] - \frac{1}{3}[2]\,.$$

Klammern - Ableitungen

Für die Ableitung der Längen 1 Klammern haben wir folgende Darstellungen

Proposition

Sei $k \in \mathbb{N}$, dann haben wir für beliebige $s_1, s_2 \geq 1$ mit $k = s_1 + s_2 - 2$ die folgenden Darstellungen für $\mathrm{d}[k]$:

$$\binom{k}{s_1 - 1} \frac{\mathrm{d}[k]}{k} - \binom{k}{s_1 - 1} [k+1] =$$

$$[s_1] \cdot [s_2] - \sum_{a+b=k+2} \left(\binom{a-1}{s_1 - 1} + \binom{a-1}{s_2 - 1} \right) [a, b] \, .$$

Die möglichen Wahlen für s_1 und s_2 liefern $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ lineare Relationen in $\mathrm{Fil}_{k,2}^{\mathrm{W,L}}(\mathcal{MD})$, die vermutungsweise alle Relationen sind.

Klammern - $\mathrm{q}\mathcal{MZ}$

Wir definieren den Raum $\mathrm{q}\mathcal{MZ}$ der zulässigen Klammern durch

$$\mathrm{q}\mathcal{MZ} := \big\langle\, [s_1, \ldots, s_l] \in \mathcal{MD} \;\big|\; s_1 > 1 \big\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

Theorem

- Der Vektorraum $\mathrm{q}\mathcal{MZ}$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{MD}$.
- Es ist $\mathcal{MD} = \mathrm{q}\mathcal{MZ}[\,[1]\,]$.
- Die Algebra $\mathcal{MD}$ ist ein Polynomring über $\mathrm{q}\mathcal{MZ}$ mit Unbestimmer $[1]$, d.h. $\mathcal{MD}$ ist isomorph zu $\mathrm{q}\mathcal{MZ}[\,T\,]$ durch die Abbildung die $[1]$ auf T abbildet.

Klammern - $\mathrm{q}\mathcal{MZ}$

Wir definieren den Raum $\mathrm{q}\mathcal{MZ}$ der zulässigen Klammern durch

$$\mathrm{q}\mathcal{MZ} := \big\langle [s_1, \ldots, s_l] \in \mathcal{MD} \mid s_1 > 1 \big\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

Theorem

- Der Vektorraum $\mathrm{q}\mathcal{MZ}$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{MD}$.
- Es ist $\mathcal{MD} = \mathrm{q}\mathcal{MZ}[\,[1]\,]$.
- Die Algebra $\mathcal{MD}$ ist ein Polynomring über $\mathrm{q}\mathcal{MZ}$ mit Unbestimmer $[1]$, d.h. $\mathcal{MD}$ ist isomorph zu $\mathrm{q}\mathcal{MZ}[\,T\,]$ durch die Abbildung die $[1]$ auf T abbildet.

Beweisskizze:

- Die ersten beiden Aussagen folgen durch die explizite Formel für das quasi-shuffle Produkt.
- Die algebraische Unabhängigkeit von $[1]$ folgt aus der Tatsache, dass nahe $q = 1$ gilt $[1] \approx \frac{-\log(1-q)}{1-q}$ aber $[s_1, \ldots, s_l] \approx \frac{1}{(1-q)^{s_1+\cdots+s_l}}$ für $[s_1, \ldots, s_l] \in \mathrm{q}\mathcal{MZ}$.

Klammern - Verbindung zu MZV

Proposition

Für $[s_1,\dots,s_l] \in \mathrm{Fil}_k^{\mathrm{W}}(\mathrm{q}\mathcal{MZ})$ und die Abbildung Z_k definiert durch

$$Z_k\left([s_1,\dots,s_l]\right) = \lim_{q\to 1}(1-q)^k[s_1,\dots,s_l]$$

gilt

$$Z_k\left([s_1,\dots,s_l]\right) = \begin{cases} \zeta(s_1,\dots,s_l)\,, & s_1+\dots+s_l = k, \\ 0\,, & s_1+\dots+s_l < k\,. \end{cases}$$

Die Abbildung Z_k ist offensichtlich linear auf $\mathrm{Fil}_k^{\mathrm{W}}(\mathrm{q}\mathcal{MZ})$, d.h. lineare Relationen zwischen Elementen in $\mathrm{Fil}_k^{\mathrm{W}}(\mathrm{q}\mathcal{MZ})$ liefern Relationen zwischen MZV.

Beispiel:

$$[4] = 2[2,2] - 2[3,1] + [3] - \frac{1}{3}[2] \quad\Longrightarrow\quad \zeta(4) = 2\zeta(2,2) - 2\zeta(3,1)\,.$$

Einschub: Modulformen

Definition

Die $\mathbb{Q}$-Algebra der **Modulformen** und **quasi-Modulformen** ist definiert durch $M_{\mathbb{Q}}(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{Q}[G_4, G_6]$ und $\widetilde{M}_{\mathbb{Q}}(SL_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{Q}[G_2, G_4, G_6]$, wobei

$$G_2 = -\frac{1}{24} + [2]\,, \quad G_4 = \frac{1}{1440} + [4]\,, \quad G_6 = -\frac{1}{60480} + [6]\,.$$

Eine Modulform $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_{\mathbb{Q}}(SL_2(\mathbb{Z}))$ mit $a_0 = 0$ heißt **Spitzenform**.

Proposition

Die Algebra der Modulformen und der quasi-Modulformen sind Unteralgebren von $\mathcal{MD}$.

Klammern - Verbindung zu MZV

Wegen $\mathcal{MD} = \mathrm{q}\mathcal{MZ}[\,[1]\,]$ kann man nun die Abbildung Z_k erweitern zu einer Abbildung

$$Z_k : \mathrm{Fil}_k^{\mathrm{W}}(\mathcal{MD}) \longrightarrow \mathcal{MZ}[T]\,,$$

wobei $[1]$ auf T abgebildet wird.

Theorem

Für den Kern von Z_k haben wir folgende Aussagen

- Ist $s_1 + \cdots + s_l < k$ dann gilt $Z_k([s_1, \ldots, s_l]) = 0$.
- Für ein beliebiges $f \in \mathrm{Fil}_{k-2}^{\mathrm{W}}(\mathcal{MD})$ ist $Z_k(\mathrm{d}(f)) = 0$.
- Ist $f \in \mathrm{Fil}_k^{\mathrm{W}}(\mathcal{MD})$ eine Spitzenform, dann gilt $Z_k(f) = 0$.

Klammern - Verbindung zu MZV

Beweisskizze: Für $\rho \in \mathbb{R}$ definiere

$$\mathcal{Q}_\rho = \left\{ \sum_{n>0} a_n q^n \in \mathbb{R}[[q]] \mid a_n = O(n^{\rho-1}) \right\},$$

$$\mathcal{Q}_{<\rho} = \left\{ \sum_{n>0} a_n q^n \in \mathbb{R}[[q]] \mid \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } a_n = O(n^{\rho-1-\varepsilon}) \right\}.$$

Für $\rho > 1$ definiere wie zuvor Z_ρ für $f = \sum_{n>0} a_n q^n \in \mathbb{R}[[q]]$ durch

$$Z_\rho(f) = \lim_{q \to 1} (1-q)^\rho \sum_{n>0} a_n q^n .$$

Um das Theorem zu beweisen zeigt man zunächst folgendes

Lemma

- Z_ρ ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{Q}_\rho$ nach $\mathbb{R}$
- $\mathcal{Q}_{<\rho} \subset \ker Z_\rho$.
- $\mathrm{d}\, \mathcal{Q}_{<\rho-1} \subset \ker(Z_\rho)$, wobei wie zuvor $\mathrm{d} = q\frac{d}{dq}$.
- Für beliebige $s_1, \dots, s_l \geq 1$ gilt $[s_1, \dots, s_l] \in \mathcal{Q}_{<s_1+\dots+s_l+1}$.

Beispiel I: Wir haben gesehen, dass die Ableitung von $[1]$ gegeben ist durch

$$\mathrm{d}[1] = [3] + \frac{1}{2}[2] - [2,1]\,.$$

Durch den Satz ist $\mathrm{d}[1], [2] \in \ker Z_3$, woraus $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ folgt.

Klammern - Verbindung zu MZV

Beispiel II: (Shuffle Produkt) Für $s_1 + s_2 = k+2$ hatten wir

$$\binom{k}{s_1-1}\frac{d[k]}{k} = [s_1]\cdot[s_2] + \binom{k}{s_1-1}[k+1] - \sum_{a+b=k+2}\left(\binom{a-1}{s_1-1}+\binom{a-1}{s_2-1}\right)[a,b]$$

Wendet man Z_{k+2} auf beiden Seiten an erhält man das Shuffle Produkt für MZV

$$\zeta(s_1)\cdot\zeta(s_2) = \sum_{a+b=k+2}\left(\binom{a-1}{s_1-1}+\binom{a-1}{s_2-1}\right)\zeta(a,b)\,.$$

Klammern - Verbindung zu MZV

Beispiel III: Für die Spitzenform $\Delta =$ kann man folgende Darstellung zeigen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^6\cdot 5\cdot 691}\Delta &= 168[5,7]+150[7,5]+28[9,3]\\ &\quad+\frac{1}{1408}[2]-\frac{83}{14400}[4]+\frac{187}{6048}[6]-\frac{7}{120}[8]-\frac{5197}{691}[12]\,.\end{aligned}$$

Anwenden von Z_{12} auf beiden Seiten liefert die Relation

$$\frac{5197}{691}\zeta(12) = 168\zeta(5,7)+150\zeta(7,5)+28\zeta(9,3)\,.$$

Klammern - Einschub: Dimensionsvermutung

Seien d_k und d'_k definiert durch $d_0 = d'_0 = 1$, $d_1 = d'_1 = 0$, $d_2 = d'_2 = 1$ und für $k > 2$ durch

$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}\,, \qquad d'_k = 2d'_{k-2} + 2d'_{k-3}\,.$$

Vermutung

- Es ist $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}_k^{\mathrm{W}}(\mathcal{MZ}) = d_k$ (Zagier).
- Es ist $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}_k^{\mathrm{W}}(\mathrm{q}\mathcal{MZ}) = d'_k$.

Klammern - Einschub: Dimensionsvermutung

Seien d_k und d'_k definiert durch $d_0 = d'_0 = 1$, $d_1 = d'_1 = 0$, $d_2 = d'_2 = 1$ und für $k > 2$ durch

$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3}\,, \qquad d'_k = 2d'_{k-2} + 2d'_{k-3}\,.$$

Vermutung

- Es ist $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}_k^{\mathrm{W}}(\mathcal{MZ}) = d_k$ (Zagier).
- Es ist $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}_k^{\mathrm{W}}(\mathrm{q}\mathcal{MZ}) = d'_k$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21
d'_k	1	0	1	2	3	6	10	18	32	56	100	176	312	552	976

Klammern - Verbindung zu MZV

Zusammenfassend haben wir folgende Elemente im Kern von Z_k, d.h. Möglichkeiten um Relationen zwischen MZV mit Hilfe von Klammern zu beweisen

- Elemente mit niedrigerem Gewicht, d.h. Elemente in $\mathrm{Fil}^{\mathrm{W}}_{k-1}(\mathcal{MD})$.
- Ableitungen
- Spitzenformen
- Da $0 \in \ker Z_k$ liefern natürlich auch Relationen zwischen Klammern selbst Elemente im Kern.

Klammern - Verbindung zu MZV

Zusammenfassend haben wir folgende Elemente im Kern von Z_k, d.h. Möglichkeiten um Relationen zwischen MZV mit Hilfe von Klammern zu beweisen

- Elemente mit niedrigerem Gewicht, d.h. Elemente in $\mathrm{Fil}^{\mathrm{W}}_{k-1}(\mathcal{MD})$.
- Ableitungen
- Spitzenformen
- Da $0 \in \ker Z_k$ liefern natürlich auch Relationen zwischen Klammern selbst Elemente im Kern.

Sind das alle Elemente im Kern von Z_k ?

Klammern - Verbindung zu MZV

Zusammenfassend haben wir folgende Elemente im Kern von Z_k, d.h. Möglichkeiten um Relationen zwischen MZV mit Hilfe von Klammern zu beweisen

- Elemente mit niedrigerem Gewicht, d.h. Elemente in $\mathrm{Fil}^{\mathrm{W}}_{k-1}(\mathcal{MD})$.
- Ableitungen
- Spitzenformen
- Da $0 \in \ker Z_k$ liefern natürlich auch Relationen zwischen Klammern selbst Elemente im Kern.

Sind das alle Elemente im Kern von Z_k ? Nein!

In Gewicht 4 gilt folgende Relation für MZV

$$\zeta(4) = \zeta(2,1,1)\,,$$

d.h. es gilt offensichtlich $[4] - [2,1,1] \in \ker Z_4$. Dieses Element lässt sich aber nicht schreiben als Linearkombination von Ableitungen oder Spitzenformen. Es lässt sich aber zeigen, dass

$$[4] - [2,1,1] = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}[1] + \mathrm{d}[2]\right) - \frac{1}{3}[2] - [3] + \begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

und $\left[\begin{smallmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{smallmatrix}\right] \in \ker Z_4$. D.h. um den Kern von Z_k komplett zu bestimmen muss man die Verbindung von bi-Klammern zu den gewöhnlichen Klammern verstehen.

Bi-Klammern vs Klammern

- Das Beispiel zeigt insbesondere, dass $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \mathcal{MD}$.

Bi-Klammern vs Klammern

- Das Beispiel zeigt insbesondere, dass $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \mathcal{MD}$.
- $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \ker Z_4$ ist kein Zufall, da im wesentlichen "fast alle" bi-Klammern $\begin{bmatrix} s_1,\dots,s_l \\ r_1,\dots,r_l \end{bmatrix}$ mit $r_j > 0$ für mindst. ein $1 \leq j \leq l$ im Kern von $Z_{s_1+\dots+s_l+r_1+\dots+r_l}$ liegen.

Bi-Klammern vs Klammern

- Das Beispiel zeigt insbesondere, dass $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \mathcal{MD}$.
- $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \ker Z_4$ ist kein Zufall, da im wesentlichen "fast alle" bi-Klammern $\begin{bmatrix} s_1,\dots,s_l \\ r_1,\dots,r_l \end{bmatrix}$ mit $r_j > 0$ für mindst. ein $1 \leq j \leq l$ im Kern von $Z_{s_1+\dots+s_l+r_1+\dots+r_l}$ liegen.
- Kann man eine bi-Klammer als Linearkombination von Klammern schreiben erhält man daher "fast immer" eine Relation von MZV.

Bi-Klammern vs Klammern

- Das Beispiel zeigt insbesondere, dass $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \mathcal{MD}$.
- $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \ker Z_4$ ist kein Zufall, da im wesentlichen "fast alle" bi-Klammern $\begin{bmatrix} s_1,\dots,s_l \\ r_1,\dots,r_l \end{bmatrix}$ mit $r_j > 0$ für mindst. ein $1 \leq j \leq l$ im Kern von $Z_{s_1+\dots+s_l+r_1+\dots+r_l}$ liegen.
- Kann man eine bi-Klammer als Linearkombination von Klammern schreiben erhält man daher "fast immer" eine Relation von MZV.
- Welche bi-Klammern lassen sich als Linearkombination von Klammern schreiben?

Bi-Klammern vs Klammern

- Das Beispiel zeigt insbesondere, dass $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \mathcal{MD}$.
- $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \ker Z_4$ ist kein Zufall, da im wesentlichen "fast alle" bi-Klammern $\begin{bmatrix} s_1,\dots,s_l \\ r_1,\dots,r_l \end{bmatrix}$ mit $r_j > 0$ für mindst. ein $1 \leq j \leq l$ im Kern von $Z_{s_1+\dots+s_l+r_1+\dots+r_l}$ liegen.
- Kann man eine bi-Klammer als Linearkombination von Klammern schreiben erhält man daher "fast immer" eine Relation von MZV.
- Welche bi-Klammern lassen sich als Linearkombination von Klammern schreiben?

Vermutung

Alle bi-Klammern lassen sich als Linearkombination von Klammern schreiben, d.h.

$$\mathcal{BD} = \mathcal{MD}\,.$$

Bi-Klammern vs Klammern

- Das Beispiel zeigt insbesondere, dass $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \mathcal{MD}$.
- $\begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,0 \end{bmatrix} \in \ker Z_4$ ist kein Zufall, da im wesentlichen "fast alle" bi-Klammern $\begin{bmatrix} s_1,\dots,s_l \\ r_1,\dots,r_l \end{bmatrix}$ mit $r_j > 0$ für mindst. ein $1 \leq j \leq l$ im Kern von $Z_{s_1+\dots+s_l+r_1+\dots+r_l}$ liegen.
- Kann man eine bi-Klammer als Linearkombination von Klammern schreiben erhält man daher "fast immer" eine Relation von MZV.
- Welche bi-Klammern lassen sich als Linearkombination von Klammern schreiben?

Vermutung

Alle bi-Klammern lassen sich als Linearkombination von Klammern schreiben, d.h.

$$\mathcal{BD} = \mathcal{MD}\,.$$

Ziel: Verstehe die Relationen in $\mathcal{BD}$.

Bi-Klammern - Erzeugendenreihen

Definition

Für die Erzeugendenreihe der bi-Klammern der Länge l schreiben wir

$$\begin{vmatrix} X_1, \dots, X_l \\ Y_1, \dots, Y_l \end{vmatrix} :=$$

$$\sum_{\substack{s_1,\dots,s_l>0 \\ r_1,\dots,r_l>0}} \begin{bmatrix} s_1 \,, \dots \,, s_l \\ r_1 - 1 \,, \dots \,, r_l - 1 \end{bmatrix} X_1^{s_1-1} \dots X_l^{s_l-1} \cdot Y_1^{r_1-1} \dots Y_l^{r_l-1}$$

Bi-Klammern - Erzeugendenreihen

Für $n \in \mathbb{N}$ setze $L_n(X) := \frac{e^X q^n}{1-e^X q^n} \in \mathbb{Q}[[q,X]]$.

Satz

Für alle $l \geq 1$ haben wir folgende zwei Darstellungen für die Erzeugendenreihe

$$\begin{vmatrix} X_1, \dots, X_l \\ Y_1, \dots, Y_l \end{vmatrix} = \sum_{u_1 > \dots > u_l > 0} \prod_{j=1}^{l} e^{u_j Y_j} L_{u_j}(X_j)$$

$$= \sum_{u_1 > \dots > u_l > 0} \prod_{j=1}^{l} e^{u_j (X_{l+1-j} - X_{l+2-j})} L_{u_j}(Y_1 + \dots + Y_{l-j+1})$$

(mit $X_{l+1} := 0$)

Korollar (Partitionsrelation)

Für alle $l \geq 1$ gilt

$$\begin{vmatrix} X_1, \dots, X_l \\ Y_1, \dots, Y_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 + \dots + Y_l, \dots, Y_1 + Y_2, Y_1 \\ X_l, X_{l-1} - X_l, \dots, X_1 - X_2 \end{vmatrix}$$

Bi-Klammern - Partitionsrelation

Korollar (Partitionsrelation in Länge 1 und 2)

Für $r, r_1, r_2 \geq 0$ und $s, s_1, s_2 > 0$ gilt

$$\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r+1 \\ s-1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} s_1, s_2 \\ r_1, r_2 \end{bmatrix} = \sum_{\substack{0 \leq j \leq r_1 \\ 0 \leq k \leq s_2 - 1}} (-1)^k \binom{s_1 - 1 + k}{k} \binom{r_2 + j}{j} \begin{bmatrix} r_2 + j + 1\,, r_1 - j + 1 \\ s_2 - 1 - k\,, s_1 - 1 + k \end{bmatrix}.$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1,1 \\ 1,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,2 \\ 0,0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3,1 \\ 0,0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3,3 \\ 0,0 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1,1 \\ 0,4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1,1 \\ 1,3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,1 \\ 2,2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2,2 \\ 1,1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2,2 \\ 0,2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,2 \\ 1,1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 3,1 \\ 0,2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3,1 \\ 1,1 \end{bmatrix}.$$

Bi-Klammern - Algebrastruktur

Lemma

Es ist

$$L_n(X)\cdot L_n(Y) = \coth\left(\frac{X-Y}{2}\right)\cdot\frac{L_n(X)-L_n(Y)}{2} - \frac{L_n(X)+L_n(Y)}{2}$$

$$= \sum_{k>0}\frac{B_k}{k!}(X-Y)^{k-1}\left(L_n(X)+(-1)^{k-1}L_n(Y)\right) + \frac{L_n(X)-L_n(Y)}{X-Y}$$

Beweis: Per Definition ist

$$\coth(X) = \frac{e^X+e^{-X}}{e^X-e^{-X}} = 1+\frac{2}{e^{2X}-1}$$

und durch direktes Nachrechnen erhält man

$$L(X)\cdot L(Y) = \frac{1}{e^{X-Y}-1}L(X)+\frac{1}{e^{Y-X}-1}L(Y)\,.$$

Dies liefert die erste Zeile und die zweite folgt aus der Definition der Bernoulli-Zahlen:

$$\frac{X}{e^X-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}X^n\,.$$

Satz

- ("Stuffle Produkt der Erzeugendenreihen in Länge 1")

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1, X_2 \\ Y_1, Y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_2, X_1 \\ Y_2, Y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{X_1 - X_2} \left(\begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 + Y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_1 + Y_2 \end{vmatrix} \right)$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (X_1 - X_2)^{k-1} \left(\begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 + Y_2 \end{vmatrix} + (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_1 + Y_2 \end{vmatrix} \right) .$$

- ("Shuffle Produkt der Erzeugendenreihen in Länge 1")

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 + X_2, X_1 \\ Y_2 , Y_1 - Y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1 + X_2, X_2 \\ Y_1, Y_2 - Y_1 \end{vmatrix}$$
$$+ \frac{1}{Y_1 - Y_2} \left(\begin{vmatrix} X_1 + X_2 \\ Y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X_1 + X_2 \\ Y_2 \end{vmatrix} \right)$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (Y_1 - Y_2)^{k-1} \left(\begin{vmatrix} X_1 + X_2 \\ Y_1 \end{vmatrix} + (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} X_1 + X_2 \\ Y_2 \end{vmatrix} \right) .$$

Bi-Klammern - Algebrastruktur

Beweisskizze:

- Für das Stuffle Produkt betrachte

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{vmatrix} = \sum_{n_1>0} E_{n_1}(Y_1) L_n(X_1) \cdot \sum_{n_2>0} E_{n_2}(Y_2) L_n(X_2)$$
$$= \sum_{n_1>n_2>0} \cdots + \sum_{n_2>n_1>0} \cdots + \sum_{n_1=n_2>0} \cdots$$
$$= \begin{vmatrix} X_1, X_2 \\ Y_1, Y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_2, X_1 \\ Y_2, Y_1 \end{vmatrix} + \sum_{n>0} E_n(Y_1+Y_2) L_n(X_1) L_n(X_2)$$

  und benutze für den letzten Term das Lemma.

- Das Shuffle Produkt folgt, indem man auf beiden Seiten im Stuffle Produkt die Partitionsrelation anwendet.

Korollar (Stuffle Produkt)

Für $s_1, s_2 > 0$ und $r_1, r_2 \geq 0$ ist

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1, s_2 \\ r_1, r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_2, s_1 \\ r_2, r_1 \end{bmatrix} + \binom{r_1 + r_2}{r_1} \begin{bmatrix} s_1 + s_2 \\ r_1 + r_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \binom{r_1 + r_2}{r_1} \sum_{j=1}^{s_1} \frac{(-1)^{s_2 - 1} B_{s_1 + s_2 - j}}{(s_1 + s_2 - j)!} \binom{s_1 + s_2 - j - 1}{s_1 - j} \begin{bmatrix} j \\ r_1 + r_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \binom{r_1 + r_2}{r_1} \sum_{j=1}^{s_2} \frac{(-1)^{s_1 - 1} B_{s_1 + s_2 - j}}{(s_1 + s_2 - j)!} \binom{s_1 + s_2 - j - 1}{s_2 - j} \begin{bmatrix} j \\ r_1 + r_2 \end{bmatrix}$$

Beachte: Setzt man $r_1 = r_2 = 0$, so sind alle auftretenden Elemente in $\mathcal{MD}$ und das Produkt entspricht genau dem quasi-shuffle Produkt der Klammern.

Bi-Klammern - Shuffle Produkt

Korollar (Shuffle Produkt)

Für $s_1, s_2 > 0$ und $r_1, r_2 \geq 0$ ist

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \end{bmatrix} = &\sum_{\substack{1 \leq j \leq s_1 \\ 0 \leq k \leq r_2}} \binom{s_1+s_2-j-1}{s_1-j} \binom{r_1+r_2-k}{r_1} (-1)^{r_2-k} \begin{bmatrix} s_1+s_2-j, j \\ k, r_1+r_2-k \end{bmatrix} \\
&+ \sum_{\substack{1 \leq j \leq s_2 \\ 0 \leq k \leq r_1}} \binom{s_1+s_2-j-1}{s_1-1} \binom{r_1+r_2-k}{r_1-k} (-1)^{r_1-k} \begin{bmatrix} s_1+s_2-j, j \\ k, r_1+r_2-k \end{bmatrix} \\
&+ \binom{s_1+s_2-2}{s_1-1} \begin{bmatrix} s_1+s_2-1 \\ r_1+r_2+1 \end{bmatrix} \\
&+ \binom{s_1+s_2-2}{s_1-1} \sum_{j=0}^{r_1} \frac{(-1)^{r_2} B_{r_1+r_2-j+1}}{(r_1+r_2-j+1)!} \binom{r_1+r_2-j}{r_1-j} \begin{bmatrix} s_1+s_2-1 \\ j \end{bmatrix} \\
&+ \binom{s_1+s_2-2}{s_1-1} \sum_{j=0}^{r_2} \frac{(-1)^{r_1} B_{r_1+r_2-j+1}}{(r_1+r_2-j+1)!} \binom{r_1+r_2-j}{r_2-j} \begin{bmatrix} s_1+s_2-1 \\ j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Bi-Klammern - Algebrastruktur

Mit Hilfe der beiden Produkte lässt sich somit zeigen, dass die bi-Klammern $\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix}$ in $\mathcal{MD}$ enthalten sind. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $\mathrm{d}[k] \in \mathcal{MD}$.

Satz

Der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathcal{BD}$ der bi-Klammern ist eine $\mathbb{Q}$-Algebra mit Derivation $\mathrm{d} = q\frac{d}{dq}$ und es gilt

$$\mathrm{d}\begin{bmatrix} s_1, \ldots, s_l \\ r_1, \ldots, r_l \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{l} \left(s_j(r_j+1) \begin{bmatrix} s_1, \ldots, s_{j-1}, s_j+1, s_{j+1}, \ldots, s_l \\ r_1, \ldots, r_{j-1}, r_j+1, r_{j+1}, \ldots, r_l \end{bmatrix} \right).$$

Beispiel:

$$\mathrm{d}[k] = k\begin{bmatrix} k+1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{d}[s_1, s_2] = s_1 \begin{bmatrix} s_1+1, s_2 \\ 1, 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} s_1, s_2+1 \\ 0, 1 \end{bmatrix}.$$

Der Satz zeigt, dass man die bi-Klammern auch als partielle Ableitungen der gewöhnlichen Klammern auffassen kann.

Zusammenfassung

- bi-Klammern sind q-Reihen deren Koeffizienten durch Summen über Partitionen natürlicher Zahlen gegeben sind.
- Die Unteralgebra $\mathcal{MD}$ besitzt durch die Abbildung Z_k eine direkte Verbindung zu MZV. Der Kern von Z_k enthält alle Relationen zwischen MZV.
- Viele der bi-Klammern liefern Elemente im Kern von Z_k.
- Vermutungsweise sind alle bi-Klammern in $\mathcal{MD}$ und für die kleinste Länge ist dies klar.
- Hoffnung: Durch die beiden Produkte in $\mathcal{BD}$ erhält man genügend Relationen zwischen bi-Klammern um diese Vermutung (zumindestens für Sonderfälle) zu zeigen.
- Happy birthday Nils !