

Multiple Zeta-Werte und die Verbindung zu Modulformen durch Multiple Eisensteinreihen

Masterarbeit in Mathematik

HENRIK BACHMANN

21.02.2012

Betreut durch Prof. Dr. ULF KÜHN
Zweitgutachterin: Dr. ANNA POSINGIES
Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1. Grundlagen	13
1.1. Notationen	13
1.2. Riemannsche Zeta-Funktion	14
1.3. Klassische Eisensteinreihen	17
2. Modulformen	19
2.1. Grundlagen	19
2.2. Hecke-Operatoren	22
3. Multiple Zeta-Werte	25
3.1. Grundlagen	25
3.2. Doppel Zeta-Werte	28
4. Multiple Eisensteinreihen	31
4.1. Grundlagen	31
4.2. Modularität I: Transformationsverhalten	34
4.3. Fourierentwicklung I	37
4.4. Partialbruchzerlegungen	42
4.5. Fourierentwicklung II	49
4.6. Doppel Eisensteinreihen	56
4.7. Die Doppel Eisensteinreihen im nicht-konvergenten Fall	59
4.8. Triple Eisensteinreihen	63
4.9. Modularität II: Doppel und Triple Eisensteinreihen	65
4.10. Die Multiplen Eisensteinreihen $G_{2,\dots,2}$	75
4.11. Neue Identitäten für die τ -Funktion	78
5. Verallgemeinerte Teilersummenfunktionen	85
5.1. Definition und Beispiele	85
5.2. Erzeugendenreihen	88
5.3. Die Teilersummen $\sigma_{1,\dots,1}(n)$	93
Ausblick	97

Inhaltsverzeichnis

A. Einführung in Multiple Zeta-Werte	101
A.1. Werte der Riemannschen Zeta-Funktion	101
A.2. Multiple Zeta-Werte	104
A.3. Hoffman Algebra & Polylogarithmen	106
A.4. Doppel Zeta-Werte	111
B. Periodenpolynome und Hecke-Operatoren	117
B.1. Periodenpolynome	117
B.2. Hecke-Operatoren auf Periodenpolynomen	119
C. Mathematica Code	127
Literaturverzeichnis	133
Eidesstattliche Erklärung	134

Einleitung

In dieser Arbeit wird der Zusammenhang von Modulformen zur vollen Modulgruppe mit Multiplen Zeta-Werten durch Multiple Eisensteinreihen untersucht. Damit ordnet sich diese Arbeit in die Analytische Zahlentheorie und Kombinatorik ein.

Modulformen sind holomorphe Funktionen auf der oberen komplexen Halbebene, die unter der Wirkung von $SL_2(\mathbb{Z})$ durch Möbiustransformationen bestimmte Funktionalgleichungen erfüllen. Insbesondere gilt für eine Modulform f , dass $f(\tau+1) = f(\tau)$ und diese somit eine Fourierreihe besitzt. Die Koeffizienten dieser Reihen sind arithmetisch interessante Objekte, wodurch Modulformen eine Verbindung zur Analytischen Zahlentheorie besitzen.

Die nach dem deutschen Mathematiker G. EISENSTEIN¹ benannten Eisensteinreihen sind hierbei die einfachsten Beispiele. Für ein gerades $k > 2$ sind diese definiert durch

$$G_k(\tau) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} = \zeta(k) + \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}.$$

Die zweite Darstellung ist dabei die Fourierreihe und die Koeffizienten sind die gewöhnlichen Teilersummenfunktionen $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$. Eines der klassischen Resultate in der Theorie der Modulformen ist, dass die Eisensteinreihen die wesentlichen Bausteine aller Modulformen sind und sich jede Modulform als polynomialer Ausdruck in gewöhnlichen Eisensteinreihen darstellen lässt. Da der konstante Term der Eisensteinreihe zum Gewicht k der Riemannsche Zeta-Wert $\zeta(k)$ ist, ergibt sich der Zusammenhang zu Zeta-Werten. Multiple Zeta-Werte sind eine natürliche Verallgemeinerung der Riemannschen Zeta-Werte. Dabei sind diese für natürliche $s_1, \dots, s_l$ mit $s_1 > 1$ und $s_i \geq 1$ für $i > 1$ definiert durch

$$\zeta(s_1, \dots, s_l) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}}.$$

In den Fällen $l = 2$ und $l = 3$ spricht man auch von Doppel bzw. Triple Zeta-Werten. Diese wurden schon von L. EULER² in einigen Spezialfällen untersucht,

¹Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (*16. April 1823 - †11. Oktober 1852).

²Leonhard Euler (*15. April 1707 - †18. September 1783).

Einleitung

sind aber insbesondere in den letzten Jahrzehnten von immer größerem Interesse gewesen, da sie unter anderem in der theoretischen Physik bei der Berechnung von Feynman Diagrammen ([BK97]), in der algebraischen Geometrie als Perioden bestimmter Modulräume ([GM02],[Bro11]) und in vielen weiteren Bereichen, wie z.B. der Zahlentheorie auftauchen ([Zag94], [Mic]).

Die Multiplen Zeta-Werte erfüllen eine Reihe von Relationen aufgrund der Tatsache, dass sie sich nicht nur als Summen darstellen lassen, sondern auch durch iterierte Integrale. Es lässt sich leicht zeigen, dass man dadurch zwei unterschiedliche Darstellungen für das Produkt von zwei Multiplen Zeta-Werten als Linearkombination von anderen Multiplen Zeta-Werten erhält. Die so entstehende Relation wird Doppel Shuffle Relation genannt. Man erhält beispielsweise für das Produkt $\zeta(2) \cdot \zeta(3)$ folgende Identität:

$$\zeta(2, 3) + 3\zeta(3, 2) + 6\zeta(4, 1) = \zeta(2) \cdot \zeta(3) = \zeta(2, 3) + \zeta(3, 2) + \zeta(5), \quad (0.1)$$

wobei die rechte Seite durch die Darstellung als Summe und die linke Seite durch die Darstellung durch iterierte Integrale entsteht. Es ist von großem Interesse, alle Relationen, die zwischen Multiplen Zeta-Werten bestehen zu verstehen und eine Vermutung ist (siehe [Hof97] bzw. A.3.6), dass alle Relationen über eine kleine Modifikation des obigen Verfahrens entstehen.

Die Arbeit „Double Zeta Values and modular forms“ ([GKZ06]) von H. Gangl, M. Kaneko und D. Zagier war die Motivation für diese Masterarbeit. In ihrer Arbeit führen Gangl, Kaneko und Zagier Doppel Eisensteinreihen ein, die als Kombination der Doppel Zeta-Werte und den gewöhnlichen Eisensteinreihen angesehen werden kann. Für $s_1 \geq 3$, $s_2 \geq 2$ wird die Doppel Eisensteinreihe definiert durch

$$G_{s_1, s_2}(\tau) = \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \\ m \succ n \succ 0}} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2}}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

wobei $\succ$ eine totale Ordnung auf dem Gitter $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ ist, und $m \succ n$ anschaulich nichts anderes bedeutet als „ m liegt rechts oben von n “, sofern man sich $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ als Punktmenge in der komplexen Ebene vorstellt.

In ihrer Arbeit berechnen Gangl, Kaneko und Zagier die zugehörige Fourierreihe und zeigen, dass man über diese die Definition der Doppel Eisensteinreihe für den Fall $s_1 \geq 2$, $s_2 \geq 1$ erweitern kann, so dass diese auch die Doppel Shuffle Relationen erfüllen, d.h. dass z.B. insbesondere die analoge Relation (0.1) für die zugehörigen Doppel Eisensteinreihen gilt:

$$G_5(\tau) = 2G_{3,2}(\tau) + 6G_{4,1}(\tau). \quad (0.2)$$

In den Fourierreihen der Doppel Eisensteinreihen tauchen, neben den gewöhnlichen Teilersummen, auch Verallgemeinerungen der Teilersummen auf, die für natürliche Zahlen $s_1, \dots, s_l$ wie folgt gegeben sind:

$$\sigma_{s_1, \dots, s_l}(n) = \sum_{\substack{u_1 v_1 + \dots + u_l v_l = n \\ u_1 > \dots > u_l > 0}} v_1^{s_1} \cdot \dots \cdot v_l^{s_l}.$$

Es zeigt sich, dass man durch die Doppel Shuffle Relationen eine Vielzahl von Relationen zwischen den verallgemeinerten Teilersummen für $l = 1, 2$ und den Fourierkoeffizienten von Modulformen erhält. Beispielsweise ergibt die obige Relation (0.2) durch Koeffizientenvergleich folgende Identität:

$$\sigma_4(n) + 12\sigma_3(n) = (12 + n)\sigma_2(n) + 24(\sigma_{2,1}(n) + \sigma_{3,0}(n)).$$

In ihrer Arbeit bringen Gangl, Kaneko und Zagier (und Kaneko zusätzlich noch in seinen Arbeiten [Kan11] und [Kan04]) die Doppel Zeta-Werte in Verbindung mit Periodenpolynomen von Modulformen. Neben der Erweiterung, die wir in dieser Arbeit wählen, sei daher noch die Arbeit von Koji Tasaka (Kyushu University) erwähnt, der sich in seiner Promotion mit einer analogen Verbindung von Periodenpolynomen zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(2)$ und „Doppel Eisensteinreihen zum Level 2“ beschäftigt (siehe [KT11], [Tas11]).

Wir wählen in dieser Arbeit eine andere Richtung und behandeln, statt dem „Doppel“-Fall, den „Triple“ bzw. allgemein den „Multiplen“-Fall und bleiben bei der vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Der Fall der Triple Eisensteinreihen wurde dabei schon von M. Kaneko und T. Tanaka (Kyoto University) betrachtet, aber nicht weiter ausgeführt. Unter Multiplen Eisensteinreihen verstehen wir dabei, analog zur Definition der Doppel Eisensteinreihe, folgende Reihe:

$$G_{s_1, \dots, s_l}(\tau) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_l \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \\ n_1 > \dots > n_l > 0}} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}}.$$

Der Fall $l = 3$, also dem Fall der Triple Eisensteinreihen, schenken wir dabei besonderes Interesse. Zusammenfassend werden in dieser Arbeit unter anderem folgende eigenständige Ergebnisse erzielt:

- (i) Neben der Definition von Multiplen Eisensteinreihen und der Untersuchung des Transformationsverhalten unter Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ werden wir eine Konstruktion angeben, die es ermöglicht, für eine beliebige Multiple Eisensteinreihe $G_{s_1, \dots, s_l}$ mit $s_i \geq 3$ die zugehörige Fourierreihe zu berechnen. Wir werden folgenden Satz herleiten:

Satz. Für $s_1, \dots, s_l > 2$ hat die Fourierreihe von $G_{s_1, \dots, s_l}$ die Gestalt

$$G_{s_1, \dots, s_l} = \zeta(s_1, \dots, s_l) + \sum_{n>0} a_n q^n,$$

mit

$$a_n = \sum_{\substack{1 \leq j \leq l \\ a_1 + \dots + a_l = s_1 + \dots + s_l}} \alpha_j^{a_1, \dots, a_l} \cdot (\pi i)^{a_1 + \dots + a_j} \cdot \sigma_{a_1-1, \dots, a_j-1}(n) \cdot \zeta(a_{j+1}, \dots, a_l),$$

wobei sich die $\alpha_j^{a_1, \dots, a_l} \in \mathbb{Q}$ algorithmisch berechnen lassen.

Die zu diesem Satz führende Konstruktion werden wir benutzen, um explizit die Fourierreihe der Triple Eisensteinreihen anzugeben, für die wir einige Beispiele berechnen. Als einfachstes Beispiel erhalten wir:

$$\begin{aligned} G_{4,4,4}(\tau) &= \zeta(4, 4, 4) \\ &+ \frac{(2\pi i)^{12}}{3!^3} \sum_{n>0} \left(-\frac{1}{14784} \sigma_1(n) + \frac{1}{17920} \sigma_3(n) \right) q^n \\ &+ \frac{(2\pi i)^{12}}{3!^3} \sum_{n>0} \left(\frac{1}{84} (\sigma_{1,3}(n) + \sigma_{3,1}(n)) + \frac{1}{48} \sigma_{3,3}(n) + \sigma_{3,3,3}(n) \right) q^n. \end{aligned} \tag{0.3}$$

- (ii) Um die Fourierreihe von Multiplen Eisensteinreihen zu berechnen, benötigen wir eine allgemeine Formel für die Partialbruchzerlegung bestimmter rationaler Funktionen. Wir werden daher im vierten Kapitel zeigen, dass für paarweise verschiedene natürliche Zahlen $n_1, \dots, n_l$ gilt:

$$\frac{1}{(x + n_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x + n_l)^{s_l}} = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = k \\ 1 \leq e \leq l}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^l \frac{\binom{k_j-1}{s_j-1}}{(n_e - n_j)^{k_j}} \right) \frac{(-1)^{k-s_e}}{(x + n_e)^{k_e}}.$$

Diese Formel wird für den Fall $l = 2$ in [GKZ06] ohne einen Beweis angegeben. Diesen werden wir in dieser Arbeit mit elementaren Methoden angeben, um damit induktiv den oben aufgeführten allgemeinen Fall herzuleiten.

- (iii) Wie oben erwähnt, erhält man durch die Doppel Shuffle Relationen von Doppel Eisensteinreihen Identitäten zwischen Fourierkoeffizienten von Modulformen und verallgemeinerten Teilersummen. Für den Fall der Spitzenform Δ werden wir auf diese Weise für die zugehörigen Fourierkoeffizienten, die Ramanujansche tau-Funktion $\tau(n)$, Formeln herleiten. Dazu werden wir allgemeine Überlegungen anstellen, wann Linearkombinationen von Triple bzw. Doppel Eisensteinreihen modular sind. Ein triviales Beispiel für eine Modulform vom Gewicht 12 bildet dabei (0.3). Durch Koeffizientenvergleich und mit Hilfe der

Theorie der Multiplen Eisensteinreihen leiten wir unter anderem folgende Darstellung von $\tau(n)$ her:

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot \tau(n) = & -2^3 \cdot 139 \cdot 691 \cdot \sigma_1(n) + 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 691 \cdot \sigma_3(n) \\ & - 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 691 \cdot n \cdot \sigma_3(n) + 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 691 \cdot \sigma_5(n) \\ & - 2 \cdot 11 \cdot 691 \cdot \sigma_7(n) + 3^2 \cdot \sigma_{11}(n) \\ & - 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 691 \cdot \sigma_{3,3,3}(n), \end{aligned}$$

aus der sich mehrere Kongruenzen zwischen der τ -Funktion und einfachen Teilersummen ergeben, wie z.B. die beiden bekannten Identitäten $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$, $\tau(n) \equiv n\sigma_3(n) \pmod{7}$, aber auch z.B.:

$$184\tau(n) \equiv 120\sigma_1(n) + (16n - 63)\sigma_3(n) - 56\sigma_5(n) + 158\sigma_7(n) + 9\sigma_{11}(n) \pmod{512}.$$

- (iv) Da die Summe in der Definition der Triple Eisensteinreihen G_{s_1, s_2, s_3} nur für $s_1, s_2, s_3 > 2$ absolut konvergiert, werden wir mit Hilfe von Identitäten zwischen verallgemeinerten Teilersummen eine Definition für die Eisensteinreihe $G_{2,2,2}$ angeben, die die gleichen Relationen erfüllt wie der zugehörige Zeta-Wert $\zeta(2, 2, 2)$. Darüber hinaus werden wir eine numerisch gestützte Vermutung aufstellen, wie analoge Erweiterungen für $G_{2, \dots, 2}$ aussehen müssten. Um die benötigten Identitäten zwischen verallgemeinerten Teilersummen zu erhalten, werden wir Erzeugendenreihen für diese herleiten und in Verbindung mit Ergebnissen aus [SR] bringen.
- (v) Mit Hilfe von Hecke-Operatoren auf Periodenpolynomen werden wir im Anhang zusätzlich eine Formel für $\tau(n)$ angeben, die Ähnlichkeit mit den oben erwähnten Formeln durch verallgemeinerte Teilersummen hat.
- (vi) Im Anhang werden wir eine dokumentierte Mathematica Implementierung angeben, mit deren Hilfe man die Fourierreihen von Doppel als auch Triple Eisensteinreihen berechnen kann.

Neben diesen Ergebnissen werden zusätzlich einige Rechnungen und kombinatorische Überlegungen, die in [GKZ06], [Kan11] oder [Kan04] ohne Beweis angegeben werden, ausgeführt.

Zusammenfassend werden wir im Ausblick später sehen, dass die in dieser Arbeit behandelten Resultate scheinbar nur die Anfänge einer allgemeinen Theorie sind. Die Multiplen Eisensteinreihen liefern neue arithmetische und analytische Aspekte in der Theorie Multipler Zeta-Werte, über die bisher noch sehr wenig bekannt ist. Da die Multiplen Eisensteinreihen analytische Funktionen sind, erhält man einen großen Fundus an Werkzeugen, wie z.B. die Funktionentheorie und die Theorie von Modulformen, um Relationen zwischen Multiplen Zeta-Werten zu untersuchen.

Aufbau

Im *ersten Kapitel* werden wir die benötigten *Grundlagen* einführen und klassische Begriffe wie die Riemannsche Zeta-Funktion und Bernoulli-Zahlen wiederholen.

Das *zweite Kapitel* stellt die nötigen Begriffe aus der Theorie von *Modulformen* dar. Neben der Definition von (quasi-) Modulformen, Spitzenformen, Δ -Funktion, τ -Funktion und Hecke-Operatoren werden Standard Resultate, wie z.B. die Multiplikativität von τ angegeben.

Die *Multiplen Zeta-Werte* werden im *dritten Kapitel* eingeführt. Des Weiteren werden die für die Arbeit nötigen Begriffe und Sätze aufgeführt.

Der Hauptteil der Arbeit, das *vierte Kapitel*, behandelt die *Multiplen Eisensteinreihen*. Nach der Definition und einem kleinen Abschnitt über das Transformationsverhalten unter der Wirkung von $SL_2(\mathbb{Z})$, geben wir eine Konstruktion zur Berechnung der Fourierreihe für die Multiplen Eisensteinreihen $G_{s_1, \dots, s_l}$ für $s_i > 2$ an. Dabei werden wir zunächst einige allgemeine kombinatorische Überlegungen anstellen und eine Formel für die Partialbruchentwicklung von $(x + n_1)^{-s_1} \cdot \dots \cdot (x + n_l)^{-s_l}$ herleiten. Wir zeigen, dass sich damit, analog zum Fall der klassischen Eisensteinreihe, die Fourierreihe der Multiplen Eisensteinreihe mit der Lipschitzformel berechnen lässt. Dies werden wir explizit im Fall $l = 2, 3$ machen, bzw. die Resultate aus [GKZ06] für den Fall der Doppel Eisensteinreihen angeben. Am Ende des Abschnittes über Triple Eisensteinreihen werden wir den Fall der Multiplen Eisensteinreihen $G_{2, \dots, 2}$ betrachten und eine Definition von $G_{2,2,2}$ mit Hilfe von Identitäten zwischen verallgemeinerten Teilersummen herleiten. Danach werden wir uns damit beschäftigen, wann Linearkombinationen von Doppel und Triple Eisensteinreihen modular sind. Aus diesen Überlegungen werden wir am Ende des Kapitels einige Formeln für $\tau(n)$ angeben.

Die in den Fourierkoeffizienten auftauchenden *verallgemeinerten Teilersummen* werden wir im *fünften Kapitel* genauer betrachten. Dazu werden wir sie in Verbindung mit Partitonen bringen und Erzeugendensreihen berechnen. Mit diesen werden wir zusätzliche Relationen herleiten und wir werden sehen, wie Relationen zwischen verallgemeinerten Teilersummen mit Identitäten zwischen Eulerschen Polynomen zusammenhängen.

Zum Abschluss werden wir im *sechsten Kapitel* einen *Ausblick* geben, in welche Richtung man die in den vorherigen Kapiteln besprochenen Konzepte fortführen könnte.

Der *Anhang A* beinhaltet eine Einführung in Multiple Zeta-Werte, die im zugehörigen Vorbereitungsprojekt dieser Arbeit entstanden ist.

Anhang B enthält einen Überblick über Periodenpolynome und Hecke-Operatoren auf Periodenpolynomen. Wir leiten dort eine Formel für $\tau(n)$ her, die Ähnlichkeiten mit den Formeln hat, die mit Hilfe der Theorie von Multiplen Eisensteinreihen hergeleitet wurden.

Im *Anhang C* geben wir einen dokumentierten Mathematica Code an, um die Fourierreihe sowohl von Doppel als auch Triple Eisensteinreihen zu berechnen.

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Prof. Ulf Kühn für seine engagierte und hilfreiche Betreuung bedanken. Ihm habe ich es zu verdanken, dass ich mich in meinem Studium zunächst mit Modulformen und später mit der Theorie von Multiplen Zeta-Werten beschäftigen konnte. Zusätzlich danke ich Frau Dr. Anna Posingies, die sich Zeit für die Zweitbegutachtung dieser Arbeit genommen hat und deren Vorträge und Arbeit als Tutorin es mir ermöglichten, während meines Studiums ein besseres Verständnis von Modulformen zu erlangen.

Mein Dank gilt zudem Matthias Bargmann, der mich die letzten Jahre des Studiums begleitet und mich bei einigen Berechnungen in dieser Arbeit unterstützt hat.

Für das Korrekturlesen dieser Arbeit bedanke ich mich außerdem bei meiner Schwester Inger Maleen Bachmann, Tobias Rohde, Benjamin Göbel und vor allem bei meiner Freundin Marlene Kirchner, die mir neben der Korrektur auch während des gesamten Studiums großen Beistand geleistet hat.

Zudem danke ich meinen Eltern, die mir das Studium ermöglicht haben und mich in den letzten Jahren nicht nur finanziell nach allen Kräften unterstützt haben.

Prof. Don Zagier und Prof. Herbert Gangl danke ich zudem für hilfreiche Gespräche während des Workshops über Multiple Zeta-Werte in Bristol.

I would also like to thank Prof. Masanobu Kaneko and Koji Tasaka for the inspiring talks in Bristol and Tatsushi Tanaka for his help and his calculations on triple Eisenstein series:

ヘルプ有難うございました

1. Grundlagen

1.1. Notationen

In dieser Arbeit benutzen wir die üblichen Schreibweisen

$$\mathbb{H} = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

für die obere Halbebene und $q := q(\tau) = e^{2\pi i \tau}$ für $\tau \in \mathbb{H}$.

Werden Summen über Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe anderer Zahlen betrachtet, wird stets angenommen, dass die Summanden ≥ 1 sind, d.h. es gilt stets

$$\sum_{\substack{a_1 + \dots + a_n = k \\ a_i > 0}} = \sum_{a_1 + \dots + a_n = k}.$$

Mit Σ_n bezeichnen wir die n -te Permutationsgruppe und mit $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Delta.

Es wird zudem vorkommen, dass wir $*$ als Platzhalter für natürliche Zahlen benutzen, die unterschiedliche Werte annehmen können. So meinen wir z.B. mit „Wir können die $\Psi_{*,*}$ durch rationale Linearkombinationen von Ψ_* darstellen.“, dass es für alle natürlichen Zahlen a, b für die $\Psi_{a,b}$ definiert ist, rationale Zahlen $\lambda_j \in \mathbb{Q}$, $1 \leq j \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $\Psi_{a,b} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \Psi_j$.

In den späteren Abschnitten werden wir Identitäten erhalten, die nur bis zu einer gewissen Größe numerisch verifiziert wurden. Wir kennzeichnen diese Identitäten durch „ $\stackrel{!}{=}$ “.

Ist $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, so benutzen wir folgende Bezeichnung

$$Df = f' := \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{d\tau} = q \frac{df}{dq} = \sum_{n \geq 0} n a_n q^n.$$

1.2. Riemannsche Zeta-Funktion

Da in der Theorie der Zeta-Funktionen einige andere Funktionen und Zahlen aus der Analysis auftreten, werden diese zunächst wiederholt. Wir richten uns dabei nach [EF06],[Kön04] und [Dra].

Definition 1.2.1. Das Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

stellt eine holomorphe Funktion in der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ dar und wird *Gamma Funktion* genannt.

Die Gammafunktion kann man sich als eine Art analytische Fortsetzung der Fakultät vorstellen, welche nur für natürliche Zahlen definiert ist, da gilt:

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

In obiger Form ist die Gamma Funktion nur für $\operatorname{Re}(z) > 0$ definiert. Man erhält aber eine meromorphe Fortsetzung in die gesamte komplexe Ebene:

Satz 1.2.2. Die Gamma Funktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf die gesamte komplexen Ebene, die durch folgende Integraldarstellung gegeben ist:

$$\Gamma(z) = \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt + \sum_{p=0}^\infty \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{z+p}.$$

Beweis. Siehe [Dra] oder [EF06] S. 440. □

Es wurde hier das Integral $\int_0^\infty$ aus der Definition in einen holomorphen Anteil $\int_1^\infty$ und einen meromorphen Anteil $\int_0^1$ aufgeteilt. Der zweite Teil ergibt sich durch Umformung zu der gegebenen Summe, welche die Pole an den Stellen $0, -1, 2, \dots$ liefert.

Definition 1.2.3. Die n -te Bernoulli-Zahl B_n ist definiert als Koeffizient folgender Taylorreihe:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Das k -te Bernoulli-Polynom wird definiert durch

$$B_k(X) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} B_r X^{k-r}.$$

1.2. Riemannsche Zeta-Funktion

Die ersten Werte sind $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$ und $B_{2k+1} = 0$ für $k > 0$.

Bernoulli-Zahlen und Polynome finden sich in vielen Bereichen der Mathematik wieder. Wir zitieren folgende klassische Aussage, die wir im späteren Abschnitt benötigen:

Proposition 1.2.4. (*Faulhabersche Formel*) Für $n, p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{B_{p+1}(n) - B_{p+1}}{p+1} = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}.$$

Beweis. Siehe [Kön04] S. 291. □

Zudem treten Bernoulli-Zahlen im Folgenden in der meromorphen Fortsetzung und in einigen Werten an ganzzahligen Stellen folgender Funktion auf:

Definition 1.2.5. Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ wird die *Riemannsche Zeta-Funktion* definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^s}.$$

Für sie hat man mit Hilfe der eindeutigen Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen und der geometrischen Reihe die analoge Darstellung

$$\zeta(s) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots \right) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Dies nennt man auch das Eulerprodukt von ζ . Wir werden in dieser Arbeit $\zeta(s)$ nur für natürliche s betrachten. Zur Vollständigkeit geben wir in diesem Abschnitt einige klassische Resultate zur Zetafunktion an, da ähnliche Resultate auch für die Multiple Zeta-Funktion existieren (siehe z.B. [Zha00], [AET]), worauf wir in dieser Arbeit aber nicht eingehen werden.

Lemma 1.2.6. Für $\operatorname{Re}(z) > 1$ gilt

$$\Gamma(z) \cdot \zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Beweis. Es ist $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$. Setzt man im Integral $t = ns$ für $n \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\frac{\Gamma(z)}{n^z} = \int_0^\infty s^{z-1} e^{-ns} ds.$$

1. Grundlagen

Durch Summation auf beiden Seiten über n erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) \cdot \zeta(z) &= \sum_{n>0} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt} dt \\ &= \int_0^\infty t^{z-1} \sum_{n>0} (e^{-t})^n dt \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe des Lemmas gelangt man an die meromorphe Fortsetzung der Zeta-Funktion:

Satz 1.2.7. *Die Riemannsche Zeta-Funktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die gesamte komplexe Ebene durch*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{s+k-1} + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right).$$

Beweis. Mit dem Lemma 1.2.6 ist

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right).$$

Das zweite Integral konvergiert absolut und stellt eine ganze Funktion dar. Bei dem ersten Integral kann man die Definition der Bernoulli-Zahlen benutzen und $\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k B_k \frac{x^{k+s-2}}{k!}$ setzen. Man erhält

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \sum_{k \geq 0} (-1)^k B_k \frac{x^{k+s-2}}{k!} dx + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k B_k \frac{1}{k!(k+s-1)} + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{s+k-1} + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right).\end{aligned}$$

□

1.3. Klassische Eisensteinreihen

Im Folgenden werden bekannte Ergebnisse aus der Analysis wiederholt und die Fourierreihe der klassischen Eisensteinreihen hergeleitet, da diese Methoden später für die Fourierreihenentwicklung der Multiplen Eisensteinreihen benötigt werden.

In der Analysis erhält man für die Partialbruchzerlegung und die Fourierreihe von $\pi \cot(\pi\tau)$ folgende Darstellung:

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau - d} + \frac{1}{\tau + d} \right) = \pi \cot(\pi\tau) = -\pi i - 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} q^m.$$

(Siehe z.B. [Zag08] S. 16).

Leitet man beide Seiten $k - 1$ mal ab, erhält man:

Proposition 1.3.1. (*Lipschitz Summationsformel*) Für $k > 1$ gilt:

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau + d)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} q^m.$$

Beweis. Den Beweis einer allgemeineren Formel diesen Typs findet sich in [PP01] oder auch wieder in [Zag08]. $\square$

Die klassische Eisensteinreihe vom Gewicht k wird definiert durch

$$G_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}. \quad (1.1)$$

Es gibt verschiedene Konventionen bezüglich der Normierung der Eisensteinreihen. Das hier definierte G_k entspricht dabei dem G_k in [Zag08], wobei hingegen in [DS05] und [Ser77] das G_k ohne den Faktor $\frac{1}{2}$ definiert ist.

Aufteilen in die Terme $m = 0$ und $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$ liefert für gerade k :

$$G_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^k} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} \right).$$

Mit 1.3.1 erhalten wir:

$$\begin{aligned} G_k(\tau) &= \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^{mn} \\ &= \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n, \end{aligned}$$

wobei $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ die Teilersummenfunktion ist.

2. Modulformen

Dieser Abschnitt soll die grundlegenden Begriffe über Modulformen einführen, die wir im späteren Verlauf der Arbeit benötigen werden. Alle folgenden Aussagen sind klassische Resultate, die sich in fast jeder Einführung zu Modulformen finden. Wir richten uns dabei größtenteils nach [Ser77],[Zag08],[Lan95] und [DS05]. Nach der Definition von Modulformen und grundlegenden Aussagen wiederholen wir kurz die Theorie der Hecke-Operatoren und gehen im dritten Teil auf Periodenpolynome ein. Diese besitzen eine Beziehung zu Relationen zwischen Doppel Zeta-Werten, auf welche wir im Abschnitt 3.2.3 eingehen.

2.1. Grundlagen

Definition 2.1.1. (Slash-Operator) Der k -te Slash-Operator ist für ein $k \in \mathbb{Z}$ eine Gruppenwirkung von $\mathbb{Z}[M_2(\mathbb{Z})]$ auf der Menge $\text{Abb}(\mathbb{H}, \mathbb{C})$, gegeben auf den Erzeugern $\gamma \in M_2(\mathbb{Z})$ durch

$$f|_k \gamma(x) := \det(\gamma)^{\frac{k}{2}} (cx + d)^{-k} f\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right).$$

Durch lineare Fortsetzung erhält man hiermit eine Wirkung von $\mathbb{Z}[M_n(\mathbb{Z})]$.

Definition 2.1.2. (Modulform) Eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ heißt *Modulform* vom Gewicht k , falls für ein $k \in \mathbb{N}$ und für alle $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$f|_k \gamma = f$$

und f zusätzlich eine Fourierreihenentwicklung der Form $f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ hat. Gilt dabei $a_0 = 0$, so heißt f *Spitzenform*.

Die Menge aller Modulformen vom Gewicht k wird mit M_k bezeichnet, die Menge aller Spitzenformen vom Gewicht k mit S_k und die Menge aller Modulformen mit $M_* := \bigoplus_{k > 0} M_k$. Die Menge der Modulformen vom Gewicht k mit rationalen Fourierkoeffizienten bezeichnen wir mit $M_k^{\mathbb{Q}}$.

Die Eisensteinreihen G_k in (1.1) auf Seite 17 sind für gerade $k > 2$ Modulformen vom Gewicht k (siehe z.B. [Ser77] S. 83). Dass sie modular transformieren, werden wir in

2. Modulformen

Abschnitt 4 sehen, wenn wir allgemein das modulare Transformationsverhalten von Multiplen Eisensteinreihen betrachten.

Die Eisensteinreihen G_4 und G_6 spielen eine besondere Rolle, da sie den Ring aller Modulformen erzeugen und somit gilt $M_* = \mathbb{C}[G_4, G_6]$ (siehe [Zag90] S. 19 Satz 4). Anhand der Definition wird offensichtlich, dass es keine nicht triviale Modulform vom ungeraden Gewicht geben kann, da $-E \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, wobei E die 2×2 -Einheitsmatrix bezeichnet. Damit wird die Bedingung $f|_{k-E} = f$ zu:

$$f\left(\frac{-1 \cdot \tau + 0}{0 \cdot \tau - 1}\right) = f(\tau) \stackrel{!}{=} (-1)^k f(\tau)$$

und somit muss k ungerade sein oder f ist identisch Null.

Ein weiteres klassisches Resultat ist, dass der $\mathbb{C}$ -Vektorraum M_k endlichdimensional ist und man die Dimension leicht anhand des Gewichtes berechnen kann:

Proposition 2.1.3. *Für die Dimension von M_k gilt:*

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_k) = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor, & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Der Beweis benutzt dabei Resultate aus der Funktionentheorie (Residuensatz). Er findet sich in [Ser77] auf S. 88. $\square$

Somit zeigt sich, dass erst ab $k = 12$ nicht triviale Spitzenformen existieren. Aus der Definition der Spitzenformen ergibt sich zudem, dass $M_k = \mathbb{C}G_k \oplus S_k$, da man von einer beliebigen Modulform vom Gewicht k ein Vielfaches von G_k abziehen kann, um so einen verschwindenden konstanten Fourierkoeffizienten zu erhalten.

k	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	...
$\dim_{\mathbb{C}}(M_k)$	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	...

Die erste auftretene Spitzemform bei $k = 12$ ist folgende Funktion:

Definition 2.1.4. Die *Delta-Funktion* (oder auch *Diskriminante* genannt) ist definiert durch

$$\Delta(\tau) = q \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

Δ ist eine Spitzenform vom Gewicht 12 (siehe [Ser77] S. 95), ihre Fourierkoeffizienten werden mit $\tau(n)$ bezeichnet und *Ramanujansche tau-Funktion* genannt.

Für ihre ersten Werte erhält man:

$$\begin{aligned}\Delta(\tau) &= \sum_{n>0} \tau(n)q^n \\ &= q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 - 16744q^7 + 84480q^8 + \dots\end{aligned}$$

Wir werden in den späteren Teilen dieser Arbeit unter anderem Formeln für die $\tau(n)$ herleiten, indem wir Δ als Linearkombination von Multiplen Eisensteinreihen schreiben. Im nächsten Kapitel werden wir mit Hilfe der Theorie der Hecke-Operatoren zeigen, dass die $\tau(n)$ multiplikativ sind.

In der Definition der Eisensteinreihe G_k muss $k > 2$ sein, damit die Reihe absolut konvergiert. Definiert man G_k aber über ihre Fourierentwicklung

$$G_k(\tau) = \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n,$$

so existiert diese auch für $k = 2$ und für ungerade k . Schreiben wir im Folgenden G_k mit $k = 2$ oder k ungerade, so meinen wir damit diese Darstellung.

G_2 ist keine Modulform, da sich zeigen lässt, dass sie unter der Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nicht entsprechend transformiert, sondern stattdessen folgendes gilt:

$$G_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 G_2(z) - \pi ic(cz+d), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

(Siehe [Zag90] S. 19, Formel (19)).

Die Eisensteinreihe G_2 nimmt dennoch einen wichtigen Platz in der Theorie der Modulformen ein. So kann man zum Beispiel obige Transformationseigenschaft benutzen um zu zeigen, dass Δ eine Modulform ist.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir alle G_k für $k \geq 2$ betrachten und führen dazu noch folgenden Begriff ein:

Definition 2.1.5. Der *Ring der Quasi-Modulformen* ist gegeben durch $\tilde{M}_* := \mathbb{C}[G_2, G_4, G_6]$.

Diese versehen wir mit der zu erwartenden Graduierung und bezeichnen mit $\tilde{M}_k$ die Quasi-Modulformen vom Gewicht k .

Satz 2.1.6. $\tilde{M}_*$ ist abgeschlossen unter $D = q \frac{d}{dq}$ und es gilt:

$$\begin{aligned}G'_2 &= \frac{1}{12\zeta(2)} \left(G_2^2 - \frac{5}{2}G_4 \right), \\ G'_4 &= \frac{1}{3\zeta(2)} \left(G_2 \cdot G_4 - \frac{7}{4}G_6 \right), \\ G'_6 &= \frac{1}{2\zeta(2)} \left(G_2 \cdot G_6 - \frac{10}{7}G_4^2 \right).\end{aligned}$$

Beweis. Siehe [Zag90] S. 49. Dort werden die Identitäten für die normierte Version der Eisensteinreihen $E_k := \zeta(k)^{-1}G_k$ angegeben, welche wir in dieser Arbeit aber nicht betrachten. $\square$

2.2. Hecke-Operatoren

Hecke-Operatoren sind Vektorraumendomorphismen $M_k \rightarrow M_k$, die 1935 von E. HECKE¹ eingeführt wurden und einen wichtigen Teil in der Theorie der Modulformen darstellen. Wir werden uns in diesem Abschnitt weitestgehend nach [Ser77] richten.

Definition 2.2.1. (Hecke-Operator) Sei $f \in M_k$. Dann ist für ein $n \in \mathbb{N}$ der *Hecke-Operator* $T_n : M_k \rightarrow M_k$ definiert durch

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{A \in M_n} f|_A,$$

wobei

$$M_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Z}) \mid a \geq 1, ad = n, 0 \leq b \leq d \right\}.$$

Proposition 2.2.2. (Eigenschaften von T_n auf M_k) Sei $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k$ und $1 < m, n \in \mathbb{N}$ mit $ggT(m, n) = 1$ und p prim. Dann gilt für die Hecke-Operatoren:

$$\begin{aligned} i) \quad T_m T_n f &= T_{m \cdot n} f, \\ ii) \quad T_{p^n} T_p f &= T_{p^{n+1}} f + p^{k-1} T_{p^{n-1}} f. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [Ser77] S. 101, Prop. 11. □

Proposition 2.2.3. (Fourierkoeffizienten von $T_n f$) Für $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Fourierkoeffizienten von $T_n f = \sum_{m \geq 0} \gamma_m q^m$:

$$\begin{aligned} i) \quad \gamma_m &= \sum_{d \mid ggT(m, n)} d^{k-1} a_{\frac{m \cdot n}{d^2}}, \\ ii) \quad \gamma_0 &= \sigma_{k-1}(n) \cdot a_0, \\ iii) \quad \gamma_1 &= a_n. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [Ser77] S. 101, Prop. 12. □

Definition 2.2.4. (Eigenform) Eine Modulform $0 \neq f \in M_k$, die zu T_n Eigenfunktion für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, heißt *Eigenform*. Gilt zusätzlich $a_1(f) = 1$, so heißt f eine *normierte Eigenform*.

Proposition 2.2.5. (Multiplikativität) Ist $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k$ eine normierte Eigenform, dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $ggT(m, n) = 1$:

$$a_{m \cdot n} = a_m \cdot a_n.$$

¹Erich Hecke (* 20. September 1887 - †13. Februar 1947).

Beweis. Siehe [Ser77] S. 102, Cor. 12. □

Proposition 2.2.6. (*Petersson Skalarprodukt*) Sind $f, g \in S_k$, so wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathcal{F}} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2}$$

ein hermitesches Skalarprodukt auf S_k definiert, wobei

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Satz 2.2.7. (*Selbstadjungiertheit der T_n*) Die Hecke-Operatoren sind selbstadjungiert bezüglich des Petersson Skalarproduktes, d.h. $\forall f, g \in S_k$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\langle T_n f, g \rangle = \langle f, T_n g \rangle.$$

Beweis. Siehe [MK07] S. 233. □

Wir erinnern an dieser Stelle an zwei Resultate aus der linearen Algebra:

Lemma 2.2.8. Ist $V \neq 0$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum und $\mathcal{A}$ eine kommutative $\mathbb{C}$ -Unteralgebra von $\operatorname{End}(V)$, dann gibt es einen simultanen Eigenvektor $0 \neq v \in V$ für alle $T \in \mathcal{A}$.

Beweis. Siehe [Fis05]. □

Da hier die Hecke-Operatoren eine kommutative Unteralgebra von $\operatorname{End}(M_k)$ bilden (siehe [Ser77]) und die M_k endlich dimensional sind, gibt es für jedes gerade k Eigenvektoren in M_k .

Lemma 2.2.9. Ist $(V, \langle \rangle)$ ein hermitescher Vektorraum und $T \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert bezüglich $\langle \rangle$, dann besitzt V eine Basis aus Eigenvektoren von T .

Beweis. Siehe [Fis05] S. 312. □

Da die Hecke-Operatoren selbstadjungiert bezüglich des Petersson Skalarproduktes sind, gibt es für jedes M_k eine Basis aus Eigenformen.

Satz 2.2.10. (*Multiplikativität der τ -Funktion*) Es gilt für $ggT(n, m) = 1$:

$$\tau(m)\tau(n) = \tau(m \cdot n).$$

Beweis. Da S_{12} eindimensional ist und es eine Basis aus Eigenformen gibt, muss Δ eine Eigenform sein. Da die Fourierkoeffizienten von Eigenformen multiplikativ sind, ist τ multiplikativ. □

3. Multiple Zeta-Werte

Multiple Zeta-Werte sind eine natürliche Verallgemeinerung der Riemannschen Zeta-Funktion. Wir wollen in diesem Abschnitt nur die für diese Arbeit benötigten Resultate präsentieren. Eine ausführlichere Einführung in dieses Thema befindet sich im Anhang A.

3.1. Grundlagen

Definition 3.1.1. (Multipler Zeta-Wert, Länge, Gewicht)

- (i) Ein Tupel $s := (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{N}^l$ natürlicher Zahlen mit $s_1 > 1$ nennen wir eine *zulässige Indexmenge* und bezeichnen mit $\ell(s) := l$ die *Länge* und mit $|s| := \sum s_i$ das *Gewicht* von s .
- (ii) Für eine zulässige Indexmenge s nennen wir

$$\zeta(s) = \zeta(s_1, \dots, s_l) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}}$$

einen *Multiplen Zeta-Wert (MZV)* der Länge $\ell(s)$ und Gewicht $|s|$.

- (iii) Im Fall $\ell(s) = 2, 3$ sprechen wir von Doppel bzw. Triple Zeta-Werten.
- (iv) Mit $\mathfrak{Z}_k$ bezeichnen wir den $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, der durch alle Multiplen Zeta-Werten vom Gewicht k aufgespannt wird. Den Raum aller Multiplen Zeta-Werte bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z} := \bigoplus_{k>0} \mathfrak{Z}_k$.

Für das Produkt zweier Multipler Zeta-Werte ergibt sich aufgrund der Definition folgende Relation für den Fall $l = 2$:

$$\begin{aligned} \zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2) &= \sum_{n_1 > 0} \frac{1}{n_1^{s_1}} \sum_{n_2 > 0} \frac{1}{n_2^{s_2}} \\ &= \sum_{n_1 > n_2 > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot n_2^{s_2}} + \sum_{n_2 > n_1 > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot n_2^{s_2}} + \sum_{n_1 = n_2 > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot n_2^{s_2}} \\ &= \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dies gilt allgemein für beliebige Level. Wir geben dies hier nur skizzenhaft an und verweisen für eine exakte Formulierung auf Satz A.3.5 im Anhang.

3. Multiple Zeta-Werte

Satz 3.1.2. (*Stuffle Relation*) Für zwei zulässige Indexmengen $s = (s_1, \dots, s_l)$ und $r = (r_1, \dots, r_m)$ gilt:

$$\zeta(s) \cdot \zeta(r) = \sum_{j=\max(l,m)}^{l+m} \zeta(a_1, \dots, a_j).$$

Die $(a_1, \dots, a_j)$ durchlaufen dabei die Tupel mit $a_* = s_*$, $a_* = r_*$ oder $a_* = s_* + r_*$, so dass die ursprüngliche Reihenfolge der s_* und r_* beibehalten wird und jedes s_* bzw. r_* genau einmal in einem a_* „vorhanden“ ist.

Beweis. Siehe Satz A.3.5 auf Seite 108. □

Der Raum $\mathfrak{Z}$ bildet somit unter anderem eine $\mathbb{Q}$ -Algebra. Wir werden uns in dieser Arbeit fast nur mit Doppel und Triple Zeta-Werten beschäftigen. Neben der oben genannten Relation (3.1) auf Seite 25 benötigen wir daher nur noch folgende Stuffle Relation:

$$\begin{aligned} \zeta(s_1, s_2) \cdot \zeta(r_1) &= \zeta(s_1, s_2, r_1) + \zeta(s_1, r_1, s_2) + \zeta(r_1, s_1, s_2) \\ &\quad + \zeta(r_1 + s_1, s_2) + \zeta(s_1, r_1 + s_2). \end{aligned}$$

Neben der Darstellung als Summe besitzen die Multiplen Zeta-Werte auch eine Darstellung durch iterierte Integrale (siehe Proposition A.2.3), wodurch sich die Shuffle Relation ergibt. Um diese zu formulieren, benötigt man einige Notationen, die im Anhang in Abschnitt A.3 genauer ausgeführt sind. Wir bezeichnen mit Σ^* den durch die Menge $\Sigma = \{x_0, x_1\}$ erzeugten freien Monoid, mit dem Aneinanderhängen von Elementen als Verknüpfung und dem leeren Wort 1 als neutralem Element. Für $x_0 x_0 \dots x_0 \in \Sigma^*$ schreiben wir x_0^n . Zusätzlich setzen wir

$$\begin{aligned} y_s &:= x_0^{s-1} x_1 && \text{für } s \geq 1, \\ w_s &:= y_{s_1} \dots y_{s_l} && \text{für eine zulässige Indexmenge } s = (s_1, \dots, s_l). \end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{H} = \bigoplus_{w \in \Sigma^*} \mathbb{Q}$ und $\mathfrak{H}^0 = \mathbb{Q}1 \oplus x_0 \mathfrak{H} x_1$ der Raum der formalen Linearkombinationen von Wörtern aus Σ^* mit rationalen Koeffizienten, die zu zulässigen Indexmengen gehören (siehe Definition A.3.1). Mit der Identifikation einer zulässigen Indexmenge $s = (s_1, \dots, s_l)$ mit dem Wort $w_s := y_{s_1} \dots y_{s_l}$ fassen wir nun durch lineare Fortsetzung ζ als Abbildung von $\mathfrak{H}^0$ nach $\mathbb{R}$ auf.

Damit erhalten wir:

Satz 3.1.3. (*Shuffle Relation*) Definiert man für $u, v, w \in \Sigma^*$, $b_1, b_2 \in \Sigma$ rekursiv die Verknüpfung

$$\begin{aligned} 1 \sqcup w &= w \sqcup 1 = w, \\ b_1 u \sqcup b_2 v &= b_1(u \sqcup b_2 v) + b_2(b_1 u \sqcup v), \end{aligned}$$

dann gilt für zwei zulässige Indermengen s und r und obiger Identifikation von s mit w_s und von r mit w_r :

$$\zeta(s) \cdot \zeta(r) = \zeta(w_s) \cdot \zeta(w_r) = \zeta(w_s \sqcup w_r),$$

wobei $\zeta(w_s \sqcup w_r)$, wie oben Beschrieben, als Linearkombination der Zeta-Werte, die zu den entstehenden Wörtern in $w_s \sqcup w_r$ gehören, zu verstehen ist.

Beweis. Siehe Satz A.3.5 auf Seite 108. □

Mit der oben definierten Verknüpfung bildet $\mathfrak{H}^0$ eine $\mathbb{Q}$ -Algebra.

Beispiel 3.1.4. Wir geben ein Beispiel der Shuffle Relation für $\zeta(2) \cdot \zeta(3)$. Dazu betrachten wir in $\mathfrak{H}^0$:

$$\begin{aligned} w_{(2)} \sqcup w_{(3)} &= y_2 \sqcup y_3 = x_0 x_1 \sqcup x_0 x_0 x_1 = x_0(x_1 \sqcup x_0 x_0 x_1) + x_0(x_0 x_1 \sqcup x_0 x_1) \\ &= x_0(x_1(1 \sqcup x_0 x_0 x_1) + x_0(x_1 \sqcup x_0 x_1)) + x_0(x_0(x_1 \sqcup x_0 x_1) + x_0(x_0 x_1 \sqcup x_1)) \\ &= x_0 x_1 x_0 x_0 x_1 + 3x_0 x_0(x_1 \sqcup x_0 x_1) \\ &= x_0 x_1 x_0 x_0 x_1 + 3x_0 x_0(x_1(1 \sqcup x_0 x_1) + x_0(x_1 \sqcup x_1)) \\ &= x_0 x_1 x_0 x_0 x_1 + 3x_0 x_0 x_1 x_0 x_1 + 3x_0 x_0 x_0(x_1 \sqcup x_1) \\ &= x_0 x_1 x_0 x_0 x_1 + 3x_0 x_0 x_1 x_0 x_1 + 3x_0 x_0 x_0(x_1(1 \sqcup x_1) + x_1(x_1 \sqcup 1)) \\ &= x_0 x_1 x_0 x_0 x_1 + 3x_0 x_0 x_1 x_0 x_1 + 6x_0 x_0 x_0 x_1 x_1 = y_2 y_3 + 3y_3 y_2 + 6y_4 y_1 \\ &= w_{(2,3)} + 3w_{(3,2)} + 6w_{(4,1)}. \end{aligned}$$

Und somit

$$\zeta(2) \cdot \zeta(3) = \zeta(2, 3) + 3\zeta(3, 2) + 6\zeta(4, 1).$$

Für die Doppel Zeta-Werte lässt sich diese Relation allgemein angeben durch (siehe A.2 oder Bemerkung 4.4.7):

$$\zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2) = \sum_{r=2}^{k-1} \left(\binom{r-1}{s_1-1} + \binom{r-1}{s_2-1} \right) \zeta(r, s_1 + s_2 - r).$$

Auch für $\zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2, s_3)$ kann man die Shuffle Relation explizit angeben:

Proposition 3.1.5. Für $s_1, s_2 \geq 2, s_3 \geq 1$ und $k = s_1 + s_2 + s_3$ gilt:

$$\begin{aligned} \zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2, s_3) &= \\ &\sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left(\delta_{s_3, k_3} \binom{k_1-1}{s_1-1} + \binom{k_1-1}{s_2-1} \cdot \left[\binom{k_2-1}{s_3-k_3} + \binom{k_2-1}{s_3-1} \right] \right) \zeta(k_1, k_2, k_3). \end{aligned}$$

Beweis. Dies kann man analog zum obigen Fall elementar durch leichte kombinatorische Überlegungen zeigen. Ein Beweis findet sich aber auch z.B. in [GX08a] (3). □

3. Multiple Zeta-Werte

Definition 3.1.6. Die Relation die durch das Gleichsetzen beider Darstellungen von Proposition 3.1.2 und Proposition 3.1.3 für das Produkt von zwei Multiplen Zeta-Werten entsteht, wird als *Doppel Shuffle Relation* bezeichnet.

3.2. Doppel Zeta-Werte

Für die Doppel Zeta-Werte ist die Doppel Shuffle Relation explizit gegeben durch:

$$\zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2) = \sum_{r=2}^{k-1} \left(\binom{r-1}{s_1-1} + \binom{r-1}{s_2-1} \right) \zeta(r, s_1 + s_2 - r).$$

Damit ergibt sich folgende Proposition:

Proposition 3.2.1. Sei k gerade, $l = \lfloor \frac{3}{4}k \rfloor$ und die Matrix $DS^k \in M_{k-1,l}(\mathbb{Q})$ gegeben durch

$$DS_{i,j}^k = \begin{cases} \gamma(j, k-j; i) & , \text{ falls } 1 \leq j \leq \frac{k}{2} \\ (\delta_{i,2j-k} + \delta_{i,2k-2j}) \frac{1}{\kappa(i,k-i)-1} & , \text{ sonst} \end{cases},$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma(r, s; j) &= \binom{j-1}{r-1} + \binom{j-1}{s-1} - \delta_{r,j} - \delta_{s,j}, \\ \kappa(r, s) &= -\frac{B_r \cdot B_s \cdot (r+s)!}{2B_{r+s} \cdot r! \cdot s!}. \end{aligned}$$

Dann gilt für beliebige $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)^T \in \mathbb{Q}^l$ und $DS^k \cdot \Lambda =: (c_1, \dots, c_{k-1})^T \in \mathbb{Q}^{k-1}$:

$$\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i \right) \zeta(k) = \sum_{i=2}^{k-1} c_i \zeta(i, k-i).$$

Beweis. Siehe Proposition A.4.4 im Anhang. □

Mit dieser Proposition können alle in dieser Arbeit auftretenden Relationen zwischen

Doppel Zeta-Werten hergeleitet werden. Für den Fall $k = 12$ gilt beispielsweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1382}{893} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2764}{239} & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & \frac{691}{12} \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 42 & 42 & 0 & \frac{2764}{239} & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 64 & 98 & 112 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 45 & 120 & 210 & 252 & \frac{1382}{893} & 0 & 0 \\ 1 & 20 & 90 & 240 & 420 & 504 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{DS}^{12}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 42 \\ -90 \\ 55 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{360}{691} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 168 \\ 0 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\frac{5197}{691}\zeta(12) = \left(42 - 90 + 55 + \frac{360}{691}\right)\zeta(12) = 168\zeta(5, 7) + 150\zeta(7, 5) + 28\zeta(9, 3).$$

Im Kapitel über Triple Eisensteinreihen benötigen wir zudem folgenden Satz:

Satz 3.2.2. Für $m, n > 0$ und $m + n = k$ ungerade gilt:

$$\begin{aligned} \zeta(n, m) &= \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)\zeta(m)\zeta(n) \\ &+ \frac{1}{2}\left[(-1)^n\binom{k}{m} - 1\right]\zeta(k) \\ &- (-1)^n \sum_{i=1}^{(k-3)/2} \left[\binom{k-2i-1}{m-1} + \binom{k-2i-1}{n-1}\right]\zeta(2i)\zeta(k-2i). \end{aligned}$$

Beweis. Siehe (5) in [Car11]. □

Relationen zwischen Doppel Zeta-Werten $\zeta(a, b)$ bei denen a und b ungerade sind, besitzen eine interessante Beziehung zu Periodenpolynomen (siehe für die Definition im Anhang B.1.2). Eine kleine Einführung in Periodenpolynome befindet sich im Anhang B.1.

Satz 3.2.3. Für gerade $k \geq 12$, $P(X, Y) \in W_k/(X^{k-2} - Y^{k-2})$ und $q_{r, k-r}$ definiert durch

$$P(X + Y, Y) = \sum_{r=1}^{k-3} \binom{k-2}{r-1} q_{r, k-r} X^{r-1} Y^{k-r-1},$$

3. Multiple Zeta-Werte

gilt:

$$\sum_{\substack{r=3 \\ \text{ungerade}}} q_{r,k-r} \zeta(r, k-r) \equiv 0 \pmod{\zeta(k)}.$$

Umgekehrt ist ein $P(X, Y)$, welches so durch eine Relation von ungeraden Doppel Zeta-Werten entsteht, ein Periodenpolynom.

Beweis. Dieses Ergebnis stammt ursprünglich aus [GKZ06] Theorem 3 und findet sich in obiger Formulierung in [BS11] Theorem 1.4. $\square$

Das Periodenpolynom von Δ aus (B.1) liefert z.B. die bereits oben erwähnte Relation

$$28\zeta(9, 3) + 150\zeta(7, 5) + 168\zeta(5, 7) = \frac{5197}{691}\zeta(12).$$

4. Multiple Eisensteinreihen

In [GKZ06] werden Doppel Eisensteinreihen eingeführt, welche zu den gewöhnlichen Eisensteinreihen eine ähnliche Rolle einnehmen, wie es die Doppel Zeta-Werte bezüglich der einfachen Zeta-Werte tun. In diesem Abschnitt wollen wir den allgemeinen Fall betrachten und Multiple Eisensteinreihen definieren, bevor wir in den folgenden Abschnitten genauer auf die Doppel bzw. Triple Eisensteinreihen eingehen.

4.1. Grundlagen

Definition 4.1.1. Eine Teilmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$, bei der mit $a, b \in \mathcal{P}$ auch $a + b \in \mathcal{P}$ und $\mathbb{Z}^2 = \mathcal{P} \cup \{0\} \cup (-\mathcal{P})$ ist, nennen wir *positiv*. Gilt $x - y \in \mathcal{P}$, dann schreiben wir $x \succ_{\mathcal{P}} y$. Für ein $M \subset \mathbb{Z}^2$ definieren wir für ein $\tau \in \mathbb{H}$ abkürzend:

$$M(\tau) := \{m\tau + n \in \mathbb{C} \mid (m, n) \in M\}$$

und analog für ein $a = (m, n) \in M$ setzen wir $a(\tau) := m\tau + n$.

Als unser wichtigstes Beispiel einer positive Menge betrachten wir

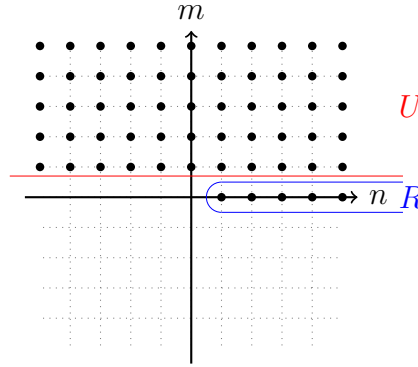


Abbildung 4.1.: Darstellung von $\mathcal{P}_0$, R und U .

$$\mathcal{P}_0 := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m > 0 \vee (m = 0 \wedge n > 0)\} = R \cup U$$

mit $R = \{(0, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid n > 0\}$ und $U = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m > 0\}$. Statt $\succ_{\mathcal{P}_0}$ schreiben wir nur $\succ$. Damit wollen wir nun die Multiplen Eisensteinreihen analog zur Definition der Multiplen Zeta-Werte wie folgt definieren.

4. Multiple Eisensteinreihen

Definition 4.1.2. Für $\tau \in \mathbb{H}$ und natürliche Zahlen $s_1, \dots, s_l > 2$ definieren wir die *Multiple Eisensteinreihe* von Gewicht $s_1 + \dots + s_l$ und Länge l durch

$$G_{s_1, \dots, s_l}(\tau) := \sum_{a_1 \succ \dots \succ a_l \succ 0} \frac{1}{a_1(\tau)^{s_1} \cdot \dots \cdot a_l(\tau)^{s_l}}.$$

Im Fall $l = 1$ entspricht diese Definition genau der Definition aus 1.1 für die klassische Eisensteinreihe G_k für gerade $k > 2$. Der Faktor $\frac{1}{2}$ verschwindet hier, da nur noch über die Hälfte des Gitters summiert wird.

Proposition 4.1.3. Die Multiple Eisensteinreihe $G_{s_1, \dots, s_l}$ stellt für $s_1, \dots, s_l > 2$ eine analytische Funktionen auf der oberen Halbebene dar.

Beweis. Bekannt ist, dass die klassischen Eisensteinreihen G_k für $k > 2$ analytische Funktionen auf der oberen Halbebene darstellen (siehe z.B. [EF06] S. 318). Somit ist für $s_1, \dots, s_l > 2$ auch

$$G_{s_1}(\tau) \cdot \dots \cdot G_{s_l}(\tau) = \sum_{a_1, \dots, a_l \succ 0} \frac{1}{a_1(\tau)^{s_1} \cdot \dots \cdot a_l(\tau)^{s_l}}$$

analytisch und somit absolut konvergent. Damit ist insbesondere die Multiple Eisensteinreihe absolut konvergent. Dass diese zudem lokal gleichmäßig konvergiert und somit analytisch ist, lässt sich analog zeigen wie bei der klassischen Eisensteinreihe z.B. mit Hilffsatz 8.1 in [EF06] auf Seite 317. $\square$

Im Folgenden werden wir sehen, dass die Multiplen Eisensteinreihen eine Fourierentwicklung besitzen und der konstante Term von $G_{s_1, \dots, s_l}$ genau dem zugehörigen Multiplen Zeta-Wert $\zeta(s_1, \dots, s_l)$ entspricht. Es stellt sich daher die Frage, ob die Multiplen Eisensteinreihen auch die Stuffle bzw. Shuffle Relationen erfüllen.

Bemerkung 4.1.4. (Stuffle Relation) Dass die Stuffle Relation erfüllt wird, ergibt sich direkt aus der Definition. Dies gilt allgemeiner, wenn man für eine beliebige positive Menge $\mathcal{P}$ eine analoge Definition der Multiplen Eisensteinreihen angibt, indem die $\succ$ durch $\succ_{\mathcal{P}}$ ersetzt werden. Die zugehörige Reihe bezeichnen wir mit $G_{s_1, \dots, s_l}(\mathcal{P}, \tau)$. Diese erfüllen genau wie die Multiplen Zeta-Werte die Stuffle Relation (siehe Satz 3.1.2):

Proposition 4.1.5. (Stuffle Relation) Für eine feste positive Menge $\mathcal{P}$ erfüllen die $G_{s_1, \dots, s_l}(\mathcal{P}, \tau)$ die Stuffle Relation, d.h. es gilt für $s_1, \dots, s_l > 2$ und $r_1, \dots, r_l > 2$:

$$G_{s_1, \dots, s_l}(\mathcal{P}, \tau) \cdot G_{r_1, \dots, r_l}(\mathcal{P}, \tau) = \sum_{j=\max(l, m)}^{l+m} G_{a_1, \dots, a_j}(\mathcal{P}, \tau).$$

Die $(a_1, \dots, a_j)$ durchlaufen dabei die Tupel mit $a_* = s_*$, $a_* = r_*$ oder $a_* = s_* + r_*$, so dass die ursprüngliche Reihenfolge der s_* und r_* beibehalten wird und jedes s_* bzw. r_* genau einmal in einem a_* „vorhanden“ ist.

Beweis. Dies folgt aus der Eigenschaft einer positiven Menge und den gleichen kombinatorischen Überlegungen wie in Satz A.3.5 (vgl. Satz 3.1.2). $\square$

Der einfachste Fall ist dabei wieder gegeben durch

$$\begin{aligned}
G_{s_1}(\mathcal{P}, \tau) \cdot G_{s_2}(\mathcal{P}, \tau) &= \sum_{(m_1, n_1) \succ_{\mathcal{P}} 0} \frac{1}{(m_1 \tau + n_1)^{s_1}} \cdot \sum_{(m_2, n_2) \succ_{\mathcal{P}} 0} \frac{1}{(m_2 \tau + n_2)^{s_2}} \\
&= \sum_{(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathcal{P}} \frac{1}{(m_1 \tau + n_1)^{s_1} (m_2 \tau + n_2)^{s_2}} \\
&= \sum_{(m_1, n_1) - (m_2, n_2) \in \mathcal{P}} \dots + \sum_{(m_1, n_1) - (m_2, n_2) \in -\mathcal{P}} \dots + \sum_{(m_1, n_1) - (m_2, n_2) = (0, 0)} \dots \\
&= G_{s_1, s_2}(\mathcal{P}, \tau) + G_{s_2, s_1}(\mathcal{P}, \tau) + G_{s_1 + s_2}(\mathcal{P}, \tau).
\end{aligned}$$

Beispiel 4.1.6. Wie wir durch Proposition 2.1.3 wissen, ist $\dim(M_{10}) = 1$ und durch Koeffizientenvergleich erhält man, dass $G_4 \cdot G_6 = \frac{11}{10}G_{10}$ gilt. Zusammen mit $G_4 \cdot G_6 = G_{4,6} + G_{6,4} + G_{10}$ ergibt sich somit die erste einfache Relation zwischen Multiplen Eisensteinreihen:

$$G_{10}(\tau) = 10 (G_{4,6}(\tau) + G_{6,4}(\tau)).$$

Bemerkung 4.1.7. (Shuffle Relation) Die Shuffle Relation wie für die Multiplen Zeta-Werte (siehe Satz 3.1.3) können wir an dieser Stelle noch nicht erwarten, da hierfür die Ausdrücke $G_{s_1, \dots, s_l}$ auch für $s_1 = 2$ und $s_i = 1, 2$ für $i = 1, \dots, l$ definiert sein müssten.

Im Beispiel 4.1.6 ist die Shuffle Relation für die entsprechenden Zeta-Werte gegeben durch

$$\zeta(4) \cdot \zeta(6) = \zeta(4, 6) + 4\zeta(5, 5) + 11\zeta(6, 4) + 26\zeta(7, 3) + 56\zeta(8, 2) + 112\zeta(9, 1).$$

Damit es also sinnvoll ist zu fragen, ob die Shuffle Relation in diesem Fall auch für die Eisensteinreihen erfüllt ist, müssten somit $G_{9,1}$ und $G_{8,2}$ definiert sein. Doch da zusätzlich gilt

$$\zeta(5)^2 = 2\zeta(5, 5) + 10\zeta(6, 4) + 30\zeta(7, 3) + 70\zeta(8, 2) + 140\zeta(9, 1),$$

ergibt sich

$$560 \left(\frac{\zeta(4) \cdot \zeta(6)}{112} - \frac{\zeta(5)^2}{140} \right) = 5\zeta(4, 6) + 12\zeta(5, 5) + 15\zeta(6, 4) + 10\zeta(7, 3).$$

Benutzt man hier jeweils auf der linken Seite wieder die Shuffle Relation $\zeta(5)^2 = 2\zeta(5, 5) + \zeta(10)$ und $\zeta(4) \cdot \zeta(6) = \zeta(4, 6) + \zeta(6, 4) + \zeta(10)$, so folgt:

$$\zeta(10) = 20\zeta(5, 5) + 10\zeta(6, 4) + 10\zeta(7, 3).$$

4. Multiple Eisensteinreihen

Bei dieser Relation macht es wiederum Sinn zu fragen, ob die analoge Relation auch von den Doppel Eisensteinreihen erfüllt wird. Wir werden im späteren Abschnitt, in dem wir Partialbruchzerlegungen betrachten, sehen, dass sich die Shuffle Relation, die ursprünglich durch die Darstellung durch iterierte Integrale für Zeta-Werte entstand, ganz einfach aus der Partialbruchzerlegung von $(x + n_1)^{-s_1} \cdot (x + n_2)^{-s_2}$ herleiten lässt (Bemerkung 4.4.7). Diese rein kombinatorischen Überlegungen lassen sich auch auf die Triple Eisensteinreihen übertragen und somit erfüllen diese auch Relationen, die aus der Shuffle Relation entstehen, sofern keine „nicht konvergenten Teile“ mehr vorhanden sind.

Eines der Hauptergebnisse aus [GKZ06], welches wir in 4.7.1 darstellen, ist es, dass man für den Fall der Doppeleisensteinreihen die fehlenden Relationen erhält, indem man entsprechende Definitionen von G_{s_1, s_2} angibt.

4.2. Modularität I: Transformationsverhalten

Wir betrachten in diesem Abschnitt das Transformationsverhalten von Multiplen Eisensteinreihen unter der Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir die Menge aller positiven Mengen und für ein $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ betrachten wir die oben erwähnte verallgemeinerte Definition für eine Multiple Eisensteinreihe zu $\mathcal{P}$, die gegeben ist durch

$$G_{s_1, \dots, s_l}(\mathcal{P}, \tau) := \sum_{(m_1, n_1) \succ_{\mathcal{P}} \dots \succ_{\mathcal{P}} (m_l, n_l) \succ_{\mathcal{P}} 0} \prod_{i=1}^l (m_i \tau + n_i)^{-s_i}.$$

Auf einer positiven Menge $\mathcal{P}$ betrachten wir für ein $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Wirkung

$$\gamma \cdot \mathcal{P} := \left\{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid (m, n) \gamma \in \mathcal{P} \right\} = \mathcal{P} \gamma^{-1} \in \mathfrak{P}$$

und erhalten so eine Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathfrak{P}$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} G_{s_1, \dots, s_l}(\mathcal{P}, \gamma \cdot \tau) &= \sum_{(m_1, n_1) \succ_{\mathcal{P}} \dots \succ_{\mathcal{P}} (m_l, n_l) \succ_{\mathcal{P}} 0} \prod_{i=1}^l \left(m_i \frac{a\tau + b}{c\tau + d} + n_i \right)^{-s_i} \\ &= \sum_{(m_1, n_1) \succ_{\mathcal{P}} \dots \succ_{\mathcal{P}} (m_l, n_l) \succ_{\mathcal{P}} 0} \prod_{i=1}^l \left(\frac{m_i(a\tau + b) + n_i(c\tau + d)}{c\tau + d} \right)^{-s_i} \\ &= (c\tau + d)^{s_1 + \dots + s_l} \sum_{(m_1, n_1) \succ_{\mathcal{P}} \dots \succ_{\mathcal{P}} (m_l, n_l) \succ_{\mathcal{P}} 0} \prod_{i=1}^l ((m_i a + n_i c)\tau + (m_i b + n_i d))^{-s_i} \\ &= (c\tau + d)^{s_1 + \dots + s_l} \sum_{(m_1, n_1) \gamma^{-1} \succ_{\mathcal{P}} \dots \succ_{\mathcal{P}} (m_l, n_l) \gamma^{-1} \succ_{\mathcal{P}} 0} \prod_{i=1}^l (m_i \tau + n_i)^{-s_i} \\ &= (c\tau + d)^{s_1 + \dots + s_l} G_{s_1, \dots, s_l}(\gamma \cdot \mathcal{P}, \tau). \end{aligned}$$

Die Frage nach dem modularen Transformationsverhalten für ein $G_{s_1, \dots, s_l}(\mathcal{P}, \cdot)$ hat somit stark mit dem Transformationsverhalten von $\mathcal{P}$ unter der Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu tun.

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird erzeugt durch die Matrizen

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Siehe z.B. [MK07] S. 125).

Um das modulare Transformationsverhalten für eine Funktion f zu erhalten, reicht es daher $f|_k T = f$ und $f|_k S = f$ zu zeigen, was gleichbedeutend mit $f(T.\tau) = f(\tau + 1) = f(\tau)$ und $f(S.\tau) = f\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau)$ ist.

Proposition 4.2.1. *Es gilt für $s_1, \dots, s_l > 2$, dass*

$$G_{s_1, \dots, s_l}(\tau + 1) = G_{s_1, \dots, s_l}(\tau).$$

Beweis. Für die Wirkung von T auf $\mathcal{P}_0$ gilt:

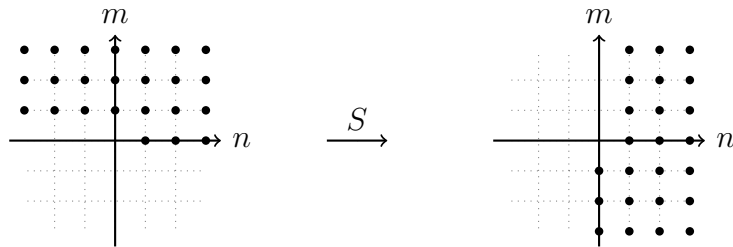
$$\begin{aligned} T.\mathcal{P}_0 &= \left\{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m > 0 \vee (m = 0 \wedge n > 0) \right\} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ (m, n - m) \in \mathbb{Z}^2 \mid m > 0 \vee (m = 0 \wedge n > 0) \right\} = \mathcal{P}_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

und damit ist $G_{s_1, \dots, s_l}(\tau + 1) = G_{s_1, \dots, s_l}(\tau)$. □

Die so existierenden Fourierreihen werden wir in den folgenden Abschnitten für die Fälle $l = 2, 3$ berechnen und für die restlichen $l > 3$ eine allgemeine Konstruktion angeben. Für die Wirkung von S auf $\mathcal{P}_0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} S.\mathcal{P}_0 &= \left\{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m > 0 \vee (m = 0 \wedge n > 0) \right\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ (-n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid m > 0 \vee (m = 0 \wedge n > 0) \right\} \\ &= \left\{ (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid n > 0 \vee (n = 0 \wedge m < 0) \right\}. \end{aligned}$$

Dies entspricht anschaulich einer Rotation um 90° der positiven Menge:



4. Multiple Eisensteinreihen

Die $G_{s_1, \dots, s_l}$ sind somit für beliebige $s_1, \dots, s_l$ nicht invariant unter der Wirkung von S und haben daher kein modulares Transformationsverhalten. Bekannt ist aber, dass G_{s_1} für $s_1 > 2$ gerade modular ist. Dies ist ein Spezialfall folgender kombinatorischer Überlegung:

Satz 4.2.2. *Für gerade $s_1, \dots, s_l > 2$, $k = s_1 + \dots + s_l$ gilt:*

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_l} G_{s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(l)}} \in M_k.$$

Beweis. Wir definieren zunächst

$$N : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$$

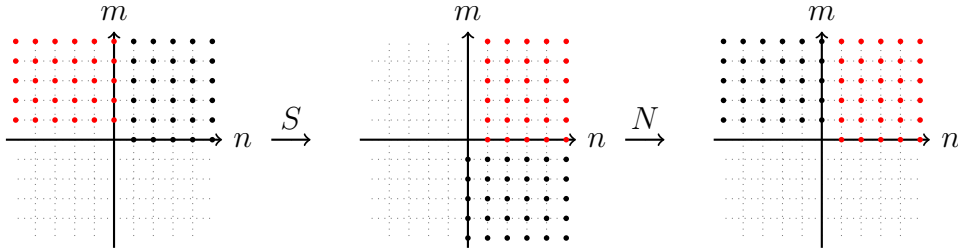
$$(m, n) \longmapsto \begin{cases} (m, n), & \text{falls } (m, n) \in \mathcal{P}_0 \\ (-m, -n), & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit gilt offensichtlich für eine beliebige positive Menge $\mathcal{P}$, dass $N(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_0$, da $\mathcal{P} \cup -\mathcal{P} \cup \{0\} = \mathbb{Z}^2$. Ist $(m, n) \in \mathcal{P}$ so ist $(m\tau + n)^k = (-m\tau - n)^k$ für gerade k . Somit ergibt sich

$$\sum_{(m,n) \in \mathcal{P}} \frac{1}{(m\tau + n)^k} = \sum_{(m,n) \in N(\mathcal{P})} \frac{1}{(m\tau + n)^k} = \sum_{(m,n) \in \mathcal{P}_0} \frac{1}{(m\tau + n)^k}.$$

Für den Fall $\mathcal{P} = S \cdot \mathcal{P}_0$ und geradem $s_1 > 2$ ist also insbesondere:

$$\begin{aligned} G_{s_1}(S \cdot \tau) &= \tau^{s_1} \sum_{(m,n) \in S \cdot \mathcal{P}_0} \frac{1}{(m\tau + n)^{s_1}} = \tau^{s_1} \sum_{(m,n) \in N(S \cdot \mathcal{P}_0)} \frac{1}{(m\tau + n)^{s_1}} \\ &= \tau^{s_1} \sum_{(m,n) \in \mathcal{P}_0} \frac{1}{(m\tau + n)^{s_1}} = \tau^{s_1} G_k(\tau). \end{aligned}$$



Dies zeigt den Fall $l = 1$ des Satzes. Es sind zwar $\mathcal{P}_0$ und $N(S \cdot \mathcal{P}_0)$ als Mengen identisch, aber durch die Abbildung N wird die durch $\mathcal{P}_0$ gegebene Ordnung verändert (siehe Abbildung 4.2). Für $l > 1$ und gerade $s_1, \dots, s_l$ ergibt die Summation von $a_1(\tau)^{s_1} \cdot \dots \cdot a_l(\tau)^{s_l}$ über $a_1 \succ \dots \succ a_l \succ 0$ nicht das Gleiche wie über $a_1 \succ_{N(S \cdot \mathcal{P}_0)} \dots \succ_{N(S \cdot \mathcal{P}_0)} a_l \succ_{N(S \cdot \mathcal{P}_0)} 0$. Man kann sich nun leicht überlegen, dass durch die Summation über alle Vertauschungen der s_i die entstehende Funktion für gerade $s_1, \dots, s_l$ invariant unter der Wirkung von S bleibt.

□

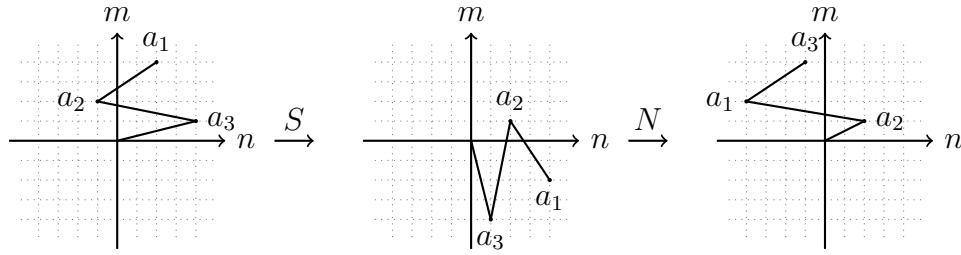


Abbildung 4.2.: Beispiel für den Fall $l = 3$. Durch die Abbildung $N \circ S$ wird aus $a_1 \succ a_2 \succ a_3$ ein Summand mit $a_3 \succ a_1 \succ a_2$.

Bemerkung 4.2.3. Ein alternativer Beweis für Satz 4.2.2 wäre die Benutzung der Stuffle Relation. Man kann für $l > 1$ die Aussage per Induktion zeigen, da aus dem Stuffle Produkt 4.1.5 folgt:

$$G_{s_{l+1}} \cdot \sum_{\sigma \in \Sigma_l} G_{s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(l)}} = \sum_{\sigma \in \Sigma_{l+1}} G_{s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(l+1)}} + \sum_{j=1}^l \sum_{\sigma \in \Sigma_l} G_{r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(l)}},$$

wobei in der zweiten Summe jeweils $r_i = s_i$ für $i \neq j$ und $r_j = s_j + s_{l+1}$. Die linke Seite und der rechte Summand auf der rechten Seite sind per Induktionsannahme modular und somit ist es auch der linke Summand auf der rechten Seite.

4.3. Fourierentwicklung I

Da $G_{s_1, \dots, s_l}(\tau+1) = G_{s_1, \dots, s_l}(\tau)$, besitzen die Multiplen Eisensteinreihen eine Fourierentwicklung. Dieser Abschnitt soll nun das allgemeine Vorgehen zur Berechnung der Fourierentwicklung beschreiben. Um die Fourierentwicklung der klassischen Eisensteinreihe zu berechnen, benutzt man dabei die Lipschitz Summationsformel 1.3.1, um Terme der Form $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^k}$ in die Form $\sum_{n>0} a_n q^{m \cdot n}$ zu überführen.

Das Vorgehen für die Multiplen Eisensteinreihen ist ähnlich. Es tauchen hierbei Terme ähnlicher Gestalt auf, bei denen man aber nicht direkt die Lipschitz Summationsformel anwenden kann, sondern zunächst mit Hilfe von Partialbruchzerlegungen „passende“ Terme berechnen muss.

Als Erstes schreiben wir die Multiple Eisensteinreihe um: Ist $(a_1, \dots, a_l) \in \mathcal{P}_0^l$, so schreiben wir $\bar{a}_j = \sum_{i=1}^{l-j+1} a_i$. Damit ist

$$G_{s_1, \dots, s_l}(\tau) = \sum_{(a_1, \dots, a_l) \in \mathcal{P}_0^l} \prod_{j=1}^l \bar{a}_j(\tau)^{-s_j}.$$

4. Multiple Eisensteinreihen

Da $\mathcal{P}_0 = R \cup U$, lässt sich die Multiple Eisensteinreihe der Länge l somit in 2^l Summanden aufteilen, die wir einzeln betrachten. Dazu bezeichnen wir die beiden Mengen R und U als Buchstaben und Kartesische Produkte von ihnen als Wörter. Zusätzlich definieren wir die Menge $W_l := \{M_1 \times \dots \times M_l \mid M_i \in \{R, U\}\}$, welche somit die Menge aller Wörter mit l Buchstaben (bzw. der Länge l) beschreibt. Ist $w = R^{r_1} U^{u_1} \dots R^{r_k} U^{u_k} \in W_l$ ein Wort, so schreiben wir für das „gespiegelte“ Wort $w^T = U^{u_k} R^{r_k} \dots R^{r_1} U^{u_1}$ und definieren damit:

$$G_{s_1, \dots, s_l}^w(\tau) := \sum_{(a_1, \dots, a_l) \in w^T} \prod_{j=1}^l \bar{a}_j(\tau)^{-s_j}.$$

Für ein Wort $w \in W_0$ der Länge 0 setzen wir $G_{s_1, \dots, s_l}^w(\tau) = 1$.

Bemerkung 4.3.1. Diese zunächst unnötig kompliziert erscheinende Definition von $\bar{a}_j$ und die Nutzung von w^T stammt daher, dass im späteren Verlauf natürlichere Identitäten entstehen. Die Reihenfolge der Buchstaben entspricht hier nun der Reihenfolge der s_i . Der Nutzen wird in der Formel (4.3) auf Seite 41 deutlich.

Summiert man nun über alle möglichen Wörter der Länge l auf, so erhält man die Multiple Eisensteinreihe:

Proposition 4.3.2. *Es gilt für $s_1, \dots, s_l > 2$*

$$G_{s_1, \dots, s_l}(\tau) = \sum_{w \in W_l} G_{s_1, \dots, s_l}^w(\tau).$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus der vorigen Diskussion und der Definition von $G_{s_1, \dots, s_l}^w$. $\square$

Im Fall $l = 1$ existieren nur die Wörter R und U und wir haben in Abschnitt 1.3 gesehen, dass

$$G_{s_1}^R = \zeta(s_1), \quad G_{s_1}^U = \sum_{m>0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^{s_1}}.$$

Für das Wort $w = R^l$ gilt offensichtlich $G_{s_1, \dots, s_l}^{R^l}(\tau) = \zeta(s_1, \dots, s_l)$, da

$$G_{s_1, \dots, s_l}^{R^l}(\tau) = \sum_{((0, n_1), \dots, (0, n_l)) \in R^l} \prod_{j=1}^l \bar{n}_j^{-s_j} = \sum_{n_1 > \dots > n_l > 0} \prod_{j=1}^l n_j^{-s_j} = \zeta(s_1, \dots, s_l).$$

Um $G_{s_1, \dots, s_l}^w$ für $l > 1$ zu berechnen, führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

Definition 4.3.3. Für $s_1, \dots, s_l > 1$ definieren wir:

$$\Psi_{s_1, \dots, s_l}(\tau) := \sum_{\substack{n_1 > \dots > n_l \\ n_i \in \mathbb{Z}}} \prod_{i=1}^l \frac{1}{(\tau + n_i)^{s_i}},$$

$$g_{s_1, \dots, s_l}(\tau) := \sum_{m_1 > \dots > m_l > 0} \Psi_{s_1}(m_1 \tau) \cdot \dots \cdot \Psi_{s_l}(m_l \tau).$$

Diese zwei Objekte sind, wie wir noch sehen werden, zusammen mit den Multiplen Zeta-Werten die wesentlichen Bestandteile der Multiplen Eisensteinreihen. Ziel wird es sein, aus Kombinationen von den Funktionen Ψ_* auf die g_* zu schließen, da sich für diese eine Fourierreihe berechnen lässt.

Lemma 4.3.4. (*Fourierreihe von $g_{s_1, \dots, s_l}$*) Für $s_1, \dots, s_l > 1$ gilt:

$$g_{s_1, \dots, s_l}(\tau) = \frac{(-2\pi i)^{s_1 + \dots + s_l}}{(s_1 - 1)! \cdot \dots \cdot (s_l - 1)!} \sum_{n > 0} \sigma_{s_1-1, \dots, s_l-1}(n) q^n,$$

wobei

$$\sigma_{s_1-1, \dots, s_l-1}(n) := \sum_{\substack{u_1 v_1 + \dots + u_l v_l = n \\ u_1 > \dots > u_l > 0}} v_1^{s_1-1} \cdot \dots \cdot v_l^{s_l-1}.$$

Die $\sigma_{s_1, \dots, s_l}(n)$ bezeichnen wir als verallgemeinerte Teilersummen, welche wir in Kapitel 5 genauer betrachten werden.

Beweis. Mit 1.3.1 erhalten wir zunächst

$$\Psi_{s_i}(m_i \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_i \tau + n)^{s_i}} = \frac{(-2\pi i)^{s_i}}{(s_i - 1)!} \sum_{n_i > 0} n_i^{s_i-1} q^{m_i n_i}.$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} g_{s_1, \dots, s_l}(\tau) &= \sum_{m_1 > \dots > m_l > 0} \Psi_{s_1}(m_1 \tau) \cdot \dots \cdot \Psi_{s_l}(m_l \tau) \\ &= \sum_{m_1 > \dots > m_l > 0} \frac{(-2\pi i)^{s_1 + \dots + s_l}}{(s_1 - 1)! \cdot \dots \cdot (s_l - 1)!} \sum_{n_1, \dots, n_l > 0} n_1^{s_1-1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l-1} q^{m_1 n_1 + \dots + m_l n_l} \\ &= \frac{(-2\pi i)^{s_1 + \dots + s_l}}{(s_1 - 1)! \cdot \dots \cdot (s_l - 1)!} \sum_{\substack{m_1 > \dots > m_l > 0 \\ n_1, \dots, n_l > 0}} n_1^{s_1-1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l-1} q^{m_1 n_1 + \dots + m_l n_l} \\ &= \frac{(-2\pi i)^{s_1 + \dots + s_l}}{(s_1 - 1)! \cdot \dots \cdot (s_l - 1)!} \sum_{n > 0} \sigma_{s_1-1, \dots, s_l-1}(n) q^n. \end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun die Fälle $l = 1$ und $l = 2$ und betrachten die jeweils auftretenden $G_{s_1}^w$ bzw. G_{s_1, s_2}^w .

4. Multiple Eisensteinreihen

Beispiel 4.3.5. (Klassische Eisensteinreihe) Der bekannte klassische Fall $l = 1$ ist mit obigen Bezeichnungen folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} G_{s_1}(\tau) &= G_{s_1}^R(\tau) + G_{s_1}^U(\tau) = \zeta(s_1) + \sum_{m>0} \Psi_{s_1}(m\tau) \\ &= \zeta(s_1) + g_{s_1}(\tau) = \zeta(s_1) + \frac{(-2\pi i)^{s_1}}{(s_1 - 1)!} \sum_{n>0} \sigma_{s_1-1}(n) q^n. \end{aligned}$$

Da man hier das allgemeine Vorgehen noch nicht erkennen kann, betrachten wir $l = 2$. In diesem Fall hat man insgesamt die vier Wörter R^2, RU, UR und U^2 , für die wir die zugehörigen Eisensteinreihen berechnen:

Beispiel 4.3.6. (Doppel Eisensteinreihe)

(i) Das Wort R^2 ergibt, wie oben erwähnt, $G_{s_1, s_2}^{R^2}(\tau) = \zeta(s_1, s_2)$.

(ii) Für das Wort UR erhält man:

$$\begin{aligned} G_{s_1, s_2}^{UR}(\tau) &= \sum_{((0, n_1), (m_2, n_2)) \in RU} \frac{1}{((m_2 + 0)\tau + (n_1 + n_2))^{s_1} (0\tau + n_1)^{s_2}} \\ &= \sum_{(m_2, n_2) \in U} \frac{1}{(m_2\tau + n_2)^{s_1}} \sum_{(0, n_1) \in R} \frac{1}{n_1^{s_2}} = G_{s_1}^U(\tau) \cdot G_{s_2}^R(\tau) \\ &= \sum_{m>0} \Psi_{s_1}(m\tau) \zeta(s_2) \\ &= g_{s_1}(\tau) \zeta(s_2). \end{aligned}$$

(iii) Im Fall RU erhalten wir:

$$\begin{aligned} G_{s_1, s_2}^{RU}(\tau) &= \sum_{((m_1, n_1), (0, n_2)) \in UR} \frac{1}{((m_1 + 0)\tau + (n_1 + n_2))^{s_1} (m_1\tau + n_1)^{s_2}} \\ &= \sum_{m>0} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_1\tau + (n_1 + n_2))^{s_1} (m_1\tau + n_1)^{s_2}} \\ &= \sum_{m>0} \sum_{n_1 > n_2} \frac{1}{(m_1\tau + n_1)^{s_1} (m_1\tau + n_2)^{s_2}} \\ &= \sum_{m>0} \Psi_{s_1, s_2}(m\tau). \end{aligned}$$

(iv) Für das Wort U^2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} G_{s_1, s_2}^{U^2}(\tau) &= \sum_{((m_2, n_2), (m_1, n_1)) \in U^2} \frac{1}{((m_1 + m_2)\tau + (n_1 + n_2))^{s_1} (m_1\tau + n_1)^{s_2}} \\ &= \sum_{m_1 > m_2 > 0} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_1\tau + (n_1 + n_2))^{s_1} (m_2\tau + n_1)^{s_2}} \\ &= \sum_{m_1 > m_2 > 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_1\tau + n)^{s_1}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_2\tau + n)^{s_2}} \\ &= \sum_{m_1 > m_2 > 0} \Psi_{s_1}(m_1\tau) \Psi_{s_2}(m_2\tau) = g_{s_1, s_2}(\tau). \end{aligned}$$

Damit haben wir insgesamt für die Doppel Eisensteinreihe:

$$\begin{aligned} G_{s_1, s_2}(\tau) &= G_{s_1, s_2}^{R^2}(\tau) + G_{s_1, s_2}^{UR}(\tau) + G_{s_1, s_2}^{RU}(\tau) + G_{s_1, s_2}^{U^2}(\tau) \\ &= \zeta(s_1, s_2) + g_{s_1}(\tau)\zeta(s_2) + \sum_{m_1 > 0} \Psi_{s_1, s_2}(m_1\tau) + g_{s_1, s_2}(\tau). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Bemerkung 4.3.7. Durch Beispiel 4.3.6 (ii) wird offensichtlich, dass allgemein für $u_i, r_i > 0$, $1 \leq i \leq k$ mit $\sum_{i=1}^k (u_i + r_i) = l$ gilt:

$$G_{s_1, \dots, s_l}^{U^{u_1} R^{r_1} \dots U^{u_k} R^{r_k}}(\tau) = G_{s_1, \dots, s_{l-r_k}}^{U^{u_1} R^{r_1} \dots U^{u_k}}(\tau) \cdot \zeta(s_{l-r_k+1}, \dots, s_l). \quad (4.3)$$

Man kann sich daher auf die Wörter beschränken, die auf einem U enden.

Es wird durch Beispiel 4.3.6 das Prinzip klar, wie sich die Terme der Form $G_{s_1, \dots, s_{l-r_k}}^{U^{u_1} R^{r_1} \dots U^{u_k}}$ berechnen lassen.

Im Fall $l = 5$ führt das Wort RUR^2U z.B. zu

$$G_{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5}^{RUR^2U}(\tau) = \sum_{m_1 > m_2 > 0} \Psi_{s_1, s_2}(m_1\tau) \Psi_{s_3, s_4, s_5}(m_2\tau).$$

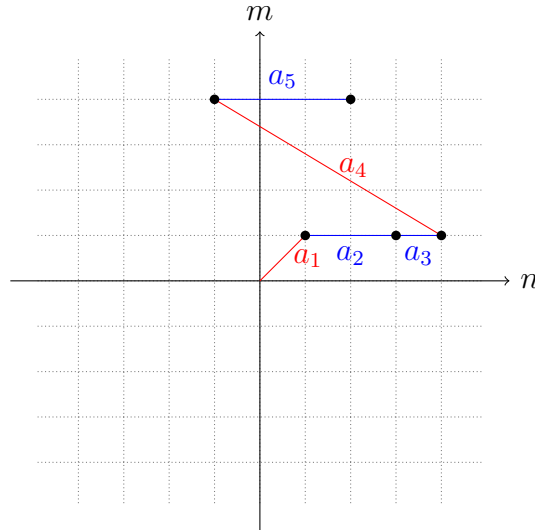


Abbildung 4.3.: Beispiel von $(a_1, \dots, a_5) \in (RUR^2U)^T$ bzw. ein Summand von $G_{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5}^{RUR^2U}$. Die unteren drei Punkte „gehören“ dabei zu $\Psi_{s_3, s_4, s_5}(m_2\tau)$ und die oberen beiden zu $\Psi_{s_1, s_2}(m_1\tau)$.

Allgemein entsteht für jedes $B_r := R^{r-1}U$ mit $r \geq 1$ ein Block der Form $\Psi_{s_*, \dots, s_{*+r-1}}(m_i\tau)$. Somit erhält man für ein Wort $w = B_{r_1} \dots B_{r_k}$ mit $l = r_1 + \dots + r_k$ die Darstellung:

$$G_{s_1, \dots, s_l}^{B_{r_1} \dots B_{r_k}}(\tau) = \sum_{m_1 > \dots > m_k > 0} \Psi_{s_1, \dots, s_{r_1}}(m_1\tau) \cdot \dots \cdot \Psi_{s_{l-r_k+1}, \dots, s_l}(m_k\tau).$$

4. Multiple Eisensteinreihen

Um nun also die Fourierreihe von Multiplen Eisensteinreihen zu berechnen, müssen wir die entstehenden Terme obiger Form zunächst noch weiter berechnen, damit wir Lemma 4.3.4 anwenden können. Dazu betrachten wir wieder den Fall $l = 2$ exemplarisch. Dort hatten wir in (4.2) die Darstellung

$$G_{s_1, s_2}(\tau) = \zeta(s_1, s_2) + g_{s_1}(\tau)\zeta(s_2) + \sum_{m_1 > 0} \Psi_{s_1, s_2}(m_1\tau) + g_{s_1, s_2}(\tau).$$

Für g_{s_1} und g_{s_1, s_2} erhalten wir mit 4.3.4 die zugehörigen Fourierreihen. Es bleibt daher noch offen, den vorletzten Term $\sum_{m_1 > 0} \Psi_{s_1, s_2}(m_1\tau)$ zu berechnen. Nach Definition gilt

$$\Psi_{s_1, s_2}(m_1\tau) = \sum_{n_1 > n_2} \frac{1}{(m_1\tau + n_1)^{s_1} (m_1\tau + n_2)^{s_2}}.$$

Für den inneren Term lässt sich, da $n_1 \neq n_2$, eine Partialbruchzerlegung der folgenden Form berechnen:

$$\frac{1}{(m\tau + n_1)^{s_1} (m\tau + n_2)^{s_2}} = \sum_{h=1}^{s_1} \frac{a_h}{(m\tau + n_1)^h} + \sum_{h=1}^{s_2} \frac{b_h}{(m\tau + n_2)^h}$$

mit $a_h, b_h \in \mathbb{Q}$. Summiert man diese nun über $n_1 > n_2$ so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Psi_{s_1, s_2}(m_1\tau) &= \sum_{n_1 > n_2} \left(\sum_{h=1}^{s_1} \frac{a_h}{(m_1\tau + n_1)^h} + \sum_{h=1}^{s_2} \frac{b_h}{(m_1\tau + n_2)^h} \right) \\ &= \sum_{h=1}^{s_1} c_h \Psi_h(m_1\tau) + \sum_{h=1}^{s_2} d_h \Psi_h(m_1\tau), \end{aligned}$$

wobei die hier entstehenden $c_h, d_h \in \mathbb{R}$, wie wir später sehen, rationale Vielfache von Zeta-Werten sind. Hat man nun diese Form und summiert über alle $m_1 > 0$, so erhält man in den Summen jeweils wieder $g_h(\tau)$, bei denen man wieder das Lemma 4.3.4 anwenden kann, um somit insgesamt die Fourierreihe der Doppel Eisensteinreihen zu erhalten.

Motiviert durch dieses Vorgehen, betrachten wir daher im nächsten Abschnitt Partialbruchzerlegungen der gewünschten Form, um dann im darauffolgenden Abschnitt diese Darstellung explizit für die Fälle $l = 2, 3$ zu präsentieren.

4.4. Partialbruchzerlegungen

Dieser Abschnitt beschreibt das allgemeine Vorgehen, um für paarweise verschiedene $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{Z}$ Partialbruchzerlegungen von $((x + n_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x + n_l)^{s_l})^{-1}$ zu berechnen. Aus der Analysis ist bekannt (siehe z.B. [Kön04] S. 37), dass man für die l

unterschiedlichen reellen Nullstellen im Nenner mit Vielfachen s_i eine eindeutige Darstellung der Form

$$\frac{1}{(x+n_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x+n_l)^{s_l}} = \sum_{k=1}^l \sum_{h=1}^{s_k} \frac{a_{k,h}}{(x+n_k)^h} \quad (4.4)$$

mit $a_{h,k} \in \mathbb{Q}$ erhält. Wir werden dies zunächst explizit für $l = 2$ berechnen und erkennen, dass sich die Fälle $l > 2$ auf diesen Fall zurückführen lassen.

Lemma 4.4.1. *Für $s \geq 1$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq b$ gilt:*

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)^s} = \frac{(-1)^s}{(a-b)^s(x+a)} + \sum_{h=1}^s \frac{(-1)^{s-h}}{(a-b)^{s-h+1}(x+b)^h}.$$

Beweis. Diese Aussage beweisen wir per Induktion über s . Für $s = 1$ ist diese Aussage offensichtlich:

$$\frac{(-1)^1}{(a-b)(x+a)} + \frac{(-1)^{1-1}}{(a-b)^{1-1+1}(x+b)^1} = \frac{-x-b+x+a}{(a-b)(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)}.$$

Sei die Aussage nun also für $s-1$ wahr. Man rechnet direkt nach:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+a)(x+b)^s} &= \frac{1}{x+b} \frac{1}{(x+a)(x+b)^{s-1}} \\ &= \frac{1}{x+b} \left(\frac{(-1)^{s-1}}{(a-b)^{s-1}(x+a)} + \sum_{h=1}^{s-1} \frac{(-1)^{s-1-h}}{(a-b)^{s-h}(x+b)^h} \right) \\ &= \frac{1}{x+b} \left(\frac{(-1)^{s-1}}{(a-b)^{s-1}(x+a)} + \sum_{h=2}^s \frac{(-1)^{s-h}}{(a-b)^{s-h+1}(x+b)^{h-1}} \right) \\ &= \frac{(-1)^{s-1}}{(a-b)^{s-1}} \frac{1}{(x+a)(x+b)} + \sum_{h=2}^s \frac{(-1)^{s-h}}{(a-b)^{s-h+1}(x+b)^h} \\ &= \frac{(-1)^{s-1}}{(a-b)^{s-1}} \left(\frac{(-1)}{(a-b)(x+a)} + \frac{1}{(a-b)(x+b)} \right) + \sum_{h=2}^s \frac{(-1)^{s-h}}{(a-b)^{s-h+1}(x+b)^h} \\ &= \frac{(-1)^s}{(a-b)^s(x+a)} + \sum_{h=1}^s \frac{(-1)^{s-h}}{(a-b)^{s-h+1}(x+b)^h}. \end{aligned}$$

□

Hiermit können wir nun die allgemeine Form berechnen:

Lemma 4.4.2. *Es gilt für $r, s \geq 1$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq b$:*

$$\frac{1}{(x+a)^r(x+b)^s} = \sum_{h+p=r+s} \left(\frac{(-1)^s \binom{p-1}{s-1}}{(a-b)^p(x+a)^h} + \frac{(-1)^{p-r} \binom{p-1}{r-1}}{(a-b)^p(x+b)^h} \right).$$

4. Multiple Eisensteinreihen

Beweis. Wir schreiben die Aussage zunächst um:

$$\frac{1}{(x+a)^r(x+b)^s} = \sum_{h=1}^r \frac{(-1)^s \binom{r+s-h-1}{s-1}}{(a-b)^{r+s-h}(x+a)^h} + \sum_{h=1}^s \frac{(-1)^{s-h} \binom{r+s-h-1}{r-1}}{(a-b)^{r+s-h}(x+b)^h}.$$

Diese Aussage beweisen wir nun für ein festes s per Induktion über r . Der Induktionsanfang ist dabei durch 4.4.1 bereits bewiesen. Wir nehmen also an, dass die Aussage für ein fixes s und $r-1$ bewiesen ist. Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+a)^r(x+b)^s} &= \frac{1}{(x+a)} \frac{1}{(x+a)^{r-1}(x+b)^s} \\ &= \frac{1}{(x+a)} \left(\sum_{h=1}^{r-1} \frac{(-1)^s \binom{r+s-h-2}{s-1}}{(a-b)^{r+s-h-1}(x+a)^h} + \sum_{h=1}^s \frac{(-1)^{s-h} \binom{r+s-h-2}{r-2}}{(a-b)^{r+s-h-1}(x+b)^h} \right) \\ &= \frac{1}{(x+a)} \left(\sum_{h=2}^r \frac{(-1)^s \binom{r+s-h-1}{s-1}}{(a-b)^{r+s-h}(x+a)^{h-1}} + \sum_{h=1}^s \frac{(-1)^{s-h} \binom{r+s-h-2}{r-2}}{(a-b)^{r+s-h-1}(x+b)^h} \right) \\ &= \sum_{h=2}^r \frac{(-1)^s \binom{r+s-h-1}{s-1}}{(a-b)^{r+s-h}(x+a)^h} + \sum_{h=1}^s \left(\frac{(-1)^{s-h} \binom{r+s-h-2}{r-2}}{(a-b)^{r+s-h-1}} \frac{1}{(x+a)(x+b)^h} \right). \end{aligned}$$

Die erste Summe entspricht dabei, bis auf den Term mit $h=1$, dem gewünschten ersten Teil. Wir betrachten daher noch die zweite Summe einzeln und benutzen dabei wieder Lemma 4.4.1. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\sum_{h=1}^s \left(\frac{(-1)^{s-h} \binom{r+s-h-2}{r-2}}{(a-b)^{r+s-h-1}} \frac{1}{(x+a)(x+b)^h} \right) \\ &= \sum_{h=1}^s \frac{(-1)^{s-h} \binom{r+s-h-2}{r-2}}{(a-b)^{r+s-h-1}} \frac{(-1)^h}{(a-b)^h(x+a)} + \sum_{h=1}^s \frac{(-1)^{s-h} \binom{r+s-h-2}{r-2}}{(a-b)^{r+s-h-1}} \sum_{k=1}^h \frac{(-1)^{h-k}}{(a-b)^{h-k+1}(x+b)^k} \\ &= \frac{(-1)^s}{(a-b)^{r+s-1}(x+a)} \sum_{h=1}^s \binom{r+s-h-2}{r-2} + \sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^h \frac{(-1)^{s-k} \binom{r+s-h-2}{r-2}}{(a-b)^{r+s-k}(x+b)^k}. \end{aligned}$$

Für den ersten Teil benötigt man die Identität

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{m} = \binom{n+m+1}{n+1},$$

welche sich leicht zusammen mit den üblichen Rechenregeln für Binomialkoeffizienten per Induktion über m beweisen lässt. Dabei ist der Induktionsschritt gegeben durch

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{n} &= \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} + \binom{n+m+1}{n} \\ &= \binom{n+m+1}{n+1} + \binom{n+m+1}{n} = \binom{n+m+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Damit erhält man den oben fehlenden Term für $h = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^s}{(a-b)^{r+s-1}(x+a)} \sum_{h=1}^s \binom{r-2+s-h}{r-2} &= \frac{(-1)^s}{(a-b)^{r+s-1}(x+a)} \sum_{h=0}^{s-1} \binom{r-2+h}{r-2} \\ &= \frac{(-1)^s}{(a-b)^{r+s-1}(x+a)} \binom{r+s-2}{s-1}. \end{aligned}$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass folgende Identität gilt:

$$\sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^h \frac{(-1)^{s-k} \binom{r+s-h-2}{r-2}}{(a-b)^{r+s-k}(x+b)^k} = \sum_{h=1}^s \frac{(-1)^{s-h} \binom{r+s-h-1}{r-1}}{(a-b)^{r+s-h}(x+b)^h}.$$

Da $\sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^h = \sum_{k=1}^s \sum_{k=h}^s$ erhalten wir für die linke Seite:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^h \frac{(-1)^{s-k} \binom{r+s-h-2}{r-2}}{(a-b)^{r+s-k}(x+b)^k} &= \sum_{k=1}^s \left(\sum_{h=k}^s \binom{r+s-h-2}{r-2} \right) \frac{(-1)^{s-k}}{(a-b)^{r+s-k}(x+b)^k} \\ &= \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=0}^{s-h} \binom{r-2+j}{r-2} \right) \frac{(-1)^{s-k}}{(a-b)^{r+s-k}(x+b)^k} \\ &= \sum_{k=1}^s \binom{r+s-k-1}{r-1} \frac{(-1)^{s-k}}{(a-b)^{r+s-k}(x+b)^k} \\ &= \sum_{h=1}^s \frac{(-1)^{s-h} \binom{r+s-h-1}{r-1}}{(a-b)^{r+s-h}(x+b)^h}. \end{aligned}$$

□

Satz 4.4.3. Für $s_1, \dots, s_l \geq 1$, $k = s_1 + \dots + s_l$ und paarweise verschiedene $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{1}{(x+n_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x+n_l)^{s_l}} = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_l=k \\ 1 \leq e \leq l}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^l \frac{\binom{k_j-1}{s_j-1}}{(n_e - n_j)^{k_j}} \right) \frac{(-1)^{k-s_e}}{(x+n_e)^{k_e}}. \quad (4.5)$$

Beweis. Wie am Anfang des Kapitels erwähnt, besitzt das Produkt auf der linken Seite eine eindeutige Darstellung der Form

$$\frac{1}{(x+n_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x+n_l)^{s_l}} = \sum_{g=1}^l \sum_{h=1}^{s_g} \frac{a_{g,h}^{s_1, \dots, s_l}}{(x+n_g)^h} \quad (4.6)$$

4. Multiple Eisensteinreihen

mit $a_{g,h}^{s_1,\dots,s_l} \in \mathbb{Q}$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Partialbruchentwicklung und der Symmetrie des Produktes auf der linken Seite, können wir uns auf die Berechnung von $a_{1,h}^{s_1,\dots,s_l}$ beschränken. Es gilt daher zu zeigen, dass

$$a_{1,h}^{s_1,\dots,s_l} = (-1)^{s_2+\dots+s_l} \sum_{k_2+\dots+k_l=k-h} \prod_{j=2}^l \frac{\binom{k_j-1}{s_j-1}}{(n_1 - n_j)^{k_j}}, \quad (4.7)$$

da dies genau der Koeffizient von $(x + n_1)^{-h}$ auf der rechten Seite von (4.5) ist.

Klar ist, dass $a_{1,h}^{s_1,\dots,s_l} = 0$ für $h > s_1$ ist, da es in dem Fall in der Darstellung $k_2 + \dots + k_l = k - h$ mindestens ein $2 \leq j \leq l$ gibt mit $k_j < s_j$ und somit $\binom{k_j-1}{s_j-1} = 0$. Somit erhält man durch den Satz eine Darstellung der Form (4.6).

Wir werden (4.7) wieder per Induktion über l beweisen und im Induktionsschritt 4.4.2 verwenden. Der Induktionsanfang $l = 2$ ist dabei durch das Lemma 4.4.2 bereits bewiesen.

Sei daher (4.7) für ein festes l , paarweise verschiedene $n_1, \dots, n_l$ und $s_1, \dots, s_l \geq 1$ wahr. Dann gilt für ein $s_{l+1} \geq 1$ und ein n_{l+1} mit $n_{l+1} \neq n_j$ für $1 \leq n \leq l$ nach Lemma 4.4.2:

$$\frac{a_{1,h}^{s_1,\dots,s_l}}{(x + n_1)^h} \cdot \frac{1}{(x + n_{l+1})^{s_{l+1}}} = a_{1,h}^{s_1,\dots,s_l} \left(\sum_{h'+k_{l+1}=h+s_{l+1}} \frac{(-1)^{s_{l+1}} \binom{k_{l+1}-1}{s_{l+1}-1}}{(n_1 - n_{l+1})^{k_{l+1}} (x + n_1)^{h'}} + \dots \right),$$

wobei die restlichen „...“-Terme kein $(x + n_1)^{-1}$ enthalten und somit irrelevant sind für die weiteren Betrachtungen.

Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich somit als Term auf der rechten Seite:

$$(-1)^{s_2+\dots+s_l} \sum_{k_2+\dots+k_l=k-h} \prod_{j=2}^l \frac{\binom{k_j-1}{s_j-1}}{(n_1 - n_j)^{k_j}} \sum_{h'+k_{l+1}=h+s_{l+1}} \frac{(-1)^{s_{l+1}} \binom{k_{l+1}-1}{s_{l+1}-1}}{(n_1 - n_{l+1})^{k_{l+1}} (x + n_1)^{h'}}.$$

Statt über den Bereich $k_2 + \dots + k_l = k - h$ und $h' + k_{l+1} = h + s_{l+1}$ kann hier nun über $k_2 + \dots + k_l + k_{l+1} = k + s_{l+1} - h'$ summiert werden, da $h = h' + k_{l+1} - s_{l+1}$. Es ergibt sich somit genau das Gewünschte:

$$(-1)^{s_1+\dots+s_l+s_{l+1}} \sum_{k_2+\dots+k_l+k_{l+1}=k+s_{l+1}-h'} \prod_{j=2}^{l+1} \frac{\binom{k_j-1}{s_j-1}}{(n_1 - n_j)^{k_j}} \frac{1}{(x + n_1)^{h'}} = \frac{a_{1,h'}^{s_1,\dots,s_{l+1}}}{(x + n_1)^{h'}}.$$

□

Bemerkung 4.4.4. Für die Aussage von Satz 4.4.3 sind dem Author keine Referenzen bekannt. Daher wurde hier ein eigenständiger Beweis angegeben.

Notation 4.4.5. Da im weiteren Verlauf durch den Satz 4.4.3 oft Produkte von Binomialkoeffizienten auftauchen, definieren wir hierzu

$$\begin{bmatrix} a_1, \dots, a_k \\ b_1, \dots, b_k \end{bmatrix} := \prod_{j=1}^k \binom{a_j - 1}{b_j - 1}.$$

Korollar 4.4.6. Für $s_1, s_2, s_3 \geq 1$, $k = s_1 + s_2 + s_3$ und paarweise verschiedenen $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + n_1)^{s_1}(x + n_2)^{s_2}(x + n_3)^{s_3}} &= \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left(\frac{(-1)^{s_2+s_3} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_2, s_3 \end{bmatrix}}{(n_1 - n_2)^{k_2}(n_1 - n_3)^{k_3}} \right) \frac{1}{(x + n_1)^{k_1}} \\ &+ \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left(\frac{(-1)^{s_1+s_3+k_2} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_1, s_3 \end{bmatrix}}{(n_1 - n_2)^{k_2}(n_2 - n_3)^{k_3}} \right) \frac{1}{(x + n_2)^{k_1}} \\ &+ \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left(\frac{(-1)^{s_1+s_2+k_2+k_3} \begin{bmatrix} k_3, k_2 \\ s_1, s_2 \end{bmatrix}}{(n_1 - n_3)^{k_3}(n_2 - n_3)^{k_2}} \right) \frac{1}{(x + n_3)^{k_1}}. \end{aligned}$$

Beweis. Dies ist einfach eine Umsortierung der Terme aus dem vorherigen Satz. Es gilt nach 4.4.3 für $l = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x + n_1)^{s_1}(x + n_2)^{s_2}(x + n_3)^{s_3}} &= \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \frac{\begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_2, s_3 \end{bmatrix}}{(n_1 - n_2)^{s_2}(n_1 - n_3)^{s_3}} \frac{(-1)^{k-s_1}}{(x + n_1)^{k_1}} \\ &+ \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \frac{\begin{bmatrix} k_1, k_3 \\ s_1, s_3 \end{bmatrix}}{(n_2 - n_1)^{s_1}(n_2 - n_3)^{s_3}} \frac{(-1)^{k-s_2}}{(x + n_2)^{k_2}} \\ &+ \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \frac{\begin{bmatrix} k_1, k_3 \\ s_1, s_3 \end{bmatrix}}{(n_3 - n_1)^{s_1}(n_3 - n_2)^{s_2}} \frac{(-1)^{k-s_3}}{(x + n_3)^{k_3}}. \end{aligned}$$

Durch Vertauschen von k_2 und k_1 in der zweiten Summe und durch Vertauschen von k_3 und k_1 in der dritten Summe, erhalten wir diese Aussage. Die Potenzen der (-1) entstehen dadurch, dass im Nenner jeweils die Differenzen entsprechend umgedreht werden. $\square$

Bemerkung 4.4.7. Mit Hilfe von Partialbruchzerlegungen lassen sich unter anderem die Shuffle Relationen für Multiple Zeta-Werte exakt angeben. So kann man die Shuffle Relation (siehe (A.2))

$$\zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2) = \sum_{r=2}^{k-1} \left(\binom{r-1}{s_1-1} + \binom{r-1}{s_2-1} \right) \zeta(r, s_1 + s_2 - r), \quad (4.8)$$

welche durch die Darstellung durch iterierte Integrale entstand, direkt aus der Partialbruchzerlegung aus Lemma 4.4.2 erhalten:

$$\frac{1}{(x + a)^{s_1}(x + b)^{s_2}} = \sum_{h+p=s_1+s_2} \left(\frac{(-1)^{s_2} \binom{p-1}{s_2-1}}{(a-b)^p(x+a)^h} + \frac{(-1)^{p-s_1} \binom{p-1}{s_1-1}}{(a-b)^p(x+b)^h} \right),$$

4. Multiple Eisensteinreihen

indem man $x = 0$, $a = n_1$ und $b = -n_2$ setzt und beide Seiten über $\sum_{n_1, n_2 > 0}$ summiert. Die linke Seite ergibt sich dann genau zu $\zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2)$ und die rechte Seite ergibt die rechte Seite von (4.8).

Man kann daher die allgemeine Partialbruchzerlegung aus Satz 4.4.3 benutzen, um für beliebige Produkte eine exakte Darstellung für die Shuffle Relation zu erhalten. Wir gehen darauf in dieser Arbeit aber nicht weiter ein. Analog können so auch die Shuffle Relationen für die Multiplen Eisensteinreihen gezeigt werden, bei denen nur „absolut konvergente Terme“ auftauchen, wie es in Bemerkung 4.1.7 beschrieben wurde.

4.5. Fourierentwicklung II

Mit Hilfe der allgemeinen Partialbruchzerlegungen aus Satz 4.4.3 können wir nun die $\Psi_{*,*}(\tau)$ und $\Psi_{*,*,*}(\tau)$ als Linearkombinationen von $\Psi_*(\tau)$ darstellen.

Korollar 4.5.1. *Für $s_1, s_2, s_3 > 1$ gilt:*

$$\begin{aligned}\Psi_{s_1, s_2}(x) &= \sum_{k_1+k_2=s_1+s_2} \left((-1)^{s_2} \begin{bmatrix} k_2 \\ s_2 \end{bmatrix} + (-1)^{k_2-s_1} \begin{bmatrix} k_2 \\ s_1 \end{bmatrix} \right) \zeta(k_2) \Psi_{k_1}(x), \\ \Psi_{s_1, s_2, s_3}(x) &= (-1)^{s_2} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left((-1)^{s_3} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_2, s_3 \end{bmatrix} + (-1)^{s_1+k_2+k_3} \begin{bmatrix} k_3, k_2 \\ s_1, s_2 \end{bmatrix} \right) \zeta(k_3, k_2) \Psi_{k_1}(x) \\ &\quad + (-1)^{s_1+s_3} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} (-1)^{k_2} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_1, s_3 \end{bmatrix} \zeta(k_2) \zeta(k_3) \Psi_{k_1}(x).\end{aligned}$$

Beweis. Für den ersten Teil erhält man mit Lemma 4.4.2:

$$\begin{aligned}\Psi_{s_1, s_2}(x) &= \sum_{\substack{n_1 > n_2 \\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{(x+n_1)^{s_1} (x+n_2)^{s_2}} \\ &= \sum_{\substack{n_1 > n_2 \\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}}} \sum_{h+p=s_1+s_2} \left(\frac{(-1)^{s_2} \binom{p-1}{s_2-1}}{(n_1-n_2)^p (x+n_1)^h} + \frac{(-1)^{p-s_1} \binom{p-1}{s_1-1}}{(n_1-n_2)^p (x+n_2)^h} \right) \\ &= \sum_{h+p=s_1+s_2} \sum_{\substack{c>0 \\ c, n_2 \in \mathbb{Z}}} \left(\frac{(-1)^{s_2} \binom{p-1}{s_2-1}}{c^p (x+n_2+c)^h} + \frac{(-1)^{p-s_1} \binom{p-1}{s_1-1}}{c^p (x+n_2)^h} \right) \\ &= \sum_{h+p=s_1+s_2} \left(\sum_{\substack{c>0 \\ c, n \in \mathbb{Z}}} \frac{(-1)^{s_2} \binom{p-1}{s_2-1}}{c^p (x+n)^h} + \sum_{\substack{c>0 \\ c, n \in \mathbb{Z}}} \frac{(-1)^{p-s_1} \binom{p-1}{s_1-1}}{c^p (x+n)^h} \right) \\ &= \sum_{h+p=s_1+s_2} \left((-1)^{s_2} \binom{p-1}{s_2-1} + (-1)^{p-s_1} \binom{p-1}{s_1-1} \right) \zeta(p) \Psi_h(x) \\ &= \sum_{k_1+k_2=s_1+s_2} \left((-1)^{s_2} \begin{bmatrix} k_2 \\ s_2 \end{bmatrix} + (-1)^{k_2-s_1} \begin{bmatrix} k_2 \\ s_1 \end{bmatrix} \right) \zeta(k_2) \Psi_{k_1}(x),\end{aligned}$$

wobei hier die Vertauschung der Summanden erlaubt ist, da die auftretenden Koeffizienten für die nicht absolut konvergenten Fälle $h = 1$ oder $p = 1$ verschwinden. (Siehe z.B. auch [GKZ06] S. 22).

4. Multiple Eisensteinreihen

Für den zweiten Teil zeigen wir:

$$\begin{aligned}\Psi_{s_1, s_2, s_3}(x) &= \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left((-1)^{s_2+s_3} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_2, s_3 \end{bmatrix} \zeta(k_3, k_2) \right) \Psi_{k_1}(x) \\ &+ \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left((-1)^{s_2+s_3+k_2} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_1, s_3 \end{bmatrix} \zeta(k_2) \zeta(k_3) \right) \Psi_{k_1}(x) \\ &+ \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left((-1)^{s_2+s_3+k_2+k_3} \begin{bmatrix} k_3, k_2 \\ s_1, s_2 \end{bmatrix} \zeta(k_2, k_3) \right) \Psi_{k_1}(x),\end{aligned}$$

womit durch Vertauschen von k_2 und k_3 im letzten Summanden das zu Zeigende folgt. Setzt man das Ergebnis aus Korollar 4.4.6 in die Definition von $\Psi_{s_1, s_2, s_3}(x)$ ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Psi_{s_1, s_2, s_3}(x) &= \sum_{\substack{n_1 > n_2 > n_3 \\ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{(x+n_1)^{s_1} (x+n_2)^{s_2} (x+n_3)^{s_3}} \\ &= \sum_{\substack{n_1 > n_2 > n_3 \\ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}}} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left(\frac{(-1)^{s_2+s_3} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_2, s_3 \end{bmatrix}}{(n_1-n_2)^{k_2} (n_1-n_3)^{k_3}} \right) \frac{1}{(x+n_1)^{k_1}} \\ &+ \sum_{\substack{n_1 > n_2 > n_3 \\ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}}} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left(\frac{(-1)^{s_1+s_3+k_2} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_1, s_3 \end{bmatrix}}{(n_1-n_2)^{k_2} (n_2-n_3)^{k_3}} \right) \frac{1}{(x+n_2)^{k_1}} \\ &+ \sum_{\substack{n_1 > n_2 > n_3 \\ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}}} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left(\frac{(-1)^{s_1+s_2+k_2+k_3} \begin{bmatrix} k_3, k_2 \\ s_1, s_2 \end{bmatrix}}{(n_1-n_3)^{k_3} (n_2-n_3)^{k_2}} \right) \frac{1}{(x+n_3)^{k_1}}.\end{aligned}$$

Hier ist das Argument das gleiche wie oben. Betrachtet man den ersten Term, so wird durch die Summation über $n_1 > n_2 > n_3$ der Term $\frac{1}{(n_1-n_2)^{k_2} (n_1-n_3)^{k_3}}$ zu $\zeta(k_3, k_2)$. Analog bei den beiden anderen Termen. Das vertauschen der Terme ist wieder erlaubt, da die nicht absolut konvergenten Teile wegfallen.

□

Es wird erkennbar, dass man allgemein ein $\Psi_{s_1, \dots, s_l}(x)$ als Linearkombination von Produkten von Multiplen Zeta-Werten und $\Psi_*(x)$ darstellen kann, da in der allgemeinen Form der Partialbruchzerlegungen im Nenner auch Faktoren der Form $(n_i - n_j)$ mit $i < j$ auftauchen. Summiert man über alle Paare $n_i > \dots > n_l$, so erhält man stets Multiple Zeta-Werte bzw. Produkte von Multiplen Zeta-Werten.

Wir wollen dies hier kurz ausführen.

Satz 4.5.2. Für $s_1, \dots, s_l > 1$ mit $k = s_1 + \dots + s_l$ gibt es $\lambda_h^{s_1, \dots, s_l} \in \mathfrak{Z}_{k-h}$ mit $0 < h \leq k$, so dass:

$$\Psi_{s_1, \dots, s_l}(x) = \sum_{h=1}^k \lambda_h^{s_1, \dots, s_l} \Psi_h(x).$$

Beweis. Setzt man die allgemeine Form der Partialbruchzerlegung 4.4.3 in die Definition von $\Psi_{s_1, \dots, s_l}$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\Psi_{s_1, \dots, s_l}(x) &= \sum_{\substack{n_1 > \dots > n_l \\ n_i \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{(x + n_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x + n_l)^{s_l}} \\
&= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = k \\ 1 \leq e \leq l \\ n_1 > \dots > n_l \\ n_i \in \mathbb{Z}}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^l \frac{\binom{k_j-1}{s_j-1}}{(n_e - n_j)^{k_j}} \right) \frac{(-1)^{k-s_e}}{(x + n_e)^{k_e}} \\
&= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = k \\ 1 \leq e \leq l \\ n_1 > \dots > n_l \\ n_i \in \mathbb{Z}}} \left[\begin{matrix} k_1, \dots, k_{e-1} \\ s_1, \dots, s_{e-1} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{e-1} \frac{1}{(n_e - n_j)^{k_j}} \left[\begin{matrix} k_{e+1}, \dots, k_l \\ s_{e+1}, \dots, s_l \end{matrix} \right] \prod_{j=e+1}^l \frac{1}{(n_e - n_j)^{k_j}} \frac{(-1)^{k-s_e}}{(x + n_e)^{k_e}} \\
&= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = k \\ 1 \leq e \leq l \\ n_1 > \dots > n_l \\ n_i \in \mathbb{Z}}} \left[\begin{matrix} k_1, \dots, k_{e-1}, k_{e+1}, \dots, k_l \\ s_1, \dots, s_{e-1}, s_{e+1}, \dots, s_l \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{e-1} \frac{(-1)^{k_j}}{(n_j - n_e)^{k_j}} \prod_{j=e+1}^l \frac{1}{(n_e - n_j)^{k_j}} \frac{(-1)^{k-s_e}}{(x + n_e)^{k_e}}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun $n'_i = n_i - n_e$ für $1 \leq i \leq e-1$ und $n'_i = n_e - n_i$ für $e+1 \leq i \leq l$, dann ist die Summation von $n_1 > \dots > n_l$ und alle $n_i \in \mathbb{Z}$ gleichbedeutend mit der Summation von $n_e \in \mathbb{Z}$, $n'_1 > \dots > n'_{e-1} > 0$ und $n'_l > n'_{l-1} > \dots > n'_{e+1} > 0$. So erhalten wir analog zu den Fällen $l = 2, 3$ wieder Produkte von Zeta-Werten:

$$\begin{aligned}
\Psi_{s_1, \dots, s_l}(x) &= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = k \\ 1 \leq e \leq l \\ n'_1 > \dots > n'_{e-1} > 0 \\ n'_l > \dots > n'_{e+1} > 0 \\ n_e \in \mathbb{Z}}} \left[\begin{matrix} k_1, \dots, k_{e-1}, k_{e+1}, \dots, k_l \\ s_1, \dots, s_{e-1}, s_{e+1}, \dots, s_l \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{e-1} \frac{(-1)^{k_j}}{n_j'^{k_j}} \prod_{j=e+1}^l \frac{1}{n_j'^{k_j}} \frac{(-1)^{k-s_e}}{(x + n_e)^{k_e}} \\
&= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = k \\ 1 \leq e \leq l \\ n_e \in \mathbb{Z}}} \left[\begin{matrix} k_1, \dots, k_{e-1}, k_{e+1}, \dots, k_l \\ s_1, \dots, s_{e-1}, s_{e+1}, \dots, s_l \end{matrix} \right] (-1)^{k_1 + \dots + k_{e-1}} \zeta(k_1, \dots, k_{e-1}) \zeta(k_l, \dots, k_{e+1}) \frac{(-1)^{k-s_e}}{(x + n_e)^{k_e}} \\
&= \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = k \\ 1 \leq e \leq l}} \left[\begin{matrix} k_1, \dots, k_{e-1}, k_{e+1}, \dots, k_l \\ s_1, \dots, s_{e-1}, s_{e+1}, \dots, s_l \end{matrix} \right] (-1)^{k_e + \dots + k_l - s_e} \zeta(k_1, \dots, k_{e-1}) \zeta(k_l, \dots, k_{e+1}) \Psi_{k_e}(x) \\
&=: \sum_{h=1}^k \lambda_h^{s_1, \dots, s_l} \Psi_h(x).
\end{aligned}$$

Die $\lambda_h^{s_1, \dots, s_l}$ liegen somit in $\mathfrak{Z}_{k-h}$, da sie rationale Linearkombinationen von Produkten von Multiplen Zeta-Werten $\zeta(k_1, \dots, k_{e-1}) \zeta(k_l, \dots, k_{e+1})$ sind, mit $k_1 + \dots + k_{e-1} + k_{e+1} + \dots + k_l = k - h$. $\square$

4. Multiple Eisensteinreihen

Damit können wir jetzt die Konstruktion der Berechnung der Fourierreihe von Multiplen Eisensteinreihen zusammenfassen:

Konstruktion 4.5.3. Sind $s_1, \dots, s_l > 2$ gegeben, so kann man die Fourierreihe von $G_{s_1, \dots, s_l}(\tau)$ folgendermaßen berechnen:

- (i) Man schreibt $G_{s_1, \dots, s_l}(\tau)$ als Summe der 2^l -Teile $G_{s_1, \dots, s_l}^w(\tau)$, wobei $w \in W_l$ alle Wörter der Länge l durchläuft, die aus den beiden Buchstaben R und U bestehen.
- (ii) Endet ein Wort w auf dem Buchstaben U , so lässt sich mit $B_r := R^{r-1}U$ das Wort w schreiben als $w = B_{r_1} \dots B_{r_k}$ mit $l = r_1 + \dots + r_k$ und $r_i \geq 1$. Es gilt dann nach der Diskussion aus Abschnitt 4.3:

$$\begin{aligned} G_{s_1, \dots, s_l}^w(\tau) &= \sum_{m_1 > \dots > m_k > 0} \Psi_{s_1, \dots, s_{r_1}}(m_1 \tau) \cdot \dots \cdot \Psi_{s_{l-r_k+1}, \dots, s_l}(m_k \tau) \\ &=: \sum_{m_1 > \dots > m_k > 0} \Psi^1(m_1 \tau) \cdot \dots \cdot \Psi^k(m_k \tau). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Mit Satz 4.5.2 kann man die einzelnen Ψ^j , $1 \leq j \leq k$ schreiben als

$$\Psi^j(m_k \tau) = \sum_{h_j > 0} \lambda_{h_j}^j \Psi_{h_k}(m_k \tau),$$

wobei die λ_h^j in $\mathfrak{Z}$ liegen und nur für endlich viele h nicht verschwinden. Damit ergibt sich (4.9) zu:

$$\begin{aligned} G_{s_1, \dots, s_l}^w(\tau) &= \sum_{h_1, \dots, h_k} \sum_{m_1 > \dots > m_k > 0} \lambda_{h_1}^1 \cdot \dots \cdot \lambda_{h_k}^k \Psi_{h_1}(m_1 \tau) \cdot \dots \cdot \Psi_{h_k}(m_k \tau) \\ &= \sum_{h_1, \dots, h_k} \lambda_{h_1}^1 \cdot \dots \cdot \lambda_{h_k}^k g_{h_1, \dots, h_k}(\tau), \end{aligned}$$

da per Definition $g_{h_1, \dots, h_k}(\tau) = \sum_{m_1 > \dots > m_k > 0} \Psi_{h_1}(m_1 \tau) \cdot \dots \cdot \Psi_{h_k}(m_k \tau)$. Mit Satz 4.3.4 erhält man die Fourierreihe von $g_{h_1, \dots, h_k}(\tau)$ und somit auch die Fourierreihe von $G_{s_1, \dots, s_l}^w(\tau)$:

$$G_{s_1, \dots, s_l}^w(\tau) = \sum_{h_1, \dots, h_k} \lambda_{h_1}^1 \cdot \dots \cdot \lambda_{h_k}^k \frac{(-2\pi i)^{h_1 + \dots + h_k}}{(h_1 - 1)! \cdot \dots \cdot (h_k - 1)!} \sum_{n > 0} \sigma_{h_1-1, \dots, h_k-1}(n) q^n.$$

- (iii) Endet w auf einem R , d.h. $w = w_1 R^r$, wobei $w_1 \in W_{l-r}$ entweder das leere Wort ist oder auf U endet, so gilt:

$$G_{s_1, \dots, s_l}^w(\tau) = G_{s_1, \dots, s_{l-r}}^{w_1}(\tau) \cdot \zeta(s_{l-r+1}, \dots, s_l).$$

Ist w_1 nicht leer, so kann die Fourierreihe von $G_{s_1, \dots, s_{l-r}}^{w_1}(\tau)$ mit (ii) berechnet werden.

In den folgenden Kapiteln wollen wir stets, dass die Fourierkoeffizienten (sofern möglich) der Multiplen Eisensteinreihen rational sind. Dazu wollen wir die Potenzen von π , die durch die Fourierreihen von $g_{s_1, \dots, s_l}$ entstehen, aus den Fourierkoeffizienten herausteilen. Hierfür führen wir folgende Bezeichnung, analog zur Notation in [Kan11], ein:

Notation 4.5.4.

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}(s_1, \dots, s_l) &:= (-2\pi i)^{-k} \zeta(s_1, \dots, s_l), \\ \tilde{g}_{s_1, \dots, s_l}(n) &:= (-2\pi i)^{-k} g_{s_1, \dots, s_l}(n), \\ \tilde{G}_{s_1, \dots, s_l}(\tau) &:= (-2\pi i)^{-k} G_{s_1, \dots, s_l}(\tau),\end{aligned}$$

wobei hier wieder $k = s_1 + \dots + s_l$. Zusätzlich bezeichnen wir analog den Raum $\tilde{\mathfrak{Z}}$ als den $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, der durch die $\tilde{\zeta}$ aufgespannt wird.

Zusammenfassend erhalten wir folgenden Satz:

Satz 4.5.5. *Mit Konstruktion 4.5.3 kann man für $s_1, \dots, s_l > 2$ die Fourierreihe von $G_{s_1, \dots, s_l}$ algorithmisch berechnen. Dabei ist diese von der Gestalt*

$$G_{s_1, \dots, s_l} = \zeta(s_1, \dots, s_l) + \sum_{n>0} a_n q^n,$$

mit

$$a_n = \sum_{\substack{1 \leq j \leq l \\ a_1 + \dots + a_l = s_1 + \dots + s_l}} \alpha_j^{a_1, \dots, a_l} \cdot (\pi i)^{a_1 + \dots + a_j} \cdot \sigma_{a_1-1, \dots, a_j-1}(n) \cdot \zeta(a_{j+1}, \dots, a_l),$$

wobei sich die $\alpha_j^{a_1, \dots, a_l} \in \mathbb{Q}$ mit Hilfe von Satz 4.5.2 und Satz 4.4.3 explizit berechnen lassen.

Beweis. Dies folgt nun direkt aus Konstruktion 4.5.3. Die dort auftretenden $\lambda_{h_j}^j$ sind Linearkombinationen von Produkten von Multiplen Zeta-Werten, die sich mit Hilfe der Shuffle Relation aus Satz 3.1.3 als Linearkombinationen von Multiplen Zeta-Werten schreiben lassen, so dass die a_n die im Satz erwähnte Gestalt haben. $\square$

Bemerkung 4.5.6. In den folgenden Abschnitten werden wir die Fourierreihen für die Doppel als auch Triple Eisensteinreihe explizit angeben. Offen bleibt eine geschlossene Formel für die in Satz 4.5.5 auftretenden Koeffizienten $\alpha_j^{a_1, \dots, a_l}$.

Beispiel 4.5.7. Zur Verdeutlichung von Konstruktion 4.5.3 betrachten wir als Beispiel die Multiple Eisensteinreihe $G_{3,4,5,6}$. Um ihre Fourierreihe zu berechnen, müssen die $2^4 = 16$ Wörter der Länge 4 aus den Buchstaben U und R betrachtet und dazu jeweils die Fourierreihen $G_{3,4,5,6}^w$ bestimmt werden. Es gilt:

4. Multiple Eisensteinreihen

$$\begin{aligned}
G_{3,4,5,6}(\tau) &= \underbrace{\zeta(3,4,5,6)}_{R^4} + \underbrace{g_3(\tau) \cdot \zeta(4,5,6)}_{UR^3} + \underbrace{g_{3,4}(\tau) \cdot \zeta(5,6)}_{U^2R^2} + \underbrace{g_{3,4,5}(\tau) \cdot \zeta(6)}_{U^3R} \\
&+ \underbrace{g_{3,4,5,6}(\tau)}_{U^4} + \underbrace{\sum_{m>0} \Psi_{3,4}(m\tau) \cdot \zeta(5,6)}_{RUR^2} + \underbrace{\sum_{m>0} \Psi_{3,4,5}(m\tau) \cdot \zeta(6)}_{R^2UR} \\
&+ \underbrace{\sum_{m_1>m_2>0} \Psi_3(m_1\tau) \cdot \Psi_{4,5}(m_2\tau) \cdot \zeta(6)}_{URUR} + \underbrace{\sum_{m_1>m_2>0} \Psi_{3,4}(m_1\tau) \cdot \Psi_5(m_2\tau) \cdot \zeta(6)}_{RU^2R} \\
&+ \underbrace{\sum_{m>0} \Psi_{3,4,5,6}(m\tau)}_{R^3U} + \underbrace{\sum_{m_1>m_2>m_3>0} \Psi_3(m_1\tau) \cdot \Psi_{4,5}(m_2\tau) \cdot \Psi_6(m_3\tau)}_{URU^2} \\
&+ \underbrace{\sum_{m_1>m_2>0} \Psi_{3,4,5}(m_1\tau) \cdot \Psi_6(m_2\tau)}_{R^2U^2} + \underbrace{\sum_{m_1>m_2>m_3>0} \Psi_{3,4}(m_1\tau) \cdot \Psi_5(m_2\tau) \cdot \Psi_6(m_3\tau)}_{RU^3} \\
&+ \underbrace{\sum_{m_1>m_2>0} \Psi_3(m_1\tau) \cdot \Psi_{4,5,6}(m_2\tau)}_{UR^2U} + \underbrace{\sum_{m_1>m_2>0} \Psi_{3,4}(m_1\tau) \cdot \Psi_{5,6}(m_2\tau)}_{RURU} \\
&+ \underbrace{\sum_{m_1>m_2>m_3>0} \Psi_3(m_1\tau) \cdot \Psi_4(m_2\tau) \cdot \Psi_{5,6}(m_3\tau)}_{U^2RU}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun nur den Teil für das Wort $RURU$. Um die Fourierreihe von $G_{3,4,5,6}^{RURU}$ zu berechnen, müssen daher $\Psi_{3,4}$ und $\Psi_{5,6}$ als Linearkombinationen von Ψ_* dargestellt werden, da sich mit $\Psi_{3,4}(\tau) = \sum_{h=1}^6 a_h \Psi_h(\tau)$ und $\Psi_{5,6} = \sum_{j=1}^{10} b_j \Psi_j(\tau)$ ($a_h, b_j \in \mathbb{R}$) ergibt:

$$\begin{aligned}
G_{3,4,5,6}^{RURU}(\tau) &= \sum_{m_1>m_2>0} \Psi_{3,4}(m_1\tau) \cdot \Psi_{5,6}(m_2\tau) \\
&= \sum_{m_1>m_2>0} \sum_{\substack{1 \leq h \leq 6 \\ 1 \leq j \leq 10}} a_h b_j \Psi_h(m_1\tau) \Psi_j(m_2\tau) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq h \leq 6 \\ 1 \leq j \leq 10}} a_h b_j \sum_{m_1>m_2>0} \Psi_h(m_1\tau) \Psi_j(m_2\tau) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq h \leq 6 \\ 1 \leq j \leq 10}} a_h b_j g_{h,j}(\tau) = \sum_{n>0} \left(\sum_{\substack{1 \leq h \leq 6 \\ 1 \leq j \leq 10}} \frac{(-2\pi i)^{h+j} a_h b_j}{(h-1)!(j-1)!} \sigma_{h-1,j-1}(n) \right) q^n.
\end{aligned}$$

Um die a_h und b_i zu bestimmen, können wir Korollar 4.5.1 benutzen. Dort haben wir mit Hilfe der Partialbruchzerlegung aus Lemma 4.4.2 gezeigt, dass gilt:

$$\Psi_{s_1,s_2}(x) = \sum_{k_1+k_2=s_1+s_2} \left((-1)^{s_2} \begin{bmatrix} k_2 \\ s_2 \end{bmatrix} + (-1)^{k_2-s_1} \begin{bmatrix} k_2 \\ s_1 \end{bmatrix} \right) \zeta(k_2) \Psi_{k_1}(x).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Psi_{3,4}(x) &= \sum_{k_1+k_2=7} \left((-1)^4 \begin{bmatrix} k_2 \\ 4 \end{bmatrix} + (-1)^{k_2-3} \begin{bmatrix} k_2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \zeta(k_2) \Psi_{k_1}(x) \\
&= \sum_{h=1}^6 \underbrace{\left(\binom{6-h}{3} + (-1)^{4-h} \binom{6-h}{2} \right)}_{a_h} \zeta(7-h) \Psi_h(x) \\
&= 10\zeta(5)\Psi_2(x) - 2\zeta(4)\Psi_3(x) + \zeta(3)\Psi_4(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Psi_{5,6}(x) &= \sum_{k_1+k_2=11} \left((-1)^6 \begin{bmatrix} k_2 \\ 6 \end{bmatrix} + (-1)^{k_2-5} \begin{bmatrix} k_2 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \zeta(k_2) \Psi_{k_1}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{10} \underbrace{\left(\binom{10-j}{5} + (-1)^{6-j} \binom{10-j}{4} \right)}_{b_j} \zeta(11-j) \Psi_j(x) \\
&= 126\zeta(9)\Psi_2(x) - 14\zeta(8)\Psi_3(x) + 21\zeta(7)\Psi_4(x) - 4\zeta(6)\Psi_5(x) + \zeta(5)\Psi_6(x).
\end{aligned}$$

Hiermit lässt sich nun das Produkt $\Psi_{3,4}(m_1\tau) \cdot \Psi_{5,6}(m_2\tau)$ berechnen zu:

$$\begin{aligned}
\Psi_{3,4}(m_1\tau) \cdot \Psi_{5,6}(m_2\tau) &= \zeta(3)\zeta(5)\Psi_4(m_1\tau)\Psi_6(m_2\tau) - 2\zeta(4)\zeta(5)\Psi_3(m_1\tau)\Psi_6(m_2\tau) \\
&\quad + 10\zeta(5)^2\Psi_2(m_1\tau)\Psi_6(m_2\tau) - 4\zeta(3)\zeta(6)\Psi_4(m_1\tau)\Psi_5(m_2\tau) \\
&\quad + 8\zeta(4)\zeta(6)\Psi_3(m_1\tau)\Psi_5(m_2\tau) - 40\zeta(5)\zeta(6)\Psi_2(m_1\tau)\Psi_5(m_2\tau) \\
&\quad + 21\zeta(3)\zeta(7)\Psi_4(m_1\tau)\Psi_4(m_2\tau) - 42\zeta(4)\zeta(7)\Psi_3(m_1\tau)\Psi_4(m_2\tau) \\
&\quad + 210\zeta(5)\zeta(7)\Psi_2(m_1\tau)\Psi_4(m_2\tau) - 14\zeta(3)\zeta(8)\Psi_4(m_1\tau)\Psi_3(m_2\tau) \\
&\quad + 28\zeta(4)\zeta(8)\Psi_3(m_1\tau)\Psi_3(m_2\tau) - 140\zeta(5)\zeta(8)\Psi_2(m_1\tau)\Psi_3(m_2\tau) \\
&\quad + 126\zeta(3)\zeta(9)\Psi_4(m_1\tau)\Psi_2(m_2\tau) - 252\zeta(4)\zeta(9)\Psi_3(m_1\tau)\Psi_2(m_2\tau) \\
&\quad + 1260\zeta(5)\zeta(9)\Psi_2(m_1\tau)\Psi_2(m_2\tau).
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von $G_{3,4,5,6}^{RURU}(\tau) = \sum_{m_1 > m_2 > 0} \Psi_{3,4}(m_1\tau) \cdot \Psi_{5,6}(m_2\tau)$ ergibt sich nun, indem man in obiger Gleichung die auftretenden Produkte $\Psi_h(m_1\tau)\Psi_j(m_2\tau)$ durch $\sum_{n>0} \frac{(-2\pi i)^{h+j}}{(h-1)!(j-1)!} \sigma_{h-1,j-1}(n) q^n$ ersetzt.

Die auftretenden Produkte $\zeta(a)\zeta(b)$ können, wie im Beweis zu Satz 4.5.5 erwähnt, nun noch mit Hilfe der Shuffle Relation als Linearkombination von Doppel Zeta-Werten dargestellt werden, so dass die Fourierkoeffizienten von $G_{3,4,5,6}^{RURU}$ genau die in Satz 4.5.5 angegebene Form haben.

Die Fourierreihen von $G_{3,4,5,6}^w$ für die restlichen 15 Wörter lassen sich nun analog berechnen, worauf wir hier aber, aufgrund der Komplexität, verzichten.

4.6. Doppel Eisensteinreihen

In diesem Abschnitt wollen wir uns intensiver mit den Doppel Eisensteinreihen beschäftigen, da wir diese benötigen, um später Formeln für $\tau(n)$ herzuleiten. Zudem werden wir mit ihnen Relationen zwischen verallgemeinerten Teilersummen herleiten, die wir im späteren Abschnitt 4.8 über die Triple Eisensteinreihen benötigen. Die Doppel Eisensteinreihen wurden in [GKZ06] eingeführt und ihre Definition war der Anlass für die allgemeine Definition der Multiplen Eisensteinreihen in Definition 4.1.2.

Wir fassen noch einmal die Ergebnisse und Definition aus dem vorherigen Kapitel für den Fall $l = 2$ zusammen:

Definition 4.6.1. Für $s_1 \geq 3, s_2 \geq 2$ und $\tau \in \mathbb{H}$ wird die *Doppel Eisensteinreihe* vom Gewicht $k = s_1 + s_2$ definiert durch

$$G_{s_1, s_2}(\tau) = \sum_{m_1\tau + n_1 \succ m_2\tau + n_2 \succ 0} \frac{1}{(m_1\tau + n_1)^{s_1} (m_2\tau + n_2)^{s_2}},$$

wobei $m\tau + n \succ 0$ bedeutet, dass $m > 0$ oder $m = 0 \wedge n > 0$ und $m_1\tau + n_1 \succ m_2\tau + n_2 \Leftrightarrow (m_1\tau + n_1) - (m_2\tau + n_2) \succ 0$.

Die Multiplen Eisensteinreihen wurden nur für $s_i \geq 3$ definiert. Dies war großzügiger als nötig, aber für die Berechnung der Fourierreihe irrelevant. Im Fall $l = 2$ lässt sich z.B. zeigen, dass schon bei $s_1 \geq 3$ und $s_2 \geq 2$ absolute Konvergenz vorliegt und somit obige Definition Sinn ergibt. (Siehe dazu [GKZ06] S. 4).

Für die Fourierreihe erhält man anhand der Ergebnisse aus dem letzten Kapitel:

Satz 4.6.2. Für die Doppel Eisensteinreihe erhält man für $s_1 \geq 3, s_2 \geq 2$ mit $k = s_1 + s_2$:

$$\tilde{G}_{s_1, s_2}(\tau) = \tilde{\zeta}(s_1, s_2) + \tilde{\zeta}(s_2) \tilde{g}_{s_1}(q) + \sum_{k_1 + k_2 = s_1 + s_2} C_{s_1, s_2}^{k_2} \tilde{\zeta}(k_2) \tilde{g}_{k_1}(\tau) + \tilde{g}_{s_1, s_2}(q),$$

wobei

$$\begin{aligned} C_{s_1, s_2}^{k_2} &:= \left((-1)^{s_2} \begin{bmatrix} k_2 \\ s_2 \end{bmatrix} + (-1)^{k_2 - s_1} \begin{bmatrix} k_2 \\ s_1 \end{bmatrix} \right), \\ \tilde{g}_{s_1}(q) &= \frac{(-1)^{s_1}}{(s_1 - 1)!} \sum_{n > 0} \sigma_{s_1 - 1}(n) q^n, \\ \tilde{g}_{s_1, s_2}(q) &= \frac{(-1)^{s_1 + s_2}}{(s_1 - 1)!(s_2 - 1)!} \sum_{n > 0} \sigma_{s_1 - 1, s_2 - 1}(n) q^n. \end{aligned}$$

D.h. schreibt man $\tilde{G}_{s_1, s_2}(\tau) = \tilde{\zeta}(s_1, s_2) + \frac{(-1)^{s_1 + s_2}}{(s_1 - 1)!(s_2 - 1)!} \sum_{n > 0} a_n q^n$, dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \sigma_{s_1 - 1, s_2 - 1}(n) + (-1)^{s_2} (s_2 - 1)! \tilde{\zeta}(s_2) \sigma_{s_1 - 1}(n) \\ &\quad + (s_1 - 1)!(s_2 - 1)! \sum_{k_1 + k_2 = s_1 + s_2} C_{s_1, s_2}^{k_2} \tilde{\zeta}(k_2) \sigma_{k_1 - 1}(n). \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt aus dem Abschnitt 4.3 bzw. findest sich in [GKZ06] Theorem 6. (Wobei das dortige $C_{s_1, s_2}^{k_2}$ nicht exakt dem hier definierten entspricht, da dort der Term $\tilde{\zeta}(s_2)\tilde{g}_{s_1}(q)$ mit in die Summe gezogen wird und somit noch ein δ_{s_2, k_2} zum $C_{s_1, s_2}^{k_2}$ hinzuaddiert wird). $\square$

Wir berechnen jetzt einige konkrete Beispiele, auf die wir im späteren Verlauf verweisen werden, insbesondere bei der späteren Formel für $\tau(n)$ im Abschnitt 4.11.

Beispiel 4.6.3. (Die Doppel Eisensteinreihe $G_{4,4}$)

Wir berechnen zunächst die zugehörigen $C_{r,s}^p$. Man erhält $C_{4,4}^2 = C_{4,4}^3 = C_{4,4}^5 = 0$, $C_{4,4}^4 = 2$ und $C_{4,4}^6 = 20$. Damit ist zunächst

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{4,4}(\tau) &= \tilde{\zeta}(4, 4) + \tilde{\zeta}(4)\tilde{g}_4(q) + 2\tilde{\zeta}(4)\tilde{g}_4(q) + 20\tilde{\zeta}(6)\tilde{g}_2(q) + \tilde{g}_{4,4}(q) \\ &= \tilde{\zeta}(4, 4) + 20\tilde{\zeta}(6)\tilde{g}_2(q) + 3\tilde{\zeta}(4)\tilde{g}_4(q) + \tilde{g}_{4,4}(q)\end{aligned}$$

und zusammen mit

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}(4, 4) &= \frac{1}{2}(\tilde{\zeta}(4)^2 - \tilde{\zeta}(8)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2073600} - \frac{1}{2419200}\right) = \frac{1}{29030400}, \\ 3\tilde{\zeta}(4)\tilde{g}_4(q) &= \frac{1}{480}\tilde{g}_4(q) = \frac{1}{2880}\sum_{n>0}\sigma_3(n)q^n, \\ 20\tilde{\zeta}(6)\tilde{g}_2(q) &= -\frac{1}{3024}\tilde{g}_2(q) = -\frac{1}{3024}\sum_{n>0}\sigma_1(n)q^n, \\ \tilde{g}_{4,4}(q) &= \frac{1}{36}\sum_{n>0}\sigma_{3,3}(n)q^n\end{aligned}$$

gilt insgesamt:

$$\tilde{G}_{4,4}(\tau) = \frac{1}{29030400} + \frac{1}{36}\sum_{n>0}\left(\sigma_{3,3}(n) - \frac{1}{84}\sigma_1(n) + \frac{1}{80}\sigma_3(n)\right)q^n.$$

Da $\tilde{G}_4^2 = 2\tilde{G}_{4,4} + \tilde{G}_8$ und $\tilde{G}_4^2 = \frac{7}{6}\tilde{G}_8$ gilt, folgt $12\tilde{G}_{4,4} = \tilde{G}_8$. Für $\tilde{G}_8$ haben wir die bekannte Fourierreihe

$$\begin{aligned}\tilde{G}_8(\tau) &= \tilde{\zeta}(8) + \tilde{g}_8(q) \\ &= \frac{1}{2419200} + \frac{1}{5040}\sum_{n>0}\sigma_7(n)q^n\end{aligned}$$

und somit erhalten wir die Identität

$$\frac{1}{5040}\sigma_7(n) = 12 \cdot \left(\frac{1}{36}\sigma_{3,3}(n) - \frac{1}{3024}\sigma_1(n) + \frac{1}{2880}\sigma_3(n)\right),$$

also

$$1680\sigma_{3,3}(n) = 20\sigma_1(n) - 21\sigma_3(n) + \sigma_7(n). \quad (4.10)$$

Auf diese Identität werden wir in den späteren Abschnitten wiederholt verweisen.

4. Multiple Eisensteinreihen

Beispiel 4.6.4. (Die Doppel Eisensteinreihen $G_{4,8}$ und $G_{8,4}$)

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{4,8}(\tau) &= \tilde{\zeta}(4, 8) + \tilde{\zeta}(8)\tilde{g}_4(q) + \sum_{p=2}^{10} C_{4,8}^p \tilde{\zeta}(p)\tilde{g}_{12-p}(q) + \tilde{g}_{4,8}(q), \\ \tilde{G}_{8,4}(\tau) &= \tilde{\zeta}(8, 4) + \tilde{\zeta}(4)\tilde{g}_8(q) + \sum_{p=2}^{10} C_{8,4}^p \tilde{\zeta}(p)\tilde{g}_{12-p}(q) + \tilde{g}_{8,4}(q),\end{aligned}$$

wobei hier

$$\sum_{p=2}^{10} C_{4,8}^p \tilde{\zeta}(p)\tilde{g}_{12-p}(q) = \tilde{\zeta}(4)\tilde{g}_8(q) + 10\tilde{\zeta}(6)\tilde{g}_6(q) + 36\tilde{\zeta}(8)\tilde{g}_4(q) + 120\tilde{\zeta}(10)\tilde{g}_2(q) - R$$

und

$$\sum_{p=2}^{10} C_{8,4}^p \tilde{\zeta}(p)\tilde{g}_{12-p}(q) = \tilde{\zeta}(4)\tilde{g}_8(q) + 10\tilde{\zeta}(6)\tilde{g}_6(q) + 36\tilde{\zeta}(8)\tilde{g}_4(q) + 120\tilde{\zeta}(10)\tilde{g}_2(q) + R,$$

mit $R := (4\tilde{\zeta}(5)g_7(q) + 20\tilde{\zeta}(7)g_5(q) + 48\tilde{\zeta}(9)g_3(q))$. Für die einzelnen Terme ergibt sich:

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}(4)\tilde{g}_8(q) &= \frac{1}{1440}\tilde{g}_8(q) = \frac{1}{7257600} \sum_{n>0} \sigma_7(n)q^n, \\ 10\tilde{\zeta}(6)\tilde{g}_6(q) &= -\frac{1}{6048} = -\frac{1}{725760} \sum_{n>0} \sigma_5(n)q^n, \\ 36\tilde{\zeta}(8)\tilde{g}_4(q) &= \frac{1}{67200}\tilde{g}_4(q) = \frac{1}{403200} \sum_{n>0} \sigma_3(n)q^n, \\ 120\tilde{\zeta}(10)\tilde{g}_2(q) &= -\frac{1}{798336}\tilde{g}_2(q) = -\frac{1}{798336} \sum_{n>0} \sigma_1(n)q^n,\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{4,8}(q) = \frac{1}{30240} \sum_{n>0} \sigma_{3,7}(n)q^n, \quad \tilde{g}_{8,4}(q) = \frac{1}{30240} \sum_{n>0} \sigma_{7,3}(n)q^n.$$

Somit ist insgesamt:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{4,8}(\tau) &= \tilde{\zeta}(4, 8) + R + \sum_{n>0} \left(\frac{1}{30240} \sigma_{3,7}(n) + \frac{1}{7257600} \sigma_7(n) \right) q^n \\ &\quad - \sum_{n>0} \left(\frac{1}{725760} \sigma_5(n) - \frac{37}{14515200} \sigma_3(n) + \frac{1}{798336} \sigma_1(n) \right) q^n, \\ \tilde{G}_{8,4}(\tau) &= \tilde{\zeta}(8, 4) - R \\ &\quad + \sum_{n>0} \left(\frac{1}{30240} \sigma_{7,3}(n) + \frac{1}{3628800} \sigma_7(n) - \frac{1}{725760} \sigma_5(n) + \frac{1}{403200} \sigma_3(n) - \frac{1}{798336} \sigma_1(n) \right) q^n\end{aligned}$$

4.7. Die Doppel Eisensteinreihen im nicht-konvergenten Fall

und damit

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{4,8}(\tau) + \tilde{G}_{8,4}(\tau) &= \tilde{\zeta}(4, 8) + \tilde{\zeta}(8, 3) \\ &+ \frac{1}{3! \cdot 7!} \sum_{n>0} \left(-\frac{5}{66} \sigma_1(n) + \frac{73}{480} \sigma_3(n) - \frac{1}{12} \sigma_5(n) + \frac{1}{80} \sigma_7(n) + \sigma_{3,7}(n) + \sigma_{7,3}(n) \right) q^n. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Beispiel 4.6.5. (Die Doppel Eisensteinreihen $G_{6,6}$)

Wir geben hier nur noch das Ergebnis an, da sich die Terme analog zu oben leicht berechnen lassen:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{6,6}(\tau) &= \tilde{\zeta}(6, 6) \\ &+ \frac{1}{5! \cdot 5!} \sum_{n>0} \left(-\frac{5}{132} \sigma_1(n) + \frac{1}{24} \sigma_3(n) - \frac{1}{168} \sigma_5(n) + \sigma_{5,5}(n) \right) q^n. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.7. Die Doppel Eisensteinreihen im nicht-konvergenten Fall

Wie in 4.1.7 bemerkt, will man die Doppel Eisensteinreihen passend erweitern, so dass die G_{s_1, s_2} für die selben Tupel (s_1, s_2) definiert sind, für die auch die Doppel Zeta-Werte $\zeta(s_1, s_2)$ existieren. Dies ist, wie in 3.1.1 gezeigt, der Fall für $s_1 \geq 2$ und $s_2 \geq 1$.

Hierfür kann man zunächst die Doppel Eisensteinreihen über die Fourierreihe „neu definieren“, da man diese auch für die obigen Fälle hinschreiben kann, ohne Probleme mit der Konvergenz zu erhalten. Es stellt sich heraus, dass dies aber nicht der gewünschten Definition entspricht, d.h. dass die so entstehenden Doppel Eisensteinreihen nicht die Doppel Shuffle Relationen erfüllen. Um diese zu erfüllen, werden noch zusätzliche Terme für die Fälle $s_1 = 2$ und $s_2 = 1$ benötigt.

Wir betrachten als Erstes den Fall $s_2 = 1$ und $s_1 > 2$. Die g_{s_1, s_2} wurden in Definition 4.3.3 für $s_1, s_2 > 1$ definiert durch

$$g_{s_1, s_2}(\tau) := \sum_{m_1 > m_2 > 0} \Psi_{s_1}(m_1 \tau) \Psi_{s_2}(m_2 \tau)$$

und mit Hilfe der Lipschitz Summationsformel

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x + d)^k} = (-2\pi i)^k \sum_{n>0} n^{k-1} q^n,$$

welche für $k \geq 2$ gilt, konnte eine Fourierreihe von g_{s_1, s_2} bestimmt werden, die den Beitrag von $\sigma_{s_1-1, s_2-1}(n)$ in der Fourierreihe von G_{s_1, s_2} lieferte.

4. Multiple Eisensteinreihen

Zwar existiert $\sigma_{s_1-1, s_2-1}(n)$ auch für $s_2 = 1$, aber man erhält dies nicht über obige Weise, da $\Psi_1(m_2\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m_2\tau + n)^{-1}$ nicht konvergiert.

Betrachtet man aber den Cauchy Hauptwert dieser Reihe, d.h.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-a}^a \frac{1}{m_2\tau + n} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m_2\tau} + \sum_{n=1}^a \left(\frac{1}{m_2\tau - n} + \frac{1}{m_2\tau + n} \right) \right),$$

dann erhält man zusammen mit der bereits erwähnten Identität

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau - d} + \frac{1}{\tau + d} \right) = \pi \cot(\pi\tau) = -\pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

welche in 1.3.1 zur Herleitung der Lipschitz Formel benutzt wurde, dass der Hauptwert, für den wir fortan auch Ψ_1 schreiben, sich ergibt zu

$$\Psi_1(m_2\tau) = -\pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^{m_2 \cdot n}.$$

Damit erweitern wir nun die Definition von $g_{s_1, s_2}(\tau)$ auf $s_1 \geq 2$ und $s_2 \geq 1$. Der einzige Unterschied in der Fourierreihe ergibt sich nun natürlich nur im Fall $s_2 = 1$ und wir berechnen diese mit obigen Überlegungen und der Identität $\Psi_{s_1}(m_1\tau) = \frac{(-2\pi i)^{s_1}}{(s_1-1)!} \sum_{n>0} n^{s_1-1} q^{m_1 \cdot n}$.

$$\begin{aligned} g_{s_1, 1}(\tau) &= \sum_{m_1 > m_2 > 0} \Psi_{s_1}(m_1\tau) \Psi_1(m_2\tau) \\ &= \sum_{m_1 > m_2 > 0} \left(\frac{(-2\pi i)^{s_1}}{(s_1-1)!} \sum_{n_1 > 0} n_1^{s_1-1} q^{m_1 \cdot n_1} \right) \left(-\pi i - 2\pi i \sum_{n_2 > 0} q^{m_2 \cdot n_2} \right) \\ &= \frac{(-2\pi i)^{s_1+1}}{(s_1-1)!} \sum_{m_1 > m_2 > 0} \left(\sum_{n_1 > 0} n_1^{s_1-1} q^{m_1 \cdot n_1} \right) \left(\sum_{n_2 > 0} q^{m_2 \cdot n_2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{(-2\pi i)^{s_1+1}}{(s_1-1)!} \sum_{m_1 > m_2 > 0} \left(\sum_{n_1, n_2 > 0} n_1^{s_1-1} q^{m_1 \cdot n_1 + m_2 \cdot n_2} + \frac{1}{2} \sum_{n_1 > 0} n_1^{s_1-1} q^{m_1 \cdot n_1} \right) \\ &= \frac{(-2\pi i)^{s_1+1}}{(s_1-1)!} \left(\sum_{n > 0} \sigma_{s_1-1, 0}(n) q^n + \frac{1}{2} \sum_{m_1 > m_2 > 0} \sum_{n_1 > 0} n_1^{s_1-1} q^{m_1 \cdot n_1} \right). \end{aligned}$$

Da in der zweiten Summe kein m_2 vorkommt, kann man die Summe über $m_1 > 0$ laufen lassen und mit dem Faktor $m_1 - 1$ multiplizieren. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{m_1 > m_2 > 0} \sum_{n_1 > 0} n_1^{s_1-1} q^{m_1 \cdot n_1} &= \sum_{m_1, n_1 > 0} (m_1 - 1) n_1^{s_1-1} q^{m_1 \cdot n_1} \\ &= \sum_{m_1, n_1 > 0} m_1 n_1^{s_1-1} q^{m_1 \cdot n_1} - \sum_{m_1, n_1 > 0} n_1^{s_1-1} q^{m_1 \cdot n_1} \\ &= \sum_{m_1, n_1 > 0} (m_1 n_1) n_1^{s_1-2} q^{m_1 \cdot n_1} - \sum_{n > 0} \sigma_{s_1-1}(n) q^n \\ &= \sum_{n > 0} (n \sigma_{s_1-2} - \sigma_{s_1-1}(n)) q^n, \end{aligned}$$

4.7. Die Doppel Eisensteinreihen im nicht-konvergenten Fall

und somit gilt insgesamt:

$$g_{s_1,1}(\tau) = \frac{(-2\pi i)^{s_1+1}}{(s_1-1)!} \sum_{n>0} \left(\sigma_{s_1-1,0}(n) + \frac{n}{2} \sigma_{s_1-2} - \frac{1}{2} \sigma_{s_1-1}(n) \right) q^n.$$

Damit gilt nun für $g_{s_1,s_2}(\tau)$ für beliebige $s_1 \geq 2, s_2 \geq 1$:

$$g_{s_1,s_2}(\tau) = \frac{(-2\pi i)^{s_1+s_2}}{(s_1-1)!(s_2-1)!} \sum_{n>0} \left(\sigma_{s_1-1,s_2-1}(n) + \delta_{s_2,1} \left(\frac{n}{2} \sigma_{s_1-2}(n) - \frac{1}{2} \sigma_{s_1-1}(n) \right) \right) q^n.$$

Es stellt sich heraus, dass dies die richtige Erweiterung für den Fall $s_2 = 1$ ist, um die Doppel Shuffle Relationen zu erhalten. Zusammen mit einem extra Term für den Fall $s_1 = 2$, dessen Herleitung nicht auf so einem „direkten“ Wege folgt, aber von uns in Abschnitt 5 über einen alternativen Weg hergeleitet wird, gilt folgender Satz:

Satz 4.7.1. *Definiert man für $s_1 \geq 2, s_2 \geq 1$ die Doppel Eisensteinreihe über ihre Fourierreihe*

$$\tilde{G}_{s_1,s_2}(\tau) = \tilde{\zeta}(s_1, s_2) + \frac{(-1)^{s_1+s_2}}{(s_1-1)!(s_2-1)!} \sum_{n>0} a_n q^n,$$

wobei die Koeffizienten definiert werden durch:

$$\begin{aligned} a_n = & \sigma_{s_1-1,s_2-1}(n) + (-1)^{s_2}(s_2-1)! \tilde{\zeta}(s_2) \sigma_{s_1-1}(n) \\ & + (s_1-1)!(s_2-1)! \sum_{k_1+k_2=s_1+s_2} C_{s_1,s_2}^{k_2} \tilde{\zeta}(k_2) \sigma_{k_1-1}(n) \\ & + \delta_{s_2,1} \left(\frac{n}{2} \sigma_{s_1-2}(n) - \frac{1}{2} \sigma_{s_1-1}(n) \right) \\ & + \delta_{s_1,2} \left(\frac{n}{2s_2} \sigma_{s_2-1}(n) \right), \end{aligned}$$

dann gilt:

(i) *Die Doppel Shuffle Relation wird erfüllt, d.h. es gilt für $s_1, s_2 \geq 2$:*

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{s_1}(\tau) \cdot \tilde{G}_{s_2}(\tau) + \epsilon_{s_1,s_2}(\tau) & \stackrel{Stuffle}{=} \tilde{G}_{s_1,s_2}(\tau) + \tilde{G}_{s_2,s_1}(\tau) + \tilde{G}_{s_1+s_2}(\tau) \\ & \stackrel{Shuffle}{=} \sum_{k_1+k_2=s_1+s_2} \left(\binom{k_1-1}{s_1-1} + \binom{k_2-1}{s_2-1} \right) \tilde{G}_{k_1,k_2}(\tau), \end{aligned}$$

$$\text{wobei } \epsilon_{s_1,s_2}(\tau) = \delta_{s_1,2} \frac{1}{2(s_2-1)} \tilde{G}'_{s_2-1}(\tau) + \delta_{s_2,2} \frac{1}{2(s_1-1)} \tilde{G}'_{s_1-1}(\tau).$$

(ii) *Die Summenformel wird erfüllt, d.h. es gilt für $k \geq 3$:*

$$\sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ ungerade}}}^{k-1} \tilde{G}_{i,k-i}(\tau) = \frac{1}{4} \tilde{G}_k(\tau), \quad \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ gerade}}}^{k-1} \tilde{G}_{i,k-i}(\tau) = \frac{3}{4} \tilde{G}_k(\tau)$$

und damit insbesondere

$$\sum_{i=2}^{k-1} \tilde{G}_{i,k-i}(\tau) = \tilde{G}_k(\tau).$$

4. Multiple Eisensteinreihen

Beweis. Dies ist Theorem 1 in [Kan11] bzw. folgt aus Theorem 7 zusammen mit Theorem 1 in [GKZ06] und findet sich unter anderem auch in [KT11]. $\square$

Auch hier berechnen wir ein Beispiel, welches wir im weiteren Verlauf benutzen werden:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{2,2}(\tau) &= \tilde{\zeta}(2, 2) + \frac{(-1)^4}{(2-1)!(2-1)!} \sum_{n>0} \left(\sigma_{1,1}(n) - \frac{1}{8}\sigma_1(n) + \frac{n}{4}\sigma_1(n) \right) q^n \\ &= \frac{1}{1920} + \sum_{n>0} \left(\sigma_{1,1}(n) - \frac{1}{8}\sigma_1(n) + \frac{n}{4}\sigma_1(n) \right) q^n.\end{aligned}$$

4.8. Triple Eisensteinreihen

Im folgenden Abschnitt werden wir uns näher mit den Multiplen Eisensteinreihen der Länge 3 beschäftigen. Diese sind definiert durch:

Definition 4.8.1. Die *Triple Eisensteinreihe* wird für $s_1, s_2, s_3 > 2$ definiert durch

$$G_{s_1, s_2, s_3}(\tau) := \sum_{m_1\tau + n_1 \succ m_2\tau + n_2 \succ m_3\tau + n_3 \succ 0} \frac{1}{(m_1\tau + n_1)^{s_1} (m_2\tau + n_2)^{s_2} (m_3\tau + n_3)^{s_3}}.$$

Wir wollen hier wieder die Fourierreihe berechnen und betrachten dazu die $2^3 = 8$ Wörter der Länge 3 und erhalten:

Lemma 4.8.2. Für die Triple Eisensteinreihe gilt:

$$\begin{aligned} G_{s_1, s_2, s_3}(\tau) = & \zeta(s_1, s_2, s_3) + \zeta(s_2, s_3)g_{s_1}(\tau) + \zeta(s_3)g_{s_1, s_2}(\tau) \\ & + g_{s_1, s_2, s_3}(\tau) + \zeta(s_3) \sum_{a>0} \Psi_{s_1, s_2}(a\tau) + \sum_{a>b>0} \Psi_{s_1, s_2}(a\tau) \Psi_{s_3}(b\tau) \\ & + \sum_{a>b>0} \Psi_{s_1}(a\tau) \Psi_{s_2, s_3}(b\tau) + \sum_{a>0} \Psi_{s_1, s_2, s_3}(a\tau). \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus den Überlegungen aus dem Abschnitt 4.3. Die obigen Terme ergeben sich dadurch, dass man $G_{s_1, s_2, s_3}^w(\tau)$ für die Wörter $w = R^3, UR^2, U^2R, U^3, RUR, RU^2, URU$ und R^2U berechnet. $\square$

Zusammen mit diesem Lemma und dem Lemma 4.5.1 aus dem letzten Abschnitt, bei dem wir $\Psi_{*,*}$ und $\Psi_{*,*,*}$ als Linearkombination von einfachen Ψ_* dargestellt haben, erhalten wir die Fourierreihe der Triple Eisensteinreihe:

Satz 4.8.3. Für die Triple Eisensteinreihe gilt mit $k = s_1 + s_2 + s_3$:

$$\begin{aligned} G_{s_1, s_2, s_3}(\tau) = & \zeta(s_1, s_2, s_3) + \zeta(s_2, s_3)g_{s_1}(\tau) + \zeta(s_3)g_{s_1, s_2}(\tau) + g_{s_1, s_2, s_3}(\tau) \\ & + \zeta(s_3) \sum_{k_1+k_2=s_1+s_2} C_{s_1, s_2}^{k_1} \zeta(k_1) g_{k_2}(\tau) \\ & + \sum_{k_1+k_2=s_1+s_2} C_{s_1, s_2}^{k_2} \zeta(k_2) g_{k_1, s_3}(\tau) \\ & + \sum_{k_1+k_2=s_2+s_3} C_{s_2, s_3}^{k_2} \zeta(k_2) g_{s_1, k_1}(\tau) \\ & + (-1)^{s_2} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left((-1)^{s_3} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_2, s_3 \end{bmatrix} + (-1)^{s_1+k_2+k_3} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_1, s_2 \end{bmatrix} \right) \zeta(k_3, k_2) g_{k_1}(\tau) \\ & + (-1)^{s_1+s_3} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} (-1)^{k_2} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_1, s_3 \end{bmatrix} \zeta(k_3) \zeta(k_2) g_{k_1}(\tau). \end{aligned}$$

4. Multiple Eisensteinreihen

Beweis. Das folgt nun direkt aus Lemma 4.5.1 und Lemma 4.8.2. Setzt man die Darstellungen von $\Psi_{*,*}$ und $\Psi_{*,*,*}$ aus 4.5.1 in 4.8.2 ein, werden durch die Summation über $a > b > 0$ bzw. $a > 0$ die entsprechenden auftretenden $\Psi_*(a\tau)\Psi_*(b\tau)$ bzw. $\Psi_*(a\tau)$ zu $g_{*,*}$ bzw. g_* .

□

Wir berechnen zunächst zwei Beispiele.

Beispiel 4.8.4. Für $s_1 = s_2 = s_3 = 4$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{4,4,4}(\tau) &= \tilde{\zeta}(4, 4, 4) \\ &+ \frac{1}{3!^3} \sum_{n>0} \left(-\frac{1}{14784} \sigma_1(n) + \frac{1}{17920} \sigma_3(n) \right) q^n \\ &+ \frac{1}{3!^3} \sum_{n>0} \left(\frac{1}{84} (\sigma_{1,3}(n) + \sigma_{3,1}(n)) + \frac{1}{48} \sigma_{3,3}(n) + \sigma_{3,3,3}(n) \right) q^n.\end{aligned}$$

Wie wir weiter unten sehen werden, ist dies eine Modulform von Gewicht 12. Etwas komplizierter ist das Beispiel $s_1 = 4, s_2 = 5, s_3 = 6$. Wir setzen zur Abkürzung $c = 3! \cdot 4! \cdot 5!$, damit ist:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{4,5,6}(\tau) &= \tilde{\zeta}(4, 5, 6) \\ &+ \frac{(-1)^{4+5+6}}{c} \sum_{n>0} \left(\sigma_{3,4,5}(n) - \frac{281}{2882880} \sigma_0(n) + \frac{130399}{605404800} \sigma_2(n) - \frac{37}{1330560} \sigma_4(n) \right) q^n \\ &- \frac{1}{c} \sum_{n>0} \left(3600 \sigma_4(n) \tilde{\zeta}(6, 4) + 293760 \sigma_2(n) \tilde{\zeta}(7, 5) + 302400 \sigma_2(n) \tilde{\zeta}(8, 4) \right) q^n \\ &- \frac{1}{c} \sum_{n>0} \left(1814400 \sigma_0(n) \tilde{\zeta}(8, 6) + 2903040 \sigma_0(n) \tilde{\zeta}(9, 5) + 2177280 \sigma_0(n) \tilde{\zeta}(10, 4) \right) q^n \\ &- \frac{1}{c} \sum_{n>0} \left(-\frac{1}{168} \sigma_{2,5}(n) - \frac{1}{120} \sigma_{3,2}(n) + \frac{1}{168} \sigma_{3,4}(n) + \frac{1}{240} \sigma_{4,5}(n) \right) q^n \\ &- \frac{i}{c} \sum_{n>0} \left(-\frac{\zeta(5)}{20\pi^5} \sigma_1(n) + \frac{\zeta(5)}{14\pi^5} \sigma_3(n) - \frac{\zeta(5)}{80\pi^5} \sigma_5(n) - \frac{3\zeta(5)}{\pi^5} \sigma_{3,5}(n) \right) q^n \\ &- \frac{i}{c} \sum_{n>0} \left(\frac{45\zeta(5)^2}{32\pi^{10}} \sigma_4(n) + \frac{25\zeta(7)}{64\pi^7} \sigma_1(n) + \frac{21\zeta(7)}{32\pi^7} \sigma_3(n) - \frac{105\zeta(7)}{64\pi^7} \sigma_5(n) \right) q^n \\ &- \frac{i}{c} \sum_{n>0} \left(\frac{315\zeta(7)}{8\pi^7} \sigma_{1,5}(n) - \frac{315\zeta(7)}{4\pi^7} \sigma_{3,3}(n) - \frac{2835\zeta(5)\zeta(7)}{16\pi^{12}} \sigma_2(n) + \frac{42525\zeta(7)^2}{128\pi^{14}} \sigma_0(n) \right) q^n \\ &- \frac{i}{c} \sum_{n>0} \left(\frac{189\zeta(9)}{16\pi^9} \sigma_1(n) - \frac{945\zeta(9)}{16\pi^9} \sigma_3(n) + \frac{1125\zeta(9)}{64\pi^9} \sigma_5(n) + \frac{2835\zeta(9)}{4\pi^9} \sigma_{3,1}(n) \right) q^n \\ &- \frac{i}{c} \sum_{n>0} \left(\frac{8505\zeta(5)\zeta(9)}{16\pi^{14}} \sigma_0(n) + \frac{28755\zeta(11)}{64\pi^{11}} \sigma_3(n) - \frac{135135\zeta(13)}{128\pi^{13}} \sigma_1(n) \right) q^n.\end{aligned}$$

In diesem Fall treten auch imaginäre Fourierkoeffizienten auf. Wie Linearkombinationen von Triple Eisensteinreihen aussehen müssen, damit der Imaginärteil verschwindet, werden im Folgenden Abschnitt betrachten.

4.9. Modularität II: Doppel und Triple Eisensteinreihen

Wir wollen uns nun mit der Fragestellung beschäftigen, welche rationalen Linearkombinationen von Doppel bzw. Triple Eisensteinreihen modular sind. Dazu führen wir zunächst folgende Begriffe ein:

Definition 4.9.1. Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}_k^{(l)}$ den durch die Multiplen Eisensteinreihen vom Gewicht k und Länge l aufgespannten $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, wobei wir für den Fall $l = 2$ die „nicht-konvergenten“ Doppel Eisensteinreihen aus Satz 4.7.1 mit einbeziehen, d.h. wir haben $\mathcal{E}_k^{(1)} := \mathbb{Q}\tilde{G}_k$,

$$\mathcal{E}_k^{(2)} := \sum_{\substack{s_1+s_2=k \\ s_1>1}} \mathbb{Q}\tilde{G}_{s_1,s_2}$$

und für $l > 2$

$$\mathcal{E}_k^{(l)} := \sum_{\substack{s_1+\dots+s_l=k \\ s_1,\dots,s_l>2}} \mathbb{Q}\tilde{G}_{s_1,\dots,s_l}.$$

Zusätzlich definieren wir

$$\mathcal{E}_k^{(\leq n)} := \sum_{l=1}^n \mathcal{E}_k^{(l)}.$$

Zunächst stellen wir fest, dass Folgendes gilt:

Proposition 4.9.2. *Es ist $M_k^{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{E}_k^{(2)}$.*

Beweis. Nach Satz 4.7.1 ist $\tilde{G}_k = \sum_{j=2}^{k-1} \tilde{G}_{j,k-j}$ und somit $\mathcal{E}_k^{(1)} = \mathbb{Q}\tilde{G}_k \subset \mathcal{E}_k^{(2)}$. Nach einem Ergebnis von Rankin, wird M_k zudem aufgespannt von $\tilde{G}_k$ und den Produkten $\tilde{G}_r \cdot \tilde{G}_{k-r}$ mit $4 \leq r \leq k-4$ (siehe [Zag77] S. 146). Diese Produkte wiederum lassen sich nach Satz 4.7.1 darstellen als Linearkombination von Doppel Eisensteinreihen (Shuffle Relation) und somit ist $M_k^{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{E}_k^{(2)}$. $\square$

Bemerkung 4.9.3. Wegen Proposition 4.9.2 ist $\mathcal{E}_k^{(1)} \subset \mathcal{E}_k^{(2)}$. Es stellt sich daher die Frage, ob z.B. auch $\mathcal{E}_k^{(2)} \subset \mathcal{E}_k^{(3)}$ gilt. Klar ist, dass dies für zu kleine k nicht der Fall ist, da z.B. für $k = 3$ gilt, dass $\mathcal{E}_3^{(2)} = \mathbb{Q}\tilde{G}_{2,1}$ und $\mathcal{E}_3^{(3)} = 0$. Für größere k ist dies aber eine offene Frage, auf die wir im weiteren Verlauf nicht weiter eingehen werden.

4. Multiple Eisensteinreihen

Im Folgenden wollen wir uns nun damit beschäftigen, welche Linearkombinationen aus $\mathcal{E}_k^{(\leq 3)}$ modular sind. Gesucht sind also Koeffizienten $a_{k_1, k_2, k_3}, b_{g_1, g_2} \in \mathbb{Q}$, so dass

$$\sum_{k_1+k_2+k_3=k} a_{k_1, k_2, k_3} \tilde{G}_{k_1, k_2, k_3} + \sum_{g_1+g_2=k} b_{g_1, g_2} \tilde{G}_{g_1, g_2} \quad (4.13)$$

in $M_k^{\mathbb{Q}}$ liegt. Dies werden wir durch zwei unterschiedliche Ansätze machen.

Der erste Ansatz ähnelt dem in [Kan11] (bzw. Anhang in [KT11]): Wir betrachten die Projektion $\pi : \mathcal{E}_k^{(\leq 3)} \rightarrow iq\mathbb{R}[[q]]$ auf den Imaginärteil von (4.13) und betrachten von dieser Elemente aus dem Kern. Dies liefert notwendige Bedingungen an die Gestalt von a_{k_1, k_2, k_3} , da die Elemente in $M_k^{\mathbb{Q}}$ nur reelle Koeffizienten besitzen und somit $M_k^{\mathbb{Q}} \subset \ker(\pi)$.

Im zweiten Ansatz werden wir mit Hilfe der Stuffle Relation für Triple Eisensteinreihen Produkte von klassischen Eisensteinreihen als Linearkombinationen von Doppel bzw. Triple Eisensteinreihen ausdrücken. Es wird also der Satz 4.2.2 für die Fälle $l = 2$ und $l = 3$ explizit ausgeführt. Dabei war die Aussage von Satz 4.2.2, dass Summen über Permutationen von Multiplen Eisensteinreihen modular sind.

Wir wollen uns im Folgenden mit dem ersten Ansatz beschäftigen und den imaginären Anteil von Linearkombinationen von Triple Eisensteinreihen betrachten. Dazu wiederholen wir zunächst das analoge Vorgehen im Fall der Doppel Eisensteinreihen, welches sich in [Kan11], [Kan04] oder auch in [KT11] findet.

Zunächst betrachten wir den Raum $\mathcal{E}_k^{(2)}$. Wie wir in dem Kapitel 4.6 zu den Doppel Eisensteinreihen gesehen haben, besitzen diese eine Fourierreihe der Form

$$\tilde{G}_{s_1, s_2}(\tau) = \tilde{\zeta}(s_1, s_2) + \tilde{\zeta}(s_2) \tilde{g}_{s_1}(q) + \sum_{k_1+k_2=s_1+s_2} C_{s_1, s_2}^{k_2} \tilde{\zeta}(k_2) \tilde{g}_{k_1}(\tau) + \tilde{g}_{s_1, s_2}(q) + \epsilon(q),$$

wobei $\epsilon(q)$ hier den Zusatz aus 4.7.1 bezeichnet, der für den Fall $s_1 = 2$ oder $s_2 = 1$ nötig war, aber für die weitere Betrachtung irrelevant ist.

Anhand dieser Darstellung sieht man, dass die Fourierkoeffizienten von $\tilde{G}_{s_1, s_2}(\tau)$ rationale Vielfache von $\tilde{\zeta}(k_2)$ sind. Diese liegen nun entweder in $\mathbb{Q}$ oder in $i\mathbb{R}$, je nachdem, ob k_2 gerade oder ungerade ist. Um also Elemente aus $\mathcal{E}_k^{(2)}$ mit rationalen Fourierkoeffizienten zu erhalten, betrachtet man den Kern der folgenden Abbildung:

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathcal{E}_k^{(2)} &\longrightarrow iq\mathbb{R}[[q]] \\ \tilde{G}_{s_1, s_2} &\longmapsto p_{s_2} \tilde{\zeta}(s_2) \tilde{g}_{s_1}(q) + \sum_{\substack{k_1+k_2=s_1+s_2 \\ k_2 \text{ ungerade}}} C_{s_1, s_2}^{k_2} \tilde{\zeta}(k_2) \tilde{g}_{k_1}(\tau), \end{aligned}$$

die linear auf ganz $\mathcal{E}_k^{(2)}$ fortgesetzt wird.

Proposition 4.9.4. Die Darstellung von π_1 ist auf den Erzeugern $\tilde{G}_{i,k-i}$ mit $2 \leq i \leq k-2$ gegeben durch

$$(\pi_1(\tilde{G}_{2,k-2}), \pi_1(\tilde{G}_{3,k-3}), \dots, \pi_1(\tilde{G}_{k-2,2}))^T = Q_k \cdot (\tilde{\zeta}(3)\tilde{g}_{k-3}(q), \tilde{\zeta}(5)\tilde{g}_{k-5}(q), \dots, \tilde{\zeta}(k-3)\tilde{g}_3(q))^T,$$

wobei

$$Q_k := \left(\delta_{k-2-i,2j} + (-1)^i \binom{2j}{i} - (-1)^i \binom{2j}{k-2-i} \right)_{\substack{1 \leq i \leq k-3 \\ 1 \leq j \leq \frac{k}{2}-2}}.$$

Beweis. Dies folgt, indem man jeweils die Koeffizienten aus der Definition von π_1 auf den Erzeugern ausrechnet. Siehe z.B. auch [Kan04]. $\square$

Mit dieser Darstellung gilt nun, dass $\sum_{g_1+g_2=k} b_{g_1,g_2} \tilde{G}_{g_1,g_2} \in \ker(\pi_1)$ genau dann wenn $Q_k^T(b_{2,k-2}, \dots, b_{k-1,1}) = 0$. Wir geben dazu im Folgenden einige Beispiele an:

Beispiel 4.9.5.

$$Q_6 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q_{10} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 6 & 15 \\ 0 & -4 & -14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 14 \\ 0 & -6 & -14 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Q_{12} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 & -8 \\ 1 & 6 & 15 & 28 \\ 0 & -4 & -20 & -48 \\ 0 & 1 & 15 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -42 \\ 0 & 4 & 20 & 48 \\ 0 & -6 & -15 & -27 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Als eine Basis für den Kern von Q_{12}^T erhält man

$$\begin{aligned} & (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T, \quad (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)^T, \quad (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T, \\ & (7, 14, 14, 0, 0, -8, 0, 0, 0)^T, \quad (15, 30, 6, 0, 0, 0, 0, 16, 0)^T, \quad (5, 10, 12, 8, 0, 0, 0, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Die ersten drei Elemente entsprechen dabei $G_{2,10} + G_{10,2}$, $G_{4,8} + G_{8,4}$ und $G_{6,6}$, die, wie wir vorher schon gesehen haben, nur reelle Fourierkoeffizienten besitzen, da z.B. aufgrund der Stuffle Relation folgt, dass $G_{4,8} + G_{8,4} = G_8 \cdot G_4 - G_{12} \in M_{12}$.

4. Multiple Eisensteinreihen

Zusammen mit Satz 4.7.1 und einer analogen Überlegung wie in Satz A.4.4 lässt sich zeigen, dass die restlichen Elemente auch Modulformen vom Gewicht 12 liefern. Man erhält durch Koeffizientenvergleich (bzw. Proposition 4.9.10) folgende 6 Darstellungen von Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 47 \cdot \tilde{G}_{12} - 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 691 \cdot (\tilde{G}_{2,10} + \tilde{G}_{10,2}) \\
&= -2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 239 \cdot \tilde{G}_{12} + 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 691 \cdot (\tilde{G}_{4,8} + \tilde{G}_{8,4}) \\
&= 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \tilde{G}_{12} - 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 691 \cdot \tilde{G}_{6,6} \\
&= -\frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 2797}{13} \tilde{G}_{12} \\
&\quad + \frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 691}{13} \cdot (7 \cdot \tilde{G}_{2,10} + 14 \cdot \tilde{G}_{3,9} + 14 \cdot \tilde{G}_{4,8} - 8 \cdot \tilde{G}_{7,5}) \\
&= -2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 1153 \cdot \tilde{G}_{12} \\
&\quad + 2^6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 691 \cdot (15 \cdot \tilde{G}_{2,10} + 30 \cdot \tilde{G}_{3,9} + 6 \cdot \tilde{G}_{4,8} + 16 \cdot \tilde{G}_{9,3}) \\
&= -2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 1321 \cdot \tilde{G}_{12} \\
&\quad + 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691 \cdot (5 \cdot \tilde{G}_{2,10} + 10 \cdot \tilde{G}_{3,9} + 12 \cdot \tilde{G}_{4,8} + 8 \cdot \tilde{G}_{5,7}) .
\end{aligned}$$

Die so entstehenden Formeln für $\tau(n)$ werden wir im nächsten Abschnitt zusammentragen.

Bemerkung 4.9.6. Wie bereits oben erwähnt ist für ein $f \in \mathcal{E}_k^{(2)}$ die Bedingung $f \in \ker(\pi_1)$ notwendig dafür, dass $f \in M_k^{\mathbb{Q}}$ ist. Wir sehen anhand des Beispiels für $k = 12$, dass im Fall der Doppel Eisensteinreihen auch die Umkehrung zu stimmen scheint, d.h. dass $\ker(\pi_1)/M_k^{\mathbb{Q}} = 0$. In diesem Zusammenhang sei daher noch folgende Proposition erwähnt, welche die Dimension des Kerns von π_1 in Verbindung bringt mit der Dimension von S_k :

Proposition 4.9.7. *Für gerade $k > 2$ gilt:*

$$\text{rang}(Q_k) = \frac{k}{2} - 2 - \dim(S_k) .$$

Beweis. Dies lässt sich mit Hilfe der Theorie von Periodenpolynomen zeigen und entspricht Proposition 1 in [Kan11]. In B.1.2 werden diese als Polynome vom Grad $k-2$ aus dem Kern bezüglich des Slash Operators von $1+S$ und $1+U+U^2$ definiert. Es lässt sich zeigen (z.B. Lemma 1 im Abschnitt 5 von [GKZ06]), dass $W^- = \ker(1-T-T^t)$. Des Weiteren stellt sich heraus, dass die darstellende Matrix dieser Abbildung bezüglich der Basis X^j mit geraden $j = 2, \dots, k-4$ genau dem obigen Q_k entspricht. Nach der Eichler-Shimura Theorie (siehe z.B. [Lan95],[Zag90],[Bac09]), ist der Kern isomorph zu S_k und somit erhält man obige Aussage. $\square$

4.9. Modularität II: Doppel und Triple Eisensteinreihen

Wir betrachten nun den Fall der Triple Eisensteinreihen, d.h. den Raum $\mathcal{E}_k^{(3)}$.

Da wir im Folgenden bestimmte Terme nur für ungerade Parameter betrachten, setzen wir für ein $a \in \mathbb{N}$:

$$p_a := \frac{1 - (-1)^a}{2} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

In Satz 4.8.3 haben wir die Fourierreihe der Triple Eisensteinreihe G_{s_1, s_2, s_3} berechnet. Die Fourierkoeffizienten waren dabei rationale Vielfache von Produkten von $\zeta(a)$ und $\zeta(b, c)$. Diese sind in $\mathbb{R}$ bzw. $i\mathbb{R}$, je nachdem ob a bzw. $b + c$ gerade oder ungerade ist. Wir schreiben nun

$$\tilde{G}_{s_1, s_2, s_3} = \tilde{\zeta}(s_1, s_2, s_3) + \sum_{n>0} x_n q^n + i \sum_{n>0} y_n q^n,$$

wobei $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Mit dieser Notation definieren wir die Projektion auf den imaginären Teil wie folgt:

$$\begin{aligned} \pi_2 : \mathcal{E}_k^{(3)} &\longrightarrow iq\mathbb{R}[[q]] \\ \tilde{G}_{s_1, s_2, s_3} &\longmapsto i \sum_{n>0} y_n q^n, \end{aligned}$$

welche durch lineare Fortsetzung auf ganz $\mathcal{E}_k^{(3)}$ erklärt ist.

Um $\ker(\pi_2)$ zu berechnen, sind die y_n zu bestimmen. Dazu müssen die $\pi_2(G_{s_1, s_2, s_3})$ für die einzelnen auftretenden Summanden aus 4.8.3 berechnet werden, die wir zunächst einzeln benennen:

$$G_{s_1, s_2, s_3}(\tau) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5,$$

mit

$$\begin{aligned} T_1 &= \zeta(s_1, s_2, s_3) + \zeta(s_2, s_3)g_{s_1}(\tau) + \zeta(s_3)g_{s_1, s_2}(\tau) + g_{s_1, s_2, s_3}(\tau), \\ T_2 &= \zeta(s_3) \sum_{\substack{k_1+k_2=s_1+s_2 \\ a, b>1}} C_{s_1, s_2}^{k_1} \zeta(k_1)g_{k_2}(\tau), \\ T_3 &= \sum_{\substack{k_1+k_2=s_1+s_2 \\ a, b>1}} C_{s_1, s_2}^{k_2} \zeta(k_2)g_{k_1, s_3}(\tau), \\ T_4 &= \sum_{\substack{k_1+k_2=s_2+s_3 \\ a, b>1}} C_{s_2, s_3}^{k_2} \zeta(k_2)g_{s_1, k_1}(\tau), \\ T_5 &= (-1)^{s_2} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left((-1)^{s_3} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_2, s_3 \end{bmatrix} + (-1)^{s_1+k_2+k_3} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_1, s_2 \end{bmatrix} \right) \zeta(k_3, k_2)g_{k_1}(\tau), \\ &\quad + (-1)^{s_1+s_3} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} (-1)^{k_2} \begin{bmatrix} k_2, k_3 \\ s_1, s_3 \end{bmatrix} \zeta(k_3)\zeta(k_2)g_{k_1}(\tau). \end{aligned}$$

4. Multiple Eisensteinreihen

Wir werden die Berechnung im Folgenden nur exemplarisch vorführen und aufgrund der Komplexität nicht bis ins Detail ausführen.

Die auftretenden $\tilde{g}_{s_1, \dots, s_l}$ haben stets rationale Koeffizienten. Somit kommt es bei der Berechnung von π nur auf die auftretenden Zeta-Werte an. Wir werden zeigen, dass man die $\pi_2(T_i)$, aufgrund des Satzes 3.2.2, als rationale Linearkombinationen von $\tilde{\zeta}(2k+1)g_*(\tau)$ und $\tilde{\zeta}(2k+1)g_{*,*}(\tau)$ schreiben kann.

Für den ersten Teil erhalten wir:

$$\pi_2(T_1) = p_{s_2+s_3}\tilde{\zeta}(s_2, s_3)g_{s_1}(\tau) + p_{s_3}\tilde{\zeta}(s_3)g_{s_1, s_2}(\tau),$$

da nach Definition $\tilde{\zeta}(s_1, \dots, s_l)$ genau dann reell ist, wenn $s_1 + \dots + s_l$ gerade ist.

Für $\tilde{\zeta}(s_2, s_3)$ erhalten wir, falls s_2+s_3 ungerade ist, mit Satz 3.2.2 und $\tilde{\zeta}(2k) = -\frac{B_{2k}}{2(2k)!}$ eine Darstellung als rationale Linearkombinationen aus $\tilde{\zeta}(u)$ mit ungeraden u :

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(s_2, s_3) &= -\frac{B_{s_2}}{2s_2!}\tilde{\zeta}(s_3) \\ &+ \frac{1}{2}\left((-1)^{s_2}\binom{s_2+s_3}{s_3} - 1\right)\tilde{\zeta}(s_2+s_3) \\ &+ (-1)^{s_2}\sum_{\substack{k_1+k_2=s_2+s_3 \\ k_2>1}}\left(\binom{k_1-1}{s_2-1} + \binom{k_1-1}{s_3-1}\right)\frac{B_{k_2}}{2k_2!}\tilde{\zeta}(k_1), \end{aligned} \quad (4.14)$$

wobei hier benutzt wurde, dass die B_k für ungerade $k > 1$ verschwinden. Damit wird der Term $\frac{1+(-1)^{s_2}}{2}$ aus der Formel 3.2.2 überflüssig, da wir hier nur $s_2 > 1$ betrachten. Somit erhält man insgesamt als Darstellung von $\pi_2(T_1)$:

$$\begin{aligned} \pi_2(T_1) &= -p_{s_2+s_3}\frac{B_{s_2}}{2s_2!}\tilde{\zeta}(s_3)g_{s_1}(\tau) + p_{s_3}\tilde{\zeta}(s_3)g_{s_1, s_2}(\tau) \\ &+ p_{s_2+s_3}\frac{1}{2}\left((-1)^{s_2}\binom{s_2+s_3}{s_3} - 1\right)\tilde{\zeta}(s_2+s_3)g_{s_1}(\tau) \\ &+ p_{s_2+s_3}(-1)^{s_2}\sum_{\substack{k_1+k_2=s_2+s_3 \\ k_2>1}}\left(\binom{k_1-1}{s_2-1} + \binom{k_1-1}{s_3-1}\right)\frac{B_{k_2}}{2k_2!}\tilde{\zeta}(k_1)g_{s_1}(\tau). \end{aligned}$$

Für die Teile 2 – 4 erhält man

4.9. Modularität II: Doppel und Triple Eisensteinreihen

$$\begin{aligned}
\pi_2(T_2) &= -p_{s_3} \sum_{\substack{k_1+k_2=s_1+s_2 \\ k_2 \text{ gerade}}} C_{s_1,s_2}^{k_2} \frac{B_{k_2}}{2k_2!} \tilde{\zeta}(s_3) g_{k_1}(\tau) \\
&\quad - \frac{B_{s_3}}{2s_3!} \sum_{\substack{k_1+k_2=s_1+s_2 \\ k_2 \text{ ungerade}}} C_{s_1,s_2}^{k_2} \zeta(k_2) g_{k_1}(\tau), \\
\pi_2(T_3) &= \sum_{\substack{k_1+k_2=s_1+s_2 \\ k_2 \text{ ungerade}}} C_{s_1,s_2}^{k_2} \tilde{\zeta}(k_2) g_{k_1,s_3}(\tau), \\
\pi_2(T_4) &= \sum_{\substack{k_1+k_2=s_2+s_3 \\ k_2 \text{ ungerade}}} C_{s_2,s_3}^{k_2} \tilde{\zeta}(k_2) g_{s_1,k_1}(\tau).
\end{aligned}$$

Für T_5 kann man erneut (4.14) benutzen, um die auftretenden Doppel Zeta-Werte als Linearkombination von einfachen ungeraden Zeta-Werten darzustellen. Da der so entstehende Term sehr groß und unübersichtlich ist, belassen wir es bei der Anmerkung, dass dies berechenbar ist.

Insgesamt kann man nun den Raum $\mathcal{E}_k^{(\leq 3)}$, den Kern der Abbildung $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ und wieder die darstellende Matrix bezüglich der oben erwähnten Basis betrachten.

Beispiel 4.9.8. Für den Fall $k = 12$, bei dem die zugehörige Matrix eine dreistellige Anzahl von Spalten hat, geben wir einige Beispiele für Elemente aus $\ker(\pi)$ an:

$$\begin{aligned}
\frac{71}{2016} \Delta &= -385 \tilde{G}_{12} + 265344 \tilde{G}_{5,3,4} - 497520 \tilde{G}_{6,3,3} \\
&\quad + 497520 \tilde{G}_{4,5,3} + 199008 \tilde{G}_{5,4,3} - 55280 \tilde{G}_{9,3}, \\
\frac{19}{2016} \Delta &= -395 \tilde{G}_{12} + 132672 \tilde{G}_{5,3,4} - 110560 \tilde{G}_{6,3,3} \\
&\quad + 165840 \tilde{G}_{4,5,3} + 99504 \tilde{G}_{5,4,3} + 41460 \tilde{G}_{8,4}, \\
\frac{17}{480} \Delta &= -757 \tilde{G}_{12} - 386960 \tilde{G}_{6,3,3} + 232176 \tilde{G}_{4,5,3} + 82920 \tilde{G}_{7,5}, \\
\frac{101}{2016} \Delta &= 6265 \tilde{G}_{12} - 132672 \tilde{G}_{5,3,4} - 442240 \tilde{G}_{6,3,3} \\
&\quad + 165840 \tilde{G}_{4,5,3} - 99504 \tilde{G}_{5,4,3} - 165840 \tilde{G}_{5,7}.
\end{aligned}$$

Dabei sind jeweils die rechten Seiten der Gleichungen Elemente aus $\ker(\pi)$. Man kann direkt nachprüfen, dass die zugehörigen Imaginärteile verschwinden, indem man die zugehörigen Fourierreihen mit Satz 4.8.3 berechnet. Dabei wird unter anderem die Identität $\frac{11}{10} \zeta(10) = \zeta(6, 4) + \zeta(7, 3) + \zeta(5)^2$ benötigt, die sich mit Satz 3.2.1 leicht herleiten lässt. Mit einer analogen Idee wie im Beweis zu Satz 3.2.1 kann man zudem zeigen, zusammen mit der Stuffle und Shuffle Relation für die Triple Eisensteinreihen, dass die rechten Seiten jeweils Spitzenformen vom Gewicht 12 sind.

4. Multiple Eisensteinreihen

Bemerkung 4.9.9. Auch hier konnte vom Autor kein Beispiel für Elemente aus dem Kern gefunden werden, die nicht modular sind. Es ist somit vermutungsweise auch $\ker(\pi)/M_k^{\mathbb{Q}} = 0$, wobei für die Verifikation dieser Vermutung zunächst der komplette Kern von π berechnet werden müsste, worauf wir in dieser Arbeit verzichten.

Wir verfolgen nun den zweiten Ansatz und führen den Satz 4.2.2 explizit für die Fälle $l = 2, 3$ aus und extrahieren Spitzenformen, die als Linearkombinationen von Doppel und Triple Eisensteinreihen darstellbar sind.

Proposition 4.9.10. *Seien $s_1, s_2 > 2$ gerade, so dass $\dim(S_{s_1+s_2}) > 0$ gilt. Weiter seien*

$$\begin{aligned}\alpha_{s_1, s_2} &:= \frac{\zeta(s_1)\zeta(s_2)}{\zeta(s_1+s_2)} = -\frac{(s_1+s_2)!}{2 \cdot s_1! \cdot s_2!} \frac{B_{s_1} \cdot B_{s_2}}{B_{s_1+s_2}}, \\ \beta_{s_1, s_2} &:= \frac{\zeta(s_1)(-1)^{s_2}}{(s_2-1)!} + \frac{\zeta(s_2)(-1)^{s_1}}{(s_1-1)!} - \frac{\alpha_{s_1, s_2}(-1)^{s_1+s_2}}{(s_1+s_2-1)!},\end{aligned}$$

dann gibt es eine normierte Spitzenform $f = q + \sum_{n>1} a_n q^n \in S_{s_1+s_2}$ mit

$$\begin{aligned}f &= \frac{1}{\beta_{s_1, s_2}} (G_{s_1} \cdot G_{s_2} - \alpha_{s_1, s_2} G_{s_1+s_2}), \\ &= \frac{1}{\beta_{s_1, s_2}} (G_{s_1, s_2} + G_{s_2, s_1} - (\alpha_{s_1, s_2} - 1) G_{s_1+s_2}).\end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage ist gleichbedeutend mit der Existenz eines $f \in S_{s_1+s_2}$, so dass

$$\begin{aligned}G_{s_1} \cdot G_{s_2} &= \alpha_{s_1, s_2} G_{s_1+s_2} + \beta_{s_1, s_2} f, \\ G_{s_1, s_2} + G_{s_2, s_1} &= (\alpha_{s_1, s_2} - 1) G_{s_1+s_2} + \beta_{s_1, s_2} f.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung folgt aus einem einfachen Koeffizientenvergleich und der Tatsache, dass $M_k = \mathbb{C}G_k \oplus S_k$. Die zweite Gleichung folgt nun entweder direkt aus Satz 4.2.2 und Koeffizientenvergleich oder aus der ersten Gleichung zusammen mit dem Stuffle Produkt für Doppel Eisensteinreihen. $\square$

Proposition 4.9.11. *Seien $s_1, s_2, s_3 > 2$ gerade, so dass $\dim(S_{s_1+s_2}) > 0$ gilt. Weiter seien*

$$\begin{aligned}\alpha_{s_1, s_2, s_3} &:= \frac{\zeta(s_1)\zeta(s_2)\zeta(s_3)}{\zeta(s_1+s_2+s_3)}, \\ \beta_{s_1, s_2, s_3} &:= \frac{\zeta(s_1)\zeta(s_2)(-1)^{s_3}}{(s_3-1)!} + \frac{\zeta(s_1)(-1)^{s_2}\zeta(s_3)}{(s_2-1)!} + \frac{(-1)^{s_1}\zeta(s_2)\zeta(s_3)}{(s_1-1)!} \\ &\quad - \frac{\alpha_{s_1, s_2, s_3}(-1)^{s_1+s_2+s_3}}{(s_1+s_2+s_3-1)!}, \\ \alpha_{s_1, s_2, s_3}^* &:= \alpha_{s_1, s_2, s_3} - \alpha_{s_1+s_2, s_3} - \alpha_{s_1+s_3, s_2} - \alpha_{s_2+s_3, s_1} + 2, \\ \beta_{s_1, s_2, s_3}^* &:= \beta_{s_1, s_2, s_3} - \beta_{s_1+s_2, s_3} - \beta_{s_1+s_3, s_2} - \beta_{s_2+s_3, s_1},\end{aligned}$$

4.9. Modularität II: Doppel und Triple Eisensteinreihen

dann gibt es normierte Spitzenformen $f, g \in S_{s_1+s_2+s_3}$, so dass gilt:

$$g = \frac{1}{\beta_{s_1, s_2, s_3}^*} \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_3} G_{s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, s_{\sigma(3)}} - \alpha_{s_1, s_2, s_3}^* G_{s_1+s_2+s_3} \right),$$

$$f = \frac{1}{\beta_{s_1, s_2, s_3}} (G_{s_1} \cdot G_{s_2} \cdot G_{s_3} - \alpha_{s_1, s_2, s_3} G_{s_1+s_2+s_3}).$$

Beweis. Die zu zeigende Aussage ist wieder äquivalent zur Existenz von normierten Spitzenformen $f, g \in S_{s_1+s_2+s_3}$ mit

$$G_{s_1} \cdot G_{s_2} \cdot G_{s_3} = \alpha_{s_1, s_2, s_3} G_{s_1+s_2+s_3} + \beta_{s_1, s_2, s_3} f,$$

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_3} G_{s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, s_{\sigma(3)}} = \alpha_{s_1, s_2, s_3}^* G_{s_1+s_2+s_3} + \beta_{s_1, s_2, s_3}^* g.$$

Der erste Teil ist wieder ein einfacher Koeffizientenvergleich. Der Faktor α_{s_1, s_2, s_3} sorgt dafür, dass der konstante Term auf der rechten Seiten genau dem Produkt $\zeta(s_1)\zeta(s_2)\zeta(s_3)$ entspricht und der Faktor β_{s_1, s_2, s_3} „zieht“ von $\alpha_{s_1, s_2, s_3} G_{s_1+s_2+s_3}$ den Teil vor dem q ab und addiert den nötigen Teil, den das Produkt $G_{s_1} \cdot G_{s_2} \cdot G_{s_3}$ als Faktor vor q besitzt.

Für den zweiten Teil betrachtet man zunächst wieder die Stuffle Relation für die Eisensteinreihen:

$$G_{s_1} \cdot G_{s_2} \cdot G_{s_3} = \sum_{\sigma \in \Sigma_3} G_{s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, s_{\sigma(3)}} \\ + G_{s_1+s_2, s_3} + G_{s_3, s_1+s_2} + G_{s_1+s_3, s_2} + G_{s_2, s_1+s_3} \\ + G_{s_2+s_3, s_1} + G_{s_1, s_2+s_3} + G_{s_1+s_2+s_3}.$$

Hier kann man nun dreimal Proposition 4.9.10 benutzen und erhält

$$G_{s_1} \cdot G_{s_2} \cdot G_{s_3} = \sum_{\sigma \in \Sigma_3} G_{s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, s_{\sigma(3)}} \\ + (\alpha_{s_1+s_2, s_3} + \alpha_{s_1+s_3, s_2} + \alpha_{s_2+s_3, s_1} - 2) G_{s_1+s_2+s_3} \\ + \beta_{s_1+s_2, s_3} f_1 + \beta_{s_1+s_3, s_2} f_2 + \beta_{s_2+s_3, s_1} f_3,$$

wobei die f_i die entsprechenden normierten Spitzenformen vom Gewicht $s_1 + s_2 + s_3$ sind.

Nach dem ersten Teil gibt es nun noch zusätzlich eine normierte Spitzenform $f_0 \in S_{s_1+s_2+s_3}$ mit $G_{s_1} \cdot G_{s_2} \cdot G_{s_3} = \alpha_{s_1, s_2, s_3} G_{s_1+s_2+s_3} + \beta_{s_1, s_2, s_3} f_0$. Damit erhält man insgesamt

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_3} G_{s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, s_{\sigma(3)}} = (\alpha_{s_1, s_2, s_3} - \alpha_{s_1+s_2, s_3} - \alpha_{s_1+s_3, s_2} - \alpha_{s_2+s_3, s_1} + 2) G_{s_1+s_2+s_3} \\ + \beta_{s_1, s_2, s_3} f_0 - \beta_{s_1+s_2, s_3} f_1 - \beta_{s_1+s_3, s_2} f_2 - \beta_{s_2+s_3, s_1} f_3.$$

4. Multiple Eisensteinreihen

Die letzte Zeile ist dabei selbst eine Spitzenform, welche als Faktor vor q genau β_{s_1, s_2, s_3}^* stehen hat. Somit gibt es eine normierte Spitzenform g mit der gewünschten Eigenschaft. $\square$

Bemerkung 4.9.12. Anhand der Beweise zu Proposition 4.9.10 und 4.9.11 sieht man, dass die dort bewiesenen Aussagen auch für den Fall $\dim(S_{s_1+s_2}) = 0$ bzw. $\dim(S_{s_1+s_2+s_3}) = 0$ gelten, sofern jeweils f und g durch 0 ersetzt werden.

Beispiel 4.9.13. (i) Da Δ die einzige normierte Spitzenform von Gewicht 12 ist erhalten wir durch Proposition 4.9.10:

$$\Delta = \frac{1}{\beta_{4,4,4}^*} (6G_{4,4,4} - \alpha_{4,4,4}^* G_{12}) .$$

Dies werden wir im späteren Abschnitt zur τ -Funktion noch weiter ausrechnen.

(ii) Im Fall $s_1 = s_2 = 4$ und $s_3 = 6$ gilt mit Proposition 4.9.11:

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_3} G_{s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, s_{\sigma(3)}} = 2(G_{4,4,6} + G_{4,6,4} + G_{6,4,4}) = \alpha_{s_1, s_2, s_3}^* G_{14} , \quad (4.15)$$

da $\dim(S_{14}) = 0$.

Es ist $\alpha_{s_1, s_2, s_3}^* = \frac{1}{240}$ und nach 4.8.3 erhält man für die a_n in der Fourierentwicklung von $G_{4,4,6}(\tau) + G_{4,6,4}(\tau) + G_{6,4,4}(\tau) = \dots + \sum_{n>0} a_n q^n$:

$$\begin{aligned} a_n = & \frac{127}{2476656000} \sigma_1(n) - \frac{41}{638668800} \sigma_3(n) + \frac{1}{77414400} \sigma_5(n) \\ & + \frac{1}{129600} (\sigma_{3,1}(n) + \sigma_{1,3}(n)) - \frac{1}{48384} \sigma_{3,3}(n) \\ & - \frac{1}{362880} (\sigma_{5,1}(n) + \sigma_{1,5}(n)) + \frac{1}{207360} (\sigma_{5,3}(n) + \sigma_{3,5}(n)) \\ & + \frac{1}{4320} (\sigma_{3,3,5}(n) + \sigma_{3,5,3}(n) + \sigma_{5,3,3}(n)) . \end{aligned}$$

Nach (4.15) ist dies gleich $\frac{1}{2 \cdot 240 \cdot 13!} \sigma_{13}(n)$ und somit erhält man die Identität

$$\begin{aligned} \sigma_{13}(n) = & 178816 \sigma_1(n) - 223860 \sigma_3(n) + 45045 \sigma_5(n) \\ & + 26906880 (\sigma_{3,1}(n) + \sigma_{1,3}(n)) - 72072000 \sigma_{3,3}(n) \\ & - 9609600 (\sigma_{5,1}(n) + \sigma_{1,5}(n)) + 16816800 (\sigma_{5,3}(n) + \sigma_{3,5}(n)) \\ & + 807206400 (\sigma_{3,3,5}(n) + \sigma_{3,5,3}(n) + \sigma_{5,3,3}(n)) . \end{aligned}$$

Bemerkung 4.9.14. Anhand der Beweise von Proposition 4.9.10 und 4.9.11 wird offensichtlich, dass man so iterativ für beliebige gerade $s_1, \dots, s_l > 2$ eine Darstellung für $\sum_{\sigma \in \Sigma_l} G_{s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(l)}}$ durch $G_{s_1+\dots+s_l}$ und einem $f \in S_{s_1+\dots+s_l}$ erhält. Das dies möglich ist, haben wir bereits am Anfang des Kapitels mit dem Transformationsverhalten (Satz 4.2.2) unter der Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gesehen.

4.10. Die Multiplen Eisensteinreihen $G_{2,\dots,2}$

Da die G_{s_1,s_2,s_3} nur für $s_1, s_2, s_3 > 2$ definiert wurden, wir aber, wie bereits erwähnt, analog zum Fall der Doppel Eisensteinreihen auch eine Definition von Triple Eisensteinreihen für die Fälle $s_1 > 1$ und $s_2, s_3 \geq 1$ haben möchten, wollen wir nun den Fall $s_1 = s_2 = s_3 = 2$ betrachten.

Wir werden im Abschnitt 5 in Lemma 5.3.4 folgende Identität herleiten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{640}\sigma_5(n) &= \frac{13}{1920}\sigma_1(n) - \frac{5}{24}\sigma_{1,1}(n) + \sigma_{1,1,1}(n) \\ &\quad + \frac{n}{8}\left(\sigma_{1,1}(n) - \frac{1}{8}\sigma_1(n)\right) \\ &\quad + \frac{n^2}{96}\sigma_1(n). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Diese Identität gibt Anlass zu einer Definition der Triple Eisensteinreihe $G_{2,2,2}$, die mit den Doppel Shuffle Relationen kompatibel ist und einer allgemeinen Vermutung. Um dies deutlich zu machen, wiederholen wir zunächst ein Standardresultat aus dem Bereich der Multiplen Zeta-Werte:

Lemma 4.10.1. *Mit $\lambda_n := (-1)^{n-1} \cdot 2^{2n-1} \cdot (2n+1) \cdot B_{2n}$ gilt*

$$\zeta(2n) = \lambda_n \cdot \zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_n).$$

Beweis. Dies folgt aus Satz A.2.2:

$$\zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_n) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

und der Euler Identität für die Riemannsche Zeta-Funktion an geraden Stellen (Satz A.1.1):

$$\zeta(2n) = -\frac{(2\pi i)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}.$$

□

Es gilt somit unter anderem $\frac{3}{16}\zeta(6) = \zeta(2, 2, 2)$. Die linke Seite von (4.16) ist der Fourierkoeffizient von $\frac{3}{16}\tilde{G}_6$. Die erste Zeile der rechten Seite entspricht dem Fourierkoeffizienten von $\tilde{G}_{2,2,2}(\tau)$, wenn man diesen über die Fourierreihe von $\tilde{G}_{s_1,s_2,s_3}$ definiert, die wir für $s_1, s_2, s_3 > 2$ berechnet haben:

$$\tilde{G}_{2,2,2}(\tau) = \tilde{\zeta}(2, 2, 2) + \sum_{n>0} \left(\frac{13}{1920}\sigma_1(n) - \frac{5}{24}\sigma_{1,1}(n) + \sigma_{1,1,1}(n) \right) q^n.$$

4. Multiple Eisensteinreihen

Die zweite Zeile der rechten Seite von (4.16) auf Seite 75 ist der Fourierkoeffizient von $\frac{1}{8}\tilde{G}'_{2,2}$, wobei $\tilde{G}'_{2,2}$ hier nun die Ableitung der Doppel Eisensteinreihe bezeichnet, in der noch nicht der Korrekturterm aus Satz 4.7.1 hinzugefügt wurde (d.h dies ist auch die Fourierreihe von $\tilde{G}_{s_1,s_2}$, die im absolut konvergenten Fall ausgerechnet wurde und in deren Endergebnis $s_1 = s_2 = 2$ gesetzt wurde). Die letzte Zeile entspricht dem Koeffizienten von $\frac{1}{96}\tilde{G}''_2$. Aufgrund des Lemmas entspricht die rechte Seite somit insgesamt der „richtigen“ Triple Eisensteinreihe, die wir im Folgenden als $\tilde{G}^*_{2,2,2}$ bezeichnen.

Numerisch zeigt sich, dass dies allgemein möglich scheint. Man kann mit der Konstruktion 4.5.3 die Fourierreihen der Multiplen Eisensteinreihen bis zur Länge 5 berechnen und in die entstehenden Fourierreihen alle $s_i = 2$ setzen. Wir bezeichnen die entstehenden Reihen analog mit $\tilde{G}_{2,\dots,2}$ und setzen

$$\begin{aligned}\tilde{G}^*_{2,2} &= \tilde{G}_{2,2} + \frac{1}{4}\tilde{G}'_2, \\ \tilde{G}^*_{2,2,2} &= \tilde{G}_{2,2,2} + \frac{1}{8}\tilde{G}'_{2,2} + \frac{1}{96}\tilde{G}''_2, \\ \tilde{G}^*_{2,2,2,2} &= \tilde{G}_{2,2,2,2} + \frac{1}{12}\tilde{G}'_{2,2,2} + \frac{1}{240}\tilde{G}''_{2,2} + \frac{1}{5760}\tilde{G}'''_2, \\ \tilde{G}^*_{2,2,2,2,2} &= \tilde{G}_{2,2,2,2,2} + \frac{1}{16}\tilde{G}'_{2,2,2,2} + \frac{1}{448}\tilde{G}''_{2,2,2} + \frac{1}{16128}\tilde{G}'''_{2,2} + \frac{1}{645120}\tilde{G}''''_2.\end{aligned}$$

Dann erfüllen diese jeweils das Analogon zu Lemma 4.10.1, d.h. es gilt jeweils

$$\tilde{G}_{2n} \stackrel{!}{=} \lambda_n \cdot \tilde{G}^*_{2,\dots,2},$$

wobei dies für den Fall $n = 2$ durch Satz 4.7.1 gegeben ist und für den Fall $n = 3$ oben bewiesen wurde. Das $\stackrel{!}{=}$ Kennzeichnet dabei, dass diese Identitäten für $n > 3$ nur für die ersten 100 Koeffizienten geprüft wurden. Betrachtet man die konstanten Terme, so ist dies genau Lemma 4.10.1. Im Fall $n = 6$, d.h. bei Gewicht 12 bei dem die erste Spitzenform Δ auftaucht, verschwindet $\tilde{G}_{2n} - \lambda_n \cdot \tilde{G}^*_{2,\dots,2}$ nicht mehr, sondern ist ein Vielfaches von Δ . $\tilde{G}^*_{2,2,2,2,2,2}$ ist hierbei gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{G}^*_{2,2,2,2,2,2} &= \tilde{G}_{2,2,2,2,2,2} + \frac{1}{20}\tilde{G}'_{2,2,2,2,2} + \frac{1}{720}\tilde{G}''_{2,2,2,2} + \frac{1}{34560}\tilde{G}'''_{2,2,2} \\ &\quad + \frac{1}{1935360}\tilde{G}''''_{2,2} + \frac{1}{116121600}\tilde{G}'''''_2.\end{aligned}$$

Genauer gesagt gilt

$$\tilde{G}_{12} - \lambda_6 \cdot \tilde{G}^*_{2,2,2,2,2,2} \stackrel{!}{=} \frac{17}{3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^2} \Delta.$$

Wir fassen dies zusammen und vermuten:

Vermutung 4.10.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es rationale Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{Q}$, so dass mit

$$\tilde{G}_{\underbrace{2, \dots, 2}_n}^* := \underbrace{\tilde{G}_{2, \dots, 2}_n}_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j D^j \underbrace{\tilde{G}_{2, \dots, 2}_{n-j}}_{n-j},$$

wobei $D = q \frac{d}{dq}$, gilt:

$$\tilde{G}_{2n} - \lambda_n \cdot \underbrace{\tilde{G}_{2, \dots, 2}_n^*}_n \in S_{2n}.$$

Aufgrund der ersten numerischen Beispiele lässt sich die Form von einigen α_i vermuten. So scheint stets $\alpha_1 = \frac{1}{4(n-1)}$ und $\alpha_2 = \frac{1}{2^4 \cdot (2n-1)}$. Satz 4.7.1 liefert den Fall $n = 2$ und der Fall $n = 3$ wurde durch obige Überlegung zusammen mit Lemma 5.3.4 bewiesen.

Als abschließendes Beispiel geben wir noch die entstehende Relation zwischen den Teilersummen, bzw. das Analogon zu $\frac{5}{192}\zeta(8) = \zeta(2, 2, 2, 2)$, an, welche sich aus dem Koeffizientenvergleich von $\lambda_4 \cdot \tilde{G}_{2,2,2,2}^*$ und $\tilde{G}_8$ ergibt.

Vermutung 4.10.3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{193536}\sigma_7(n) &= \sigma_{1,1,1,1}(n) - \frac{7}{24}\sigma_{1,1,1}(n) + \frac{23}{1152}\sigma_{1,1}(n) - \frac{41}{193536}\sigma_1(n) \\ &+ \frac{n}{12} \left(\sigma_{1,1,1}(n) - \frac{5}{24}\sigma_{1,1}(n) + \frac{13}{1920}\sigma_1(n) \right) \\ &+ \frac{n^2}{240} \left(\sigma_{1,1}(n) - \frac{1}{8}\sigma_1(n) \right) \\ &+ \frac{n^3}{5760}\sigma_1(n). \end{aligned}$$

Offen bleibt, die Triple Eisensteinreihen G_{s_1, s_2, s_3} für die anderen fehlenden Fälle $s_1 > 1$ und $s_2, s_3 \geq 1$ zu erweitern. Für den Fall G_{2, s_2, s_3} mit $s_2, s_3 > 2$ deuten numerische Berechnungen darauf hin, dass der fehlende Term ein rationales Vielfaches von G'_{s_2, s_3} ist. Wir werden allerdings darauf in dieser Arbeit nicht weiter eingehen.

Bemerkung 4.10.4. Der Beweis für die Vermutung 4.10.3 lässt sich vermutlich auch analog mit Hilfe von Satz 5.3.1 beweisen, wie wir es für die Formel (4.16) in Lemma 5.3.4 machen werden. Darauf gehen wir aber aufgrund von Zeitmangel in dieser Arbeit nicht ein.

4.11. Neue Identitäten für die τ -Funktion

In diesem Abschnitt wollen wir mit Hilfe der Fourierreihe für die Triple Eisensteinreihe eine Formel für die τ -Funktion herleiten. Diese wurden in Kapitel 2 definiert als die Fourierkoeffizienten von Δ , welche eine Spitzenform vom Gewicht 12 ist. Wir wiederholen dafür zunächst die Definition

$$\Delta(\tau) = q \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n>0} \tau(n) q^n.$$

Für die ersten Werte von $\tau(n)$ gilt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480	-113643	-115920

Als erste Identität von τ erhalten wir:

Proposition 4.11.1. *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} \tau(n) = & -\frac{785}{154}\sigma_1(n) + \frac{33}{2}\sigma_3(n) - \frac{351}{28}\sigma_5(n) + \frac{15}{7}\sigma_7(n) - \frac{3}{308}\sigma_{11}(n) \\ & - \frac{4000}{7}(\sigma_{1,3}(n) + \sigma_{3,1}(n)) + 1000\sigma_{3,3}(n) \\ & + \frac{1200}{7}(\sigma_{3,7}(n) + \sigma_{7,3}(n)) - 294\sigma_{5,5}(n) \\ & + 48000\sigma_{3,3,3}(n). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Beweis. Wir betrachten hierzu $40\tilde{G}_4^3 - 49\tilde{G}_6^2$, welches eine Modulform vom Gewicht 12 mit einem verschwindenden 0-ten Fourierkoeffizient ist. Da S_{12} eindimensional ist, ist dies ein Vielfaches von Δ . Durch Koeffizientenvergleich erhält man, dass $\Delta = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot (40\tilde{G}_4^3 - 49\tilde{G}_6^2)$.

Da sowohl die Doppel als auch die Triple Eisensteinreihen die Stuffle Relation erfüllen, können wir wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2} \Delta &= 40\tilde{G}_4^3 - 49\tilde{G}_6^2 \\ &= 40(\tilde{G}_4 \cdot (2\tilde{G}_{4,4} + \tilde{G}_8)) - 49(2\tilde{G}_{6,6} + \tilde{G}_{12}) \\ &= 40(2(3\tilde{G}_{4,4,4} + \tilde{G}_{4,8} + \tilde{G}_{8,4}) + \tilde{G}_{4,8} + \tilde{G}_{8,4} + \tilde{G}_{12}) - 98\tilde{G}_{6,6} - 49\tilde{G}_{12} \\ &= 240\tilde{G}_{4,4,4} + 120(\tilde{G}_{4,8} + \tilde{G}_{8,4}) - 98\tilde{G}_{6,6} - 9\tilde{G}_{12}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

In (4.6.4) auf Seite 58 haben wir die Fourierreihen von $\tilde{G}_{4,8} + \tilde{G}_{8,4}$ und $\tilde{G}_{6,6}$ bereits berechnet:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{4,8}(\tau) + \tilde{G}_{8,4}(\tau) &= \tilde{\zeta}(4, 8) + \tilde{\zeta}(8, 3) + \frac{1}{3! \cdot 7!} \sum_{n>0} \left(-\frac{5}{66} \sigma_1(n) + \frac{73}{480} \sigma_3(n) \right) q^n \\ &\quad + \frac{1}{3! \cdot 7!} \sum_{n>0} \left(-\frac{1}{12} \sigma_5(n) + \frac{1}{80} \sigma_7(n) + \sigma_{3,7}(n) + \sigma_{7,3}(n) \right) q^n, \\ \tilde{G}_{6,6}(\tau) &= \tilde{\zeta}(6, 6) \\ &\quad + \frac{1}{5! \cdot 5!} \sum_{n>0} \left(-\frac{5}{132} \sigma_1(n) + \frac{1}{24} \sigma_3(n) - \frac{1}{168} \sigma_5(n) + \sigma_{5,5}(n) \right) q^n.\end{aligned}$$

Es bleibt daher noch die Fourierreihe von $\tilde{G}_{4,4,4}$ zu berechnen, um eine Formel für $\tau(n)$ zu erhalten. Wie wir weiter oben gesehen haben, ist

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{4,4,4}(\tau) &= \tilde{\zeta}(4, 4, 4) + \frac{1}{3!^3} \sum_{n>0} \left(-\frac{1}{14784} \sigma_1(n) + \frac{1}{17920} \sigma_3(n) \right) q^n \\ &\quad + \frac{1}{3!^3} \sum_{n>0} \left(\frac{1}{84} (\sigma_{1,3}(n) + \sigma_{3,1}(n)) + \frac{1}{48} \sigma_{3,3}(n) + \sigma_{3,3,3}(n) \right) q^n.\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man mit (4.18), durch Einsetzen der drei Fourierreihen oben, die gewünschte Darstellung (4.17). $\square$

Dies ist, wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, nicht die einzige Möglichkeit, $\tau(n)$ durch erweiterte Teilersummenfunktionen darzustellen. Wir erhalten zusätzlich:

Proposition 4.11.2. *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned}2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot \tau(n) &= -2^3 \cdot 139 \cdot 691 \cdot \sigma_1(n) + 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 691 \cdot \sigma_3(n) \\ &\quad - 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 691 \cdot n \cdot \sigma_3(n) + 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 691 \cdot \sigma_5(n) \\ &\quad - 2 \cdot 11 \cdot 691 \cdot \sigma_7(n) + 3^2 \cdot \sigma_{11}(n) \\ &\quad - 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 691 \cdot \sigma_{3,3,3}(n).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Beweis. Durch Lemma 4.9.11 erhält man

$$G_{4,4,4} = \frac{3 \cdot 5}{2^4 \cdot 691} G_{12} - \frac{11}{2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 691} \Delta$$

und somit

$$\begin{aligned}\tau(n) &= \frac{691}{11^2} \sigma_1(n) - \frac{3 \cdot 691}{2^3 \cdot 5 \cdot 11} \sigma_3(n) + \frac{3}{2^3 \cdot 5 \cdot 11^2} \sigma_{11}(n) \\ &\quad + \frac{2^4 \cdot 691}{11} (\sigma_{1,3}(n) + \sigma_{3,1}(n)) - \frac{2^2 \cdot 7 \cdot 691}{11} \sigma_{3,3}(n) \\ &\quad - \frac{2^6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 691}{11} \sigma_{3,3,3}(n).\end{aligned}\tag{4.20}$$

4. Multiple Eisensteinreihen

Der auftretende Term $\sigma_{1,3}(n) + \sigma_{3,1}(n)$ kann selbst wieder durch Linearkombinationen einfacher Teilersummen ausgedrückt werden, da $\tilde{G}_{2,4} + \tilde{G}_{4,2} = \frac{3}{4}\tilde{G}_6$ (Satz 4.7.1) und somit ist durch Koeffizientenvergleich:

$$\sigma_{1,3}(n) + \sigma_{3,1}(n) = -\frac{3}{80}\sigma_1(n) + \frac{1}{8}\sigma_3 - \frac{n}{8}\sigma_3(n) + \frac{3}{80}\sigma_5(n).$$

Für $\sigma_{3,3}(n)$ haben wir bereits oben eine Darstellung durch einfache Teilersummen hergeleitet (Formel (4.10) S. 57). Einsetzen in die obige Darstellung (4.20) auf Seite 79 ergibt genau (4.19). $\square$

Hieraus lassen sich eine Vielzahl von Kongruenzen ablesen zwischen der tau-Funktion und gewöhnlichen Teilersummen, indem man obige Gleichung modulo den Teilern von $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 691$ betrachtet, die nicht Teiler von $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$ sind. Wir geben hierfür einige Beispiele:

Da $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \equiv 3^2 \pmod{691}$ erhält man als einfachstes Beispiel die bekannte Kongruenz $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$. Betrachtet man (4.19) modulo 7, 9 und 512 so ergibt sich

Korollar 4.11.3. *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} 2\tau(n) &\equiv 5\sigma_1(n) + 2n\sigma_3(n) + 5\sigma_5(n) + 2\sigma_7(n) + 2\sigma_{11}(n) \pmod{7}, \\ 3\tau(n) &\equiv \sigma_1(n) + (6 - 3n)\sigma_3(n) - \sigma_7(n) \pmod{9}, \\ 184\tau(n) &\equiv 120\sigma_1(n) + (16n - 63)\sigma_3(n) - 56\sigma_5(n) + 158\sigma_7(n) + 9\sigma_{11}(n) \pmod{512}. \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt nun direkt, wenn man die Identität (4.19) aus voriger Proposition mod 7, 9 und 512 betrachtet. $\square$

Die erste Gleichung ist äquivalent mit der ebenfalls bekannte Kongruenz $\tau(n) \equiv n\sigma_3(n) \pmod{7}$, da aufgrund des kleinen Fermatschen Satzes gilt: $\sigma_k(n) \equiv \sigma_{k+6}(n) \pmod{7}$.

In Abschnitt 4.8 haben wir mehrere Darstellungen von Δ durch Linearkombinationen von Doppel und Triple Eisensteinreihen erhalten. Dazu wiederholen wir jeweils die Darstellung von Δ und geben dann einige der so entstehenden Formeln für $\tau(n)$ an.

Proposition 4.11.4. *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

(i)

$$\Delta = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 47 \cdot \tilde{G}_{12} - 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 691 \cdot (\tilde{G}_{2,10} + \tilde{G}_{10,2}),$$

4.11. Neue Identitäten für die τ -Funktion

$$\begin{aligned}\tau(n) = & \frac{5 \cdot 7 \cdot 691}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 11} \sigma_1(n) - \frac{7 \cdot 691}{2^4 \cdot 3^2} \sigma_3(n) + \frac{5 \cdot 691}{2^3 \cdot 3^2} \sigma_5(n) \\ & - \frac{691}{2^3 \cdot 3} \sigma_7(n) + \frac{5 \cdot 691}{2^5 \cdot 3^2} \sigma_9(n) - \frac{691}{2^4 \cdot 3^2} n \sigma_9(n) \\ & + \frac{19 \cdot 47}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 11} \sigma_{11}(n) - \frac{5 \cdot 691}{2^2 \cdot 3^2} \sigma_{1,9}(n) - \frac{5 \cdot 691}{2^2 \cdot 3^2} \sigma_{9,1}(n).\end{aligned}$$

(ii)

$$\Delta = -2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 239 \cdot \tilde{G}_{12} + 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 691 \cdot (\tilde{G}_{4,8} + \tilde{G}_{8,4}),$$

$$\begin{aligned}\tau(n) = & -\frac{2 \cdot 691}{3^2 \cdot 11} \sigma_1(n) + \frac{73 \cdot 691}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2} \sigma_3(n) - \frac{691}{3^2 \cdot 5} \sigma_5(n) + \frac{691}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} \sigma_7(n) \\ & - \frac{239}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11} \sigma_{11}(n) + \frac{2^2 \cdot 691}{3 \cdot 5} \sigma_{3,7}(n) + \frac{2^2 \cdot 691}{3 \cdot 5} \sigma_{7,3}(n).\end{aligned}$$

(iii)

$$\Delta = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \tilde{G}_{12} - 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 691 \cdot \tilde{G}_{6,6},$$

$$\begin{aligned}\tau(n) = & \frac{5 \cdot 691}{2 \cdot 3^2 \cdot 11} \sigma_1(n) - \frac{691}{2^2 \cdot 3^2} \sigma_3(n) + \frac{691}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} \sigma_5(n) \\ & + \frac{2}{3^2 \cdot 7 \cdot 11} \sigma_{11}(n) - \frac{2 \cdot 691}{3} \sigma_{5,5}(n).\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\Delta = & -\frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 2797}{13} \tilde{G}_{12} + \frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 691}{13} \cdot (7 \cdot \tilde{G}_{2,10} + 14 \cdot \tilde{G}_{3,9}) \\ & + \frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 691}{13} \cdot (14 \cdot \tilde{G}_{4,8} - 8 \cdot \tilde{G}_{7,5}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(n) = & -\frac{5 \cdot 401 \cdot 691}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 13} \sigma_1(n) + \frac{29 \cdot 691}{2^4 \cdot 3 \cdot 13} \sigma_3(n) - \frac{5^2 \cdot 691}{2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13} \sigma_5(n) \\ & - \frac{691}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 13} \sigma_7(n) - \frac{5 \cdot 691}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 13} \sigma_9(n) + \frac{691}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 13} n \sigma_9(n) \\ & - \frac{5^2 \cdot 2797}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \sigma_{11}(n) + \frac{5 \cdot 691}{2 \cdot 3^2 \cdot 13} \sigma_{1,9}(n) + \frac{5 \cdot 691}{2 \cdot 13} \sigma_{2,8}(n) \\ & + \frac{2^2 \cdot 5 \cdot 691}{3 \cdot 13} \sigma_{3,7}(n) - \frac{2^2 \cdot 5 \cdot 691}{3 \cdot 13} \sigma_{6,4}(n).\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\Delta = & -2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 1153 \cdot \tilde{G}_{12} \\ & + 2^6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 691 \cdot (15 \cdot \tilde{G}_{2,10} + 30 \cdot \tilde{G}_{3,9} + 6 \cdot \tilde{G}_{4,8} + 16 \cdot \tilde{G}_{9,3}),\end{aligned}$$

4. Multiple Eisensteinreihen

$$\begin{aligned}\tau(n) = & \frac{79 \cdot 691}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 11} \sigma_1(n) - \frac{71 \cdot 691}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} \sigma_3(n) + \frac{13 \cdot 691}{2^3 \cdot 3^3} \sigma_5(n) - \frac{29 \cdot 691}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2} \sigma_7(n) \\ & - \frac{691}{2^4 \cdot 3^3} \sigma_9(n) + \frac{691}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} n \sigma_9(n) - \frac{13 \cdot 1153}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11} \sigma_{11}(n) \\ & + \frac{691}{2 \cdot 3^2} \sigma_{1,9}(n) + \frac{691}{2} \sigma_{2,8}(n) + \frac{2^2 \cdot 691}{3 \cdot 5} \sigma_{3,7}(n) + \frac{2^2 \cdot 691}{3 \cdot 5} \sigma_{8,2}(n).\end{aligned}$$

(vi)

$$\Delta = -2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 1321 \cdot \tilde{G}_{12} + 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691 \cdot (5 \cdot \tilde{G}_{2,10} + 10 \cdot \tilde{G}_{3,9} + 12 \cdot \tilde{G}_{4,8} + 8 \cdot \tilde{G}_{5,7}),$$

$$\begin{aligned}\tau(n) = & \frac{5 \cdot 127 \cdot 691}{2^6 \cdot 3^4 \cdot 11} \sigma_1(n) - \frac{67 \cdot 691}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5} \sigma_3(n) - \frac{691}{2^5 \cdot 3^3} \sigma_5(n) - \frac{691}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5} \sigma_7(n) \\ & - \frac{5 \cdot 691}{2^6 \cdot 3^4} \sigma_9(n) + \frac{691}{2^5 \cdot 3^3} n \sigma_9(n) - \frac{41 \cdot 1321}{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11} \sigma_{11}(n) + \frac{5 \cdot 691}{2^3 \cdot 3^3} \sigma_{1,9}(n) \\ & + \frac{5 \cdot 691}{2^3 \cdot 3} \sigma_{2,8}(n) + \frac{2 \cdot 691}{3} \sigma_{3,7}(n) + \frac{7 \cdot 691}{3^2} \sigma_{4,6}(n).\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}\Delta = & -\frac{2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 757}{17} \tilde{G}_{12} - \frac{2^9 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 691}{17} \tilde{G}_{6,3,3} - \frac{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691}{17} \tilde{G}_{4,5,3} \\ & + \frac{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 691}{17} \tilde{G}_{7,5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(n) = & \frac{2 \cdot 7 \cdot 691}{3^2 \cdot 11 \cdot 17} \sigma_1(n) - \frac{43 \cdot 691}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17} \sigma_3(n) + \frac{691}{2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 17} \sigma_5(n) \\ & - \frac{757}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17} \sigma_{11}(n) - \frac{2^3 \cdot 5 \cdot 691}{3 \cdot 17} \sigma_{2,2}(n) + \frac{2^2 \cdot 5 \cdot 691}{3 \cdot 17} \sigma_{3,1}(n) \\ & - \frac{2^2 \cdot 7 \cdot 691}{3 \cdot 17} \sigma_{3,3}(n) + \frac{2 \cdot 7 \cdot 691}{17} \sigma_{4,2}(n) + \frac{2^2 \cdot 7 \cdot 691}{3 \cdot 17} \sigma_{5,1}(n) \\ & + \frac{2 \cdot 5 \cdot 691}{3 \cdot 17} \sigma_{6,4}(n) + \frac{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691}{17} \sigma_{3,4,2}(n) - \frac{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691}{17} \sigma_{5,2,2}(n).\end{aligned}$$

(viii)

$$\begin{aligned}\Delta = & -\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11}{71} \tilde{G}_{12} + \frac{2^{12} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 691}{71} \tilde{G}_{5,3,4} - \frac{2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691}{71} \tilde{G}_{6,3,3} \\ & + \frac{2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691}{71} \tilde{G}_{4,5,3} + \frac{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 691}{71} \tilde{G}_{5,4,3} - \frac{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691}{71} \tilde{G}_{9,3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau(n) = & \frac{691}{5 \cdot 71} \sigma_1(n) + \frac{31 \cdot 691}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 71} \sigma_3(n) - \frac{19 \cdot 691}{3^2 \cdot 5 \cdot 71} \sigma_5(n) \\
& + \frac{691}{3 \cdot 5 \cdot 71} \sigma_7(n) - \frac{7}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 71} \sigma_{11}(n) + \frac{2^5 \cdot 691}{71} \sigma_{1,3}(n) \\
& - \frac{2^5 \cdot 3 \cdot 691}{71} \sigma_{2,2}(n) + \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 691}{71} \sigma_{3,1}(n) - \frac{2^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 691}{5 \cdot 71} \sigma_{3,3}(n) \\
& + \frac{2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 691}{5 \cdot 71} \sigma_{4,2}(n) + \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 691}{5 \cdot 71} \sigma_{5,1}(n) - \frac{2 \cdot 691}{71} \sigma_{8,2}(n) \\
& + \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691}{71} \sigma_{3,4,2}(n) + \frac{2^7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 691}{71} \sigma_{4,2,3}(n) \\
& + \frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 691}{71} \sigma_{4,3,2}(n) - \frac{2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 691}{71} \sigma_{5,2,2}(n) .
\end{aligned}$$

Beweis. Alle Identitäten ergeben sich durch die Darstellungen von Δ aus Abschnitt 4.8. $\square$

Bemerkung 4.11.5. Mit Hilfe der Theorie von Hecke-Operatoren auf Periodenpolynomen lassen sich für $\tau(n)$ ähnliche Formeln herleiten. Eine Ausführung davon findet sich im Anhang B. Die genaue Verbindung von den dortigen Formeln zu den Formeln aus Proposition 4.11.4 ist noch offen.

5. Verallgemeinerte Teilersummenfunktionen

In Abschnitt 1.1 haben wir gesehen, dass die üblichen Teilersummenfunktionen $\sigma_k(n)$ als Fourierkoeffizienten der gewöhnlichen Eisensteinreihen auftauchen. Produkte von Modulformen ergeben aus Dimensionsgründen Relationen zwischen diesen Teilersummenfunktionen und ihren Faltungen. Dabei ist diese gegeben durch:

$$(\sigma_r * \sigma_s)(n) := \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_r(k) \sigma_s(n-k) = \sum_{\substack{ad+bc=n \\ a,b,c,d>0}} d^r b^s.$$

Durch den Koeffizientenvergleich von $G_4 \cdot G_4$ und G_8 und der Tatsache, dass $\dim(M_8) = 1$ erhält man

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120\sigma_3(n) * \sigma_3(n).$$

Wir haben im vorherigen Kapitel gesehen, dass bei den Fourierkoeffizienten von Multiplen Eisensteinreihen neue Funktionen auftauchen, die Ähnlichkeit mit der Faltung von Teilersummen haben. In (4.10) auf Seite 57 haben wir analog zum obigen Beispiel erhalten:

$$\sigma_7(n) = 21\sigma_3(n) - 20\sigma_1(n) + 1680\sigma_{3,3}(n).$$

Durch Koeffizientenvergleiche der Multiplen Eisensteinreihen mit klassischen Eisensteinreihen bekommen wir durch die Theorie im letzten Kapitel und durch numerische Berechnungen eine Vielzahl von Relationen zwischen den verallgemeinerten Teilersummen. Wir wollen uns daher in diesem Kapitel intensiver mit diesen Funktionen beschäftigen.

5.1. Definition und Beispiele

Zunächst wiederholen wir folgende Definition:

Definition 5.1.1. Die *verallgemeinerte Teilersummenfunktion* der Länge l wird für natürliche $s_1, \dots, s_l \in \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$\sigma_{s_1, \dots, s_l}(n) = \sum_{\substack{u_1 v_1 + \dots + u_l v_l = n \\ u_1 > \dots > u_l > 0}} v_1^{s_1} \cdot \dots \cdot v_l^{s_l}.$$

5. Verallgemeinerte Teilersummenfunktionen

Im Fall $l = 1$ erhält man die üblichen Teilersummenfunktionen.

Anhand dieser Definition sieht man, dass die verallgemeinerten Teilersummen eine Verbindung zu der Theorie von Partitionen natürlicher Zahlen besitzen. Im Fall $s_i = 1$ für alle i treten die Teilersummen $\sigma_{1,\dots,1}(n)$ unter anderem in [Mac] auf. Als Partition einer Zahl n wird dabei eine Darstellung der Form $n = n_1 + \dots + n_l$ mit $n_1 \geq \dots \geq n_l > 0$ bezeichnet. Die Anzahl aller Partitionen der Zahl n wird mit $p(n)$ bezeichnet. Betrachtet man nun als Beispiel $\sigma_{0,0}(n)$, so werden alle Paare $u_1 v_1 + u_2 v_1 = n$ mit $u_1 > u_2 > 0$ gezählt. Dies ist gleichbedeutend mit der Anzahl der Partitionen von n , bei denen genau zwei unterschiedliche Zahlen n_i benutzt werden. So ist z.B.

$$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$$

und daher $\sigma_{0,0}(6) = 6$. Offensichtlich gilt damit unter anderem:

$$p(n) = \sigma_0(n) + \sigma_{0,0}(n) + \sigma_{0,0,0}(n) + \dots$$

Allgemein kann man nun $\sigma_{s_1,\dots,s_l}(n)$ so interpretieren, dass alle Partitionen von n aus l unterschiedlichen Teilen betrachtet werden und jeweils die Häufigkeiten der einzelnen Teile mit den s_i potenziert und miteinander multipliziert werden. So, dass z.B. aufgrund von $8 = 2+2+2+1+1 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1$ der Summand $3^{s_1} \cdot 2^{s_2}$ in $\sigma_{s_1,s_2}(8)$ auftritt.

Wir geben für die Teilersummen ein paar numerische Beispiele:

n	$\sigma_3(n)$	$\sigma_5(n)$	$\sigma_7(n)$	$\sigma_9(n)$	$\sigma_{11}(n)$	$\sigma_{0,0}(n)$	$\sigma_{5,3}(n)$
1	1	1	1	1	1	0	0
2	9	33	129	513	2049	0	0
3	28	244	2188	19684	177148	1	1
4	73	1057	16513	262657	4196353	2	9
5	126	3126	78126	1953126	48828126	5	69
6	252	8052	282252	10097892	362976252	6	357
7	344	16808	823544	40353608	1977326744	11	1374
8	585	33825	2113665	134480385	8594130945	13	4731
9	757	59293	4785157	387440173	31381236757	17	13303
10	1134	103158	10078254	1001953638	100048830174	22	34833
11	1332	161052	19487172	2357947692	285311670612	27	81375
12	2044	257908	36130444	5170140388	743375541244	29	179473

Beispiele für Teilersummen im Fall $l = 1, 2$.

5.1. Definition und Beispiele

n	$\sigma_{3,3}(n)$	$\sigma_{3,3,3}(n)$	$\sigma_{1,1,1}(n)$	$\sigma_{1,2,3}(n)$	$\sigma_{3,2,1}(n)$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0
4	9	0	0	0	0
5	45	0	0	0	0
6	165	1	1	1	1
7	486	9	3	9	3
8	1251	45	9	41	11
9	2839	190	22	148	34
10	5985	642	42	432	72
11	11583	1899	81	1109	173
12	21481	5096	140	2550	348

Beispiele für Teilersummen im Fall $l = 2, 3$.

5.2. Erzeugendenreihen

Die erweiterten Teilersummen traten in den vorherigen Kapiteln in den Fourierkoeffizienten von $g_{s_1+1,\dots,s_l+1}(\tau)$ auf. Wir wollen diese Funktionen, bzw. die Reihe $\sum_{n>0} \sigma_{s_1,\dots,s_l}(n)q^n$, in diesem Abschnitt genauer betrachten und mit Ergebnissen aus anderen Arbeiten wie, z.B. [SR], in Verbindung bringen.

Proposition 5.2.1. *Für $k \geq 2$ und $|q| < 1$ gibt es Polynome $Q_k \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad $k - 1$, so dass gilt:*

$$\sum_{n>0} \frac{Q_k(q^n)}{(1 - q^n)^k} = \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n)q^n.$$

Beweis. Man rechnet zunächst direkt nach:

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} \frac{q^n}{(1 - q^n)^k} &= \sum_{n>0} q^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} q^{n \cdot j} \right)^k \\ &= \sum_{n>0} q^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{j_1+\dots+j_k=j} 1 \right) q^{n \cdot j} \right) \\ &= \sum_{n>0} q^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k-1}{k-1} q^{n \cdot j} \right) \\ &= \sum_{n>0} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k-1}{k-1} q^{n \cdot (j+1)} \\ &= \sum_{n>0} \sum_{j=1}^{\infty} \binom{j+k-2}{k-1} q^{n \cdot j}. \end{aligned}$$

Der Koeffizient $\binom{j+k-2}{k-1}$ ist für ein festes $k \geq 2$ ein Polynom vom Grad $k - 1$ in j ohne konstanten Term und wir setzen

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i^k j^i := \frac{j \cdot (j+1) \cdot \dots \cdot (j+k-2)}{(k-1)!} = \binom{j+k-2}{k-1},$$

also insbesondere $a_{k-1}^k = ((k-1)!)^{-1}$.

Damit erhalten wir

$$\sum_{n>0} \frac{q^n}{(1 - q^n)^k} = \sum_{n>0} \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i^k \sigma_i(n) \right) q^n = \sum_{i=1}^{k-1} a_i^k \left(\sum_{n>0} \sigma_i(n) q^n \right).$$

Für $k = 2$ gilt also insbesondere $\sum_{n>0} \frac{q^n}{(1 - q^n)^2} = \sum_{n>0} \sigma_1(n) q^n$ und somit $Q_2(X) = X$. Die zu beweisende Aussage folgt nun induktiv, da man als Induktionsschritt erhält:

$$\begin{aligned}
\sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n)q^n &= \frac{1}{a_{k-1}^k} \sum_{n>0} \left(\frac{q^n}{(1-q^n)^k} - \sum_{i=1}^{k-2} a_i^k \sigma_i(n)q^n \right) \\
&= (k-1)! \sum_{n>0} \left(\frac{q^n}{(1-q^n)^k} - \sum_{i=1}^{k-2} a_i^k \frac{P_{i+1}(q^n)}{(1-q^n)^{i+1}} \right)
\end{aligned}$$

und somit

$$Q_k(X) = (k-1)! \left(X - \sum_{i=1}^{k-2} a_i^k Q_{i+1}(X)(1-X)^{k-1-i} \right),$$

welches ein Polynom vom Grad $k-1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ ist. $\square$

Es stellt sich heraus, dass Polynome mit dieser Eigenschaft genau die Eulerschen Polynome (bis auf einen Faktor X) sind, wie sie z.B. in [Hir08] eingeführt werden. Diese Polynome sind genau durch obige Eigenschaft definiert:

Definition 5.2.2. Für $k \geq 0$ ist das *Eulersche Polynom* P_k definiert durch

$$\frac{P_k(t)}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{d=0}^{\infty} (d+1)^k t^d.$$

Wir bringen zunächst im Folgenden ein paar Beispiele und stellen einige Ergebnisse aus [Hir08] dar.

Beispiele: Die ersten Eulerschen Polynome sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= 1, \\
P_1(t) &= 1, \\
P_2(t) &= 1 + t, \\
P_3(t) &= 1 + 4t + t^2, \\
P_4(t) &= 1 + 11t + 11t^2 + t^3, \\
P_5(t) &= 1 + 26t + 66t^2 + 26t^3 + t^4, \\
P_6(t) &= 1 + 57t + 302t^2 + 302t^3 + 57t^4 + t^5, \\
P_7(t) &= 1 + 120t + 1191t^2 + 2416t^3 + 1191t^4 + 120t^5 + t^6, \\
P_8(t) &= 1 + 247t + 4293t^2 + 15619t^3 + 15619t^4 + 4293t^5 + 247t^6 + t^7.
\end{aligned}$$

Ähnlich zur obigen Rekursionformel erhält man für die Eulerschen Polynome:

Proposition 5.2.3. Für die Eulerschen Polynome gilt folgende Rekursionsformel:

$$P_{k+1}(t) = P_k(t)(1+kt) + t(1-t)P'_k(t).$$

5. Verallgemeinerte Teilersummenfunktionen

Beweis. Siehe [Hir08] Gleichung (7a). $\square$

Setzt man nun $t = q^n$ und summiert den linken Term aus der Definition von $P_k(q^n)$, multipliziert mit q^n , über alle $n > 0$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} \frac{q^n P_k(q^n)}{(1 - q^n)^{k+1}} &= \sum_{n>0} q^n \sum_{d=0}^{\infty} (d+1)^k q^{n \cdot d} \\ &= \sum_{n>0} \sum_{d=1}^{\infty} d^k q^{n \cdot d} \\ &= \sum_{n>0} \sigma_k(n) q^n. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $Q_k(X) = X P_{k-1}(X)$ die Bedingung aus Proposition 5.2.1 erfüllt. Analog erhält man für zwei $k_1, k_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 > n_2 > 0} \frac{q^{n_1} P_{k_1}(q^{n_1}) q^{n_2} P_{k_2}(q^{n_2})}{(1 - q^{n_1})^{k_1+1} (1 - q^{n_2})^{k_2+1}} &= \sum_{n_1 > n_2 > 0} q^{n_1+n_2} \sum_{d_1=0}^{\infty} d_1^{k_1} q^{n_1 \cdot d_1} \sum_{d_2=0}^{\infty} d_2^{k_2} q^{n_2 \cdot d_2} \\ &= \sum_{n_1 > n_2 > 0} \sum_{d_1, d_2 > 0} d_1^{k_1} d_2^{k_2} q^{n_1 d_1 + n_2 d_2} \\ &= \sum_{n>0} \sigma_{k_1, k_2}(n) q^n. \end{aligned}$$

Damit wird offensichtlich, wie die Erzeugendenreihen der verallgemeinerten Teilersummen in dieser Form darstellbar sind:

Proposition 5.2.4. *Für die Erzeugendenreihen der erweiterten Teilersummen gilt:*

$$\sum_{n>0} \sigma_{s_1, \dots, s_l}(n) q^n = \sum_{n_1 > \dots > n_l > 0} \prod_{j=1}^l \frac{q^{n_j} P_{s_j}(q^{n_j})}{(1 - q^{n_j})^{s_j+1}}.$$

Beweis. Ergibt sich durch eine analoge Rechnung wie im vorherigen Beispiel für $\sigma_{k_1, k_2}(n)$. $\square$

Mit Proposition 5.2.4 lassen sich nun ähnliche Formeln für Produkte von Erzeugendenreihen der erweiterten Teilersummen angeben, wie es bei den Produkten von Zeta-Werten der Fall war (Stuffle Produkt). Wir betrachten dazu wieder das einfachste Beispiel:

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} \sigma_{k_1}(n) q^n \cdot \sum_{n>0} \sigma_{k_2}(n) q^n &= \sum_{n_1 > 0} \frac{q^{n_1} P_{k_1}(q^{n_1})}{(1 - q^{n_1})^{k_1+1}} \sum_{n_2 > 0} \frac{q^{n_2} P_{k_2}(q^{n_2})}{(1 - q^{n_2})^{k_2+1}} \\ &= \sum_{n_1 > n_2 > 0} \dots + \sum_{n_2 > n_1 > 0} \dots + \sum_{n_1 = n_2 > 0} \frac{q^{n_1} P_{k_1}(q^{n_1})}{(1 - q^{n_1})^{k_1+1}} \frac{q^{n_1} P_{k_2}(q^{n_1})}{(1 - q^{n_1})^{k_2+1}} \\ &= \sum_{n>0} \sigma_{k_1, k_2}(n) q^n + \sum_{n>0} \sigma_{k_2, k_1}(n) q^n + \sum_{n>0} \frac{q^n \cdot q^n P_{k_1}(q^n) P_{k_2}(q^n)}{(1 - q^n)^{k_1+k_2+2}}. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum „Zeta-Fall“ ist der letzte Term nicht $\sum_{n>0} \sigma_{k_1+k_2}(n)q^n$, aber er lässt sich als Linearkombination von einfachen Teilersummen schreiben. Dazu muss das Polynom $q^n P_{k_1}(q^n) P_{k_2}(q^n)$ (in q^n) im Zähler durch eine Linearkombination von Polynomen $(1 - q^n)^a \cdot P_b(q^n)$ mit $k_1 + k_2 + 2 - a = b + 1$ dargestellt werden. Dies liefert dann einen Anteil von $\sigma_b(n)$ in der Linearkombination. Wir werden dies weiter unten im Fall $k_1 = k_2 = 1$ explizit berechnen.

Bemerkung 5.2.5. Produkte von Erzeugendenreihen der verallgemeinerten Teilersummen wieder als Linearkombinationen von Erzeugendenreihen verallgemeinerter Teilersummen auszudrücken funktioniert für alle Längen und alle Gewichte. Der Raum der durch alle Erzeugendenreihen der verallgemeinerten Teilersummen aufgespannt wird bildet somit eine $\mathbb{Q}$ -Algebra. Auf den Beweis verzichten wir an dieser Stelle, da wir die Aussage im weiteren Verlauf nicht benötigen.

Bemerkung 5.2.6. In [Bra05] werden Multiple q -Zeta-Werte eingeführt, die für eine zulässige Indexmenge $(s_1, \dots, s_l)$ definiert sind durch

$$\zeta[s_1, \dots, s_l] := \sum_{n_1 > \dots > n_l > 0} \prod_{j=1}^l \frac{(1 - q)^{s_j} (q^{n_j})^{s_j-1}}{(1 - q^{n_j})^{s_j}}.$$

Es ist aufgrund der Ähnlichkeit von 5.2.4 zu erwarten, dass man die Ergebnisse aus [Bra05] in Verbindung mit den erweiterten Teilersummen bringen kann. Darauf werden wir in dieser Arbeit aber nicht eingehen.

Ein q -Analogon für die einfachen Riemannschen Zeta-Werte, die mit 5.2.4 im Fall $l = 1$ übereinstimmen, findet sich zudem in den Arbeiten [Zud02] und [KKW03].

Beispiele:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0(n)q^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1 - q^n)^2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_2(n)q^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1 + q^n)}{(1 - q^n)^3}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n + 4q^{2n} + q^{3n}}{(1 - q^n)^4}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)q^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n + 120q^{2n} + 1191q^{3n} + 2416q^{4n} + 1191q^{5n} + 120q^{6n} + q^{7n}}{(1 - q^n)^8}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{3,3}(n)q^n &= \sum_{n_1 > n_2 > 0} \frac{(q^{n_1} + 4q^{2n_1} + q^{3n_1})(q^{n_2} + 4q^{2n_2} + q^{3n_2})}{(1 - q^{n_1})^4 \cdot (1 - q^{n_2})^4}. \end{aligned}$$

5. Verallgemeinerte Teilersummenfunktionen

Im Kapitel über Doppel Eisensteinreihen haben wir über die Fourierreihe von $G_{4,4}$ die Identität $1680\sigma_{3,3}(n) = 20\sigma_1(n) - 21\sigma_3(n) + \sigma_7(n)$ erhalten (Siehe (4.10) auf Seite 57). Berechnet man von der rechten Seite die zugehörige Erzeugendenreihe, so erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} (20\sigma_1(n) - 21\sigma_3(n) + \sigma_7(n)) q^n &= \sum_{n>0} \left(20 \frac{q^n P_1(q^n)}{(1-q^n)^2} - 21 \frac{q^n P_3(q^n)}{(1-q^n)^4} + 21 \frac{q^n P_7(q^n)}{(1-q^n)^8} \right) \\ &= \sum_{n>0} \frac{20q^n(1-q^n)^6 P_1(q^n) - 21(1-q^n)^4 P_3(q^n) + P_7(q^n)}{(1-q^n)^8} \\ &= 1680 \sum_{n>0} \frac{q^{3n} + q^{4n} + q^{5n}}{(1-q^n)^8}. \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$\sum_{n_1>n_2>0} \frac{(q^{n_1} + 4q^{2n_1} + q^{3n_1})(q^{n_2} + 4q^{2n_2} + q^{3n_2})}{(1-q^{n_1})^4 \cdot (1-q^{n_2})^4} = \sum_{n>0} \frac{q^{3n} + q^{4n} + q^{5n}}{(1-q^n)^8},$$

was sich vermutlich auch ohne die Theorie der Doppel Eisensteinreihen zeigen lässt.

Zum Abschluss dieses Abschnittes geben wir noch eine Familie von Relationen an, die per Zufall entdeckt und für $1 \leq n \leq 100$ und $1 \leq k \leq 30$ geprüft wurde.

Vermutung 5.2.7. Für $k \geq 1$ gilt:

$$4\sigma_k(n) - 5\sigma_{k+2}(n) + \sigma_{k+4}(n) = 60 \sum_{i=2}^{k+2} \lambda_{i,k} \cdot \sigma_{i,k+3-i}(n)$$

wobei $\lambda_{2,k} = k+2$ und für $i > 2$:

$$\lambda_{i,k} = \frac{\prod_{j=1}^{i-3} (k-j)}{(i-1)!} \cdot \left((2^{i-1} - 1) k^2 - ((3i-5) 2^{i-2} - 4i+5) k + (2^{i-2} - 4) (i^2 - 3i + 2) \right).$$

Wir setzen $h_k(n) := \frac{1}{60} (4\sigma_k(n) - 5\sigma_{k+2}(n) + \sigma_{k+4}(n))$ und geben die ersten Beispiele für $1 \leq k \leq 5$:

$$\begin{aligned} h_1(n) &= 3\sigma_{2,2}(n) - \sigma_{3,1}(n) \\ h_2(n) &= 4\sigma_{2,3}(n) + 3\sigma_{3,2}(n) - \sigma_{4,1}(n) \\ h_3(n) &= 5\sigma_{2,4}(n) + 10\sigma_{3,3}(n) + 4\sigma_{4,2}(n) - \sigma_{5,1}(n) \\ h_4(n) &= 6\sigma_{2,5}(n) + 20\sigma_{3,4}(n) + 22\sigma_{4,3}(n) + 7\sigma_{5,2}(n) - \sigma_{6,1}(n) \\ h_5(n) &= 7\sigma_{2,6}(n) + 33\sigma_{3,5}(n) + 60\sigma_{4,4}(n) + 49\sigma_{5,3}(n) + 14\sigma_{6,2}(n) - \sigma_{7,1}(n) \end{aligned}$$

Für ein explizit gegebenes k lassen sich diese mit Hilfe der Doppel Shuffle Relationen der Doppel Eisensteinreihen beweisen. Wir verzichten hier aber auf die weitere Ausführung.

5.3. Die Teilersummen $\sigma_{1,\dots,1}(n)$

Die Relationen zwischen verallgemeinerten Teilersummen, die wir bisher gewonnen haben, haben wir meistens über den Koeffizientenvergleich von Fourierreihen Multipler Eisensteinreihen erhalten. Da diese nur für genügend große s_i definiert sind, kann man somit keine Relationen erhalten, die z.B. $\sigma_{1,1,1}(n)$ enthalten, da dieser Term in der Fourierreihe von $G_{2,2,2}(\tau)$ auftauchen würde. Diese Triple Eisensteinreihe ist aber nicht definiert, sofern man nach der ursprünglichen Definition über die Reihendarstellung geht. Wir wollen nun die Identität aus Abschnitt 4.8 herleiten, die dort benötigt wurde um eine „richtige“ Definition von $G_{2,2,2}(\tau)$ anzugeben.

In [SR] treten die Teilersummen $\sigma_{1,\dots,1}(n)$ in einem anderen Kontext auf. Dort wird unter anderem folgendes gezeigt:

Satz 5.3.1. *Mit der Bezeichnung*

$$A_k(q) := \sum_{n>0} \underbrace{\sigma_{1,\dots,1}}_k(n) q^n$$

gilt:

$$A_k(q) = \frac{1}{(2k+1)2k} \left((6A_1(q) + k(k-1)) \cdot A_{k-1}(q) - 2q \frac{d}{dq} A_{k-1}(q) \right).$$

Beweis. Siehe Korollar 3 in [SR]. □

Wir wollen mit Satz 5.3.1 zunächst in Beispiel 5.3.2 eine lineare Relation herleiten, die $\sigma_{1,1}(n)$ enthält. Es zeigt sich, dass die entstehende Relation auch aus der erweiterten Definition von $G_{2,2}$ und den Double Shuffle Relationen aus Satz 4.7.1 folgt. Danach wollen wir mit Hilfe von Satz 5.3.1 eine Identität herleiten, die benötigt wurde für die Definition der Triple Eisensteinreihe $G_{2,2,2}$ in Abschnitt 4.10.

Beispiel 5.3.2. Der Fall $k = 2$ in Satz 5.3.1 ergibt:

$$A_2(q) = \frac{1}{20} \left(6A_1(q)^2 + 2A_1(q) - 2q \frac{d}{dq} A_1(q) \right). \quad (5.1)$$

5. Verallgemeinerte Teilersummenfunktionen

Für $A_1(q)^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
 A_1(q)^2 &= \left(\sum_{n>0} \sigma_1(n) q^n \right)^2 \\
 &= \sum_{n_1>0} \frac{q^{n_1}}{(1-q^{n_1})^2} \sum_{n_2>0} \frac{q^{n_2}}{(1-q^{n_2})^2} \\
 &= \sum_{n_1>n_2>0} \frac{q^{n_1+n_2}}{(1-q^{n_1})^2(1-q^{n_2})^2} + \sum_{n_2>n_1>0} \frac{q^{n_1+n_2}}{(1-q^{n_1})^2(1-q^{n_2})^2} + \sum_{n_1=n_2>0} \frac{q^{2n_1}}{(1-q^{n_1})^4} \\
 &= 2A_2(q) + \sum_{n_1=n_2>0} \frac{q^{2n_1}}{(1-q^{n_1})^4}.
 \end{aligned}$$

Da $q^n P_3(q^n) - q^n(1-q^n)^2 P_1(q^n) = q^n \cdot (1 + 4q^n + (q^n)^2) - q^n(1-q^n)^2 = 6q^{2n}$, erhält man:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n>0} \frac{q^{2n}}{(1-q^n)^4} &= \frac{1}{6} \sum_{n>0} \frac{q^n \cdot (1 + 4q^n + (q^n)^2) - q^n \cdot (1-q^n)^2}{(1-q^n)^4} \\
 &= \sum_{n>0} \frac{q^n P_3(q^n) - q^n(1-q^n)^2 P_1(q^n)}{(1-q^n)^4} \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{n>0} \frac{q^n P_3(q^n)}{(1-q^n)^4} - \frac{1}{6} \sum_{n>0} \frac{q^n P_1(q^n)}{(1-q^n)^2} \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{n>0} \sigma_3(n) q^n - \frac{1}{6} A_1(q).
 \end{aligned}$$

Insgesamt ist damit $A_1(q)^2 = 2A_2(q) + \frac{1}{6} \sum_{n>0} \sigma_3(n) q^n - \frac{1}{6} A_1$. Eingesetzt in (5.1) auf Seite 93 ergibt:

$$A_2(q) = \frac{1}{20} \left(12A_2(q) + \sum_{n>0} \sigma_3(n) q^n - A_1 + 2A_1(q) - 2q \frac{d}{dq} A_1(q) \right)$$

und somit folgt die Relation

$$8\sigma_{1,1}(n) = \sigma_3(n) + \sigma_1(n) - 2n\sigma_1(n). \quad (5.2)$$

Bemerkung 5.3.3. Formel (5.2) lässt sich auch mit den erweiterten Doppel Eisensteinreihen zeigen. Wir haben gesehen, dass

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{2,2}(\tau) &= \frac{1}{1920} + \sum_{n>0} \left(\sigma_{1,1}(n) - \frac{1}{8} \sigma_1(n) + \frac{n}{4} \sigma_1(n) \right) q^n, \\
 \tilde{G}_4(\tau) &= \frac{1}{1440} + \frac{1}{3!} \sum_{n>0} \sigma_3(n) q^n.
 \end{aligned}$$

Nach 4.7.1 ist $\tilde{G}_{2,2} = \frac{3}{4} \tilde{G}_4$ und durch Koeffizientenvergleich erhält man genau (5.2).

5.3. Die Teilersummen $\sigma_{1,\dots,1}(n)$

Wir werden nun auf ähnliche Weise eine Identität herleiten, die im Abschnitt 4.8 benutzt wurde, um eine Definition von $G_{2,2,2}$ anzugeben.

Lemma 5.3.4. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{640}\sigma_5(n) &= \frac{13}{1920}\sigma_1(n) - \frac{5}{24}\sigma_{1,1}(n) + \sigma_{1,1,1}(n) \\ &\quad + \frac{n}{8}\left(\sigma_{1,1}(n) - \frac{1}{8}\sigma_1(n)\right) \\ &\quad + \frac{n^2}{96}\sigma_1(n). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Beweis. Betrachtet man 5.3.1 für den Fall $k = 3$, dann erhält man:

$$42A_3(q) = 6A_1(q) \cdot A_2(q) + 6A_2(q) - 2q \frac{d}{dq} A_2(q).$$

Es ist daher wieder $A_1(q) \cdot A_2(q) = \sum_{n>0} \sigma_1(n)q^n \cdot \sum_{n>0} \sigma_{1,1}(n)q^n$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} A_1(q) \cdot A_2(q) &= \sum_{n_1>0} \frac{q^{n_1}}{(1-q^{n_1})^2} \sum_{n_2>n_3>0} \frac{q^{n_2}q^{n_3}}{(1-q^{n_2})^2 \cdot (1-q^{n_3})^2} \\ &= \sum_{n_1>n_2>n_3>0} \dots + \sum_{n_2>n_1>n_3>0} \dots + \sum_{n_2>n_3>n_1>0} \dots + \sum_{n_1=n_2>n_3>0} \dots + \sum_{n_2>n_1=n_3>0} \dots \\ &= 3A_3(q) + \sum_{n_2>n_3>0} \frac{q^{2n_2}q^{n_3}}{(1-q^{n_2})^4 \cdot (1-q^{n_3})^2} + \sum_{n_2>n_3>0} \frac{q^{n_2}q^{2n_3}}{(1-q^{n_2})^2 \cdot (1-q^{n_3})^4}. \end{aligned}$$

Benutzen wir hier wieder die Identität $q^{2n} = \frac{1}{6}(q^n P_3(q^n) - q^n(1-q^n)^2 P_1(q^n))$, so erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} A_1(q) \cdot A_2(q) &= 3A_3(q) + \frac{1}{6} \sum_{n>0} (\sigma_{3,1}(n) - \sigma_{1,1}(n) + \sigma_{1,3}(n) - \sigma_{1,1}(n)) q^n \\ &= 3A_3(q) - \frac{1}{3}A_2(q) + \frac{1}{6} \sum_{n>0} (\sigma_{3,1}(n) + \sigma_{1,3}(n)) q^n. \end{aligned}$$

Setzt man dies oben ein, so ergibt sich die Relation:

$$24\sigma_{1,1,1}(n) = 4\sigma_{1,1}(n) + \sigma_{3,1}(n) + \sigma_{1,3}(n) - 2n\sigma_{1,1}(n). \quad (5.4)$$

Zusammen mit der bereits bekannten Identität $\sigma_{1,3}(n) + \sigma_{3,1}(n) = -\frac{3}{80}\sigma_1(n) + \frac{1}{8}\sigma_3 - \frac{n}{8}\sigma_3(n) + \frac{3}{80}\sigma_5(n)$, ergibt sich

$$\frac{3}{80}\sigma_5(n) = 24\sigma_{1,1,1}(n) - 4\sigma_{1,1}(n) + 2n\sigma_{1,1}(n) + \frac{3}{80}\sigma_1(n) - \frac{1}{8}\sigma_3 + \frac{n}{8}\sigma_3(n).$$

Aufgrund von (5.2) auf Seite 94 gilt $\sigma_3(n) = 8\sigma_{1,1}(n) - \sigma_1(n) + 2n\sigma_1(n)$. Setzt man dies in obige Gleichung ein und multipliziert beide Seiten mit $\frac{1}{24}$, so ergibt sich das Gewünschte. $\square$

Ausblick

In diesem Abschnitt wollen wir darauf eingehen, in welche Richtung die in dieser Arbeit erwähnten Konzepte weiter untersucht werden könnten.

Wir haben in dieser Arbeit mehrere Ausführungen bestimmter Rechnungen ausgelassen und nur skizzenhaft angegeben. So z.B. die Berechnung des Kerns von $\pi : \mathcal{E}_k^{(\leq 3)} \rightarrow iq\mathbb{R}[[q]]$ in Kapitel 4.8, die Verbindung zu Multiplen q -Zeta-Werten in Bemerkung 5.2.6, die Ausführung der Shuffle Relation für Multiple Eisensteinreihen im absolut konvergenten Fall in Bemerkung 4.4.7 oder die Abgeschlossenheit der Erzeugendenreihen der verallgemeinerten Teilersummen unter der Multiplikation in Bemerkung 5.2.5. Neben diesen Aspekten wollen wir nun noch weitere erwähnen, die in fortführenden Arbeiten untersucht werden könnten.

Wie bereits schon in den vorherigen Kapiteln betont, versuchen wir Objekte im Raum der holomorphen Funktionen auf der oberen Halbebene zu finden, die sich wie Zeta-Werte „verhalten“ und in der die klassischen Eisensteinreihen den gewöhnlichen Riemanschen Zeta-Werten entsprechen.

Dies wollen wir durch folgende Definition, welche sich in einer ähnlichen Form in [GKZ06] findet, ein wenig spezifizieren:

Definition 5.3.5. Ist V ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, so nennen wir ein Paar (A, ϕ) bestehend aus einem $\mathbb{Q}$ -Vektorraum A und einem Homomorphismus $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, A)$ eine *Realisierungen* von V .

Die Ergebnisse aus [GKZ06], die wir im Kapitel über die Doppel Eisensteinreihen (Satz 4.7.1) erwähnt haben, liefern eine Realisierung für folgenden Raum:

Definition 5.3.6. (Formaler Doppel Zeta-Raum) Der Formale Doppel Zeta-Raum $\mathcal{D}_k$ vom Gewicht k ist der durch formale Symbole $Z_{r,s}, P_{r,s}, Z_k$ mit $r, s \geq 1, r + s = k$ aufgespannte $\mathbb{Q}$ -Vektorraum modulo der Relationen:

$$\begin{aligned} P_{r,s} &= Z_{r,s} + Z_{s,r} + Z_k, \\ P_{r,s} &= \sum_{j=2}^{k-1} \left(\binom{j-1}{r-1} + \binom{j-1}{s-1} \right) Z_{j,k-j}. \end{aligned}$$

Für eine genaue Formulierung siehe Theorem 7 in [GKZ06]. Dort wird eine Realisierung von $\mathcal{D}_k$ angegeben durch $(q\mathbb{Q}[[q]], \phi)$, wobei ϕ im Wesentlichen die Symbole Z_k

und $Z_{r,s}$ auf die Realteile der Fourierreihen von $\tilde{G}_k$ bzw. $\tilde{G}_{r,s}$ abbildet, zusammen mit den erwähnten Zusätzen aus Satz 4.7.1.

Der Beweis von Theorem 7 nutzt dabei Erzeugendenreihen und es ist zu erwarten, dass man einen analogen Beweis für den Fall der Triple Eisensteinreihen angeben kann, d.h. dass man eine Realisierung für den folgenden Raum mit Hilfe der in dieser Arbeit berechneten Fourierreihen von Triple Eisensteinreihen erhält:

Definition 5.3.7. (Formale Triple Zeta Raum) Der *Formale Triple Zeta Raum* $\mathcal{T}_k$ vom Gewicht k ist der durch die formalen Symbole Z_{s_1,s_2,s_3} , $Z_{r,s}$, Z_k mit $s_1, s_2, s_3, r, s \geq 1$, $s_1 + s_2 + s_3 = r + s = k$ aufgespannte $\mathbb{Q}$ -Vektorraum modulo den Relationen:

$$Z_{r,s} + Z_{s,r} + Z_k = \sum_{j=2}^{k-1} \left(\binom{j-1}{r-1} + \binom{j-1}{s-1} \right) Z_{j,k-j}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \left(\delta_{s_3,k_3} \binom{k_1-1}{s_1-1} + \binom{k_1-1}{s_2-1} \cdot \left[\binom{k_2-1}{s_3-k_3} + \binom{k_2-1}{s_3-1} \right] \right) Z_{k_1,k_2,k_3} \\ = Z_{s_1,s_2,s_3} + Z_{s_2,s_1,s_3} + Z_{s_2,s_3,s_1} + Z_{s_1+s_2,s_3} + Z_{s_2,s_1+s_3} . \end{aligned}$$

Diese Relationen sind im Wesentlichen die in Proposition 3.1.5 erwähnten Doppel Shuffle Relationen im Fall der Triple Eisensteinreihen.

Neben dem Fall der Triple Eisensteinreihen bleibt natürlich die Frage nach dem allgemeinen Fall. Wir haben in dieser Arbeit die allgemeine Konstruktion zur Berechnung der Multiplen Eisensteinreihen $G_{s_1,\dots,s_l}$ für $s_i > 2$ hergeleitet. Zudem haben wir in Vermutung 4.10.2 durch numerische Berechnungen gesehen, dass es für die Multiplen Eisensteinreihen $G_{2,\dots,2}$ eine „vernünftige“ Definition zu geben scheint, so dass die entstehenden Reihen analoge Relationen wie die zugehörigen Multiplen Zeta-Werte erfüllen. Eine umfassende Theorie, die eine allgemeine Definition von $G_{s_1,\dots,s_l}$ für alle $s_1 > 1$, $s_2, \dots, s_l \geq 1$ beinhalten sollte, gilt es daher noch zu entwickeln.

Bei der Berechnung der Fourierreihen der Multiplen Eisensteinreihen wurde klar (siehe Konstruktion 4.5.3), dass die Fourierreihen rationale Vielfache von $\tilde{\zeta}_{*,\dots,*} \in \tilde{\mathfrak{Z}}$ und $\sigma_{*,\dots,*}(n)$ sind. Die verallgemeinerten Teilersummen haben sich zudem in dieser Arbeit als interessante, eigenständige Objekte dargestellt, die es noch weiter zu untersuchen gilt. Man kann zeigen (siehe auch Anmerkungen in Kapitel 5), dass der Raum, der durch die $\sum_{n>0} \sigma_{*,\dots,*}(n)q^n$ erzeugt wird, unter der Multiplikation abgeschlossen ist und somit eine $\mathbb{Q}$ -Algebra bildet.

Sei nun $\mathfrak{G} \subset \mathbb{Q}[q]$ die von allen $\sum_{n>0} n^* \sigma_{*,\dots,*}(n) q^n$ erzeugte $\mathbb{Q}$ -Algebra. Mit dieser Notation können die Multiplen Eisensteinreihen als Objekte in

$$\mathfrak{M} := \tilde{\mathfrak{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathfrak{G}$$

aufgefasst werden, da diese in der Unter algebra $\mathcal{E} := \sum_{k>0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_k^{(\leq n)} \subset \mathfrak{M}$ enthalten sind. Für die umfassende Theorie von Multiplen Eisensteinreihen scheint es daher von großer Nützlichkeit, die Algebren $\mathcal{E}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}$ genauer zu untersuchen.

Eine der Motivationen, sich überhaupt mit den Multiplen Eisensteinreihen zu beschäftigen war es, dass man Objekte erhält, die genau wie die Multiplen Zeta-Werte die Doppel Shuffle Relationen erfüllen. Die Multiplen Eisensteinreihen sind aber im Gegensatz zu den Multiplen Zeta-Werten nicht einfach nur Zahlen, sondern analytische Funktionen. Man hat somit einen großen zusätzlichen Fundus an Werkzeugen, wie z.B. die Funktionentheorie, um diese Objekte zu studieren. Wir sind in dieser Arbeit wenig auf diesen Aspekt eingegangen und haben nur an einer Stelle, beim Beweis des Transformationsverhalten von Multiplen Eisensteinreihen in Satz 4.2.2, eine Relation zwischen Multiplen Zeta-Werten hergeleitet, die die analytischen Aspekte von Multiplen Eisensteinreihen benutzte. Es ist zu erwarten, dass man durch ein besseres Verständnis der Multiplen Eisensteinreihen als analytische Funktion zusammen mit funktionentheoretischen Mitteln neue Möglichkeiten erhält, Relationen zwischen Multiplen Zeta-Werten herzuleiten oder auszuschliessen.

In der Theorie der Modulformen bilden die Hecke-Operatoren einen sehr wichtigen Bestandteil. Auch hier bleibt die Frage offen, inwiefern sich die Theorie der Hecke-Operatoren in der Theorie der Multiplen Eisensteinreihen wiederfinden lassen kann. In Satz 3.2.3 haben wir gesehen, dass Relationen zwischen Doppel Zeta-Werten $\zeta(r, s)$, mit r, s ungerade, sich in eindeutiger Weise durch Periodenpolynomen zu Spitzenformen ergeben. Wie im Anhang B ausgeführt, gibt es auf dem Raum der Periodenpolynome einen Begriff von Hecke-Operatoren $\tilde{T}_n : V_k^- \rightarrow V_k^-$, der sich mit dem Begriff der Hecke-Operatoren auf Modulformen verträgt. Damit ergeben sich sozusagen „Hecke-Operatoren auf Relationen von ungeraden Doppel Zeta-Werten“:

$$\sum_{\substack{r=3 \\ \text{rungerade}}}^{k-1} \lambda_r \zeta(r, k-r) = 0 \xrightarrow{3.2.3} P \in V_k^- \xrightarrow{\tilde{T}_n} P' \in V_k^- \xrightarrow{3.2.3} \sum_{\substack{r=3 \\ \text{rungerade}}}^{k-1} \lambda'_r \zeta(r, k-r) = 0.$$

Die Abbildung der λ_r zu den λ'_r kann man dabei für jedes n explizit angeben. Eine andere Idee Hecke-Operatoren mit den Multiplen Zeta-Werten bzw. Eisensteinreihen einzubauen, ist die Suche nach einer Abbildung $T_n : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$, die auf $M_k \subset \mathfrak{M}$ mit den gewöhnlichen Hecke-Operatoren übereinstimmt.

A. Einführung in Multiple Zeta-Werte

Dieses Kapitel entstand im Rahmen des Vorbereitungsprojektes für die vorliegende Masterarbeit.

Multiple Zeta-Werte sind Verallgemeinerungen von Werten der Riemannschen Zeta-Funktion an ganzzahligen Stellen. Sie haben in den letzten beiden Jahrzehnten vermehrtes Interesse erhalten, da sie in unterschiedlichen Bereichen, wie z.B. der theoretischen Physik, auftauchen. Dieses Kapitel soll eine kleine Einführung in dieses Thema bieten. Wir richten uns dabei hauptsächlich nach [Zud03] und [Zag94].

A.1. Werte der Riemannschen Zeta-Funktion

Zur Vollständigkeit des Themas Multiple Zeta-Werte werden wir in diesem Abschnitt eine kleine Übersicht zu den Werten der Riemannschen Zeta-Funktion geben, die wie aus der Analysis bekannt für ein $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ definiert ist durch

$$\zeta(s) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^s}$$

und welche meromorphe Fortsetzung auf die gesamte komplexe Ebene besitzt. Für die ganzzahligen Werte der Zeta-Funktion ist bisher Folgendes bekannt:

Satz A.1.1. *Für die ganzzahligen Werte von ζ gilt:*

- (i) $\zeta(s) = -\frac{(2\pi i)^s B_s}{2s!}$ für $s = 2, 4, 6, \dots$
- (ii) $\zeta(s) = -\frac{B_{1-s}}{1-s}$ für $s = 0, -1, -2, -3, \dots$. Also gilt insbesondere $\zeta(s) = 0$ für $s = -2, -4, \dots$
- (iii) Bei $s = 1$ liegt ein Pol der Ordnung 1 und Residuum 1 vor.
- (iv) $\zeta(3)$ ist irrational.
- (v) Mindestens einer der vier Werte $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$ und $\zeta(11)$ ist irrational.
- (vi) Ist $k > 3$ eine ungerade Zahl, dann ist

$$\dim_{\mathbb{Q}} \langle 1, \zeta(3), \dots, \zeta(k) \rangle \geq \frac{1}{3} \log(k).$$

und somit sind insbesondere unendlich viele der Werte $\zeta(2n+1)$ für $n > 1$ irrational.

Beweis. Die Aussage (i) geht auf Euler zurück und wir werden im Folgenden einen Beweis hierzu skizzieren. Die Aussagen (ii) und (iii) lassen sich an der meromorphen Fortsetzung 1.2.2 ablesen sowie der Tatsache, dass $\Gamma(s)$ bei $s = 0, -1, -2, \dots$ Pole erster Ordnung besitzt und sich somit an den Stellen $-1, -2, -3, \dots$ hebbare Pole befinden mit obigen Werten (siehe dazu z.B. [EF06] oder [Dra]).

Aussage (iv) wurde 1978 von Roger Apéry bewiesen und es gibt mittlerweile weitere Beweise. Der Beweis zu (v) kommt von W. Zudilin 2001 und (vi) stammt von Tanguy Rivoal 2001 (siehe [Riv02]).

Neben dem Beweis von Euler zu (i), der auf der Reihenentwicklung des cotangens zurück geht, gibt es aber auch elementarere Beweise von Calabi und Zagier. Wir geben den Beweis für $s = 2$ von Calabi wieder und skizzieren die Idee von Zagier für einen Beweis per Induktion für alle s (siehe [Zag94]), welche aber auch eine schöne Rekursionsformel für Zetawerte liefert.

Man betrachtet das Integral von $(1 - x^2y^2)^{-1}$ über das Einheitsquadrat $S = [0, 1] \times [0, 1]$ im $\mathbb{R}^2$ und formt dies zunächst mit Hilfe der geometrischen Reihe um:

$$\begin{aligned} \int_S (1 - x^2y^2)^{-1} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 (1 + x^2y^2 + x^4y^4 + \dots) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} y^{2n} dx dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{2n} y^{2n} dx dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \\ &= \zeta(2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \zeta(2). \end{aligned}$$

Die entscheidende Idee von Calabi war es nun, folgende Substitution durchzuführen:

$$x = \frac{\sin(u)}{\cos(v)}, \quad y = \frac{\sin(v)}{\cos(u)}.$$

Betrachtet man hierzu die Determinante der Jacobimatrix des zugehörigen Diffeomorphismus T , dann ist dieser genau $1 - x^2y^2$ und man erhält mit der Transformationsformel:

$$\int_S (1 - x^2y^2)^{-1} dx dy = \int_{T^{-1}(S)} 1 du dv.$$

Als das Urbild von S ergibt sich das Dreieck $\{u, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}\}$, welches den Flächeninhalt $\frac{\pi^2}{8}$ hat und somit

$$\frac{\pi^2}{8} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \zeta(2) \Rightarrow \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Auf Zagier geht die nun folgende Idee für eine Induktion zurück. Zur Veranschaulichung betrachten wir zunächst den Fall $s = 4$ und definieren folgende Funktion:

$$f(m, n) = \frac{1}{mn^3} + \frac{1}{2m^2n^2} + \frac{1}{m^3n}.$$

Durch direktes Nachrechnen erhält man, dass

$$f(m, n) - f(m + n, n) - f(m, m + n) = \frac{1}{m^2 n^2}.$$

Damit erhält man folgende Identität

$$\begin{aligned} \zeta(2)^2 &= \sum_{m, n > 0} \frac{1}{m^2 n^2} \\ &= \sum_{m, n > 0} (f(m, n) - f(m + n, n) - f(m, m + n)) \\ &= \sum_{m, n > 0} f(m, n) - \sum_{m > n > 0} f(m, n) - \sum_{n > m > 0} f(m, n) \\ &= \sum_{m=n > 0} f(m, n) = \sum_{n > 0} f(n, n) \\ &= \sum_{n > 0} \left(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{n^4} \right) = \frac{5}{2} \zeta(4). \end{aligned}$$

Somit ist $\zeta(4) = \frac{2\zeta(2)^2}{5}$, also $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Man kann nun ähnlich eine Beziehung für $\zeta(s)$ zu $\zeta(k)$ mit $s > k$ gerade herstellen, indem man eine verallgemeinerte Funktion f wie folgt definiert:

$$f(m, n) = \frac{1}{mn^{k-1}} + \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{k-2} \frac{1}{m^r n^{k-r}} + \frac{1}{m^{k-1} n}.$$

Diese stimmt offensichtlich für $k = 4$ mit obiger Funktion überein und man erhält erneut durch direktes Nachrechnen, dass eine analoge Formel wie oben gilt:

$$f(m, n) - f(m + n, n) - f(m, m + n) = \sum_{\substack{0 < j < k \\ j \text{ gerade}}} \frac{1}{m^j n^{k-j}}.$$

Die selbe Rechnung wie eben liefert dann

$$\sum_{\substack{0 < j < k \\ j \text{ gerade}}} \zeta(j) \zeta(k - j) = \frac{k+1}{2} \zeta(k),$$

welches als Induktionsschritt für den Beweis von (i) benutzt werden kann, aber auch alleine schon eine schöne Rekursionsformel für Zetawerte darstellt, die Euler selbst noch nicht bekannt war.

Im Beweis zu (iv) zeigt Apéry, dass für natürliche p, q mit q genügend groß relativ zu einem $\epsilon > 0$ die Ungleichung

$$\left| \zeta(3) - \frac{p}{q} \right| > q^{-(\epsilon + 13.417820\dots)}$$

gilt und somit $\zeta(3)$ nicht rational sein kann (siehe [vdP79]). □

Eine Aussage für ungerade s außer 1 und 3 kann bisher nicht gegeben werden. Es wird vermutet, dass alle $\zeta(2n + 1)$ für $n > 1$ transzendent und über $\mathbb{Q}$ algebraisch unabhängig sind.

A.2. Multiple Zeta-Werte

Multiple Zeta-Werte sind eine natürliche Verallgemeinerung der Riemannschen Zeta-Funktion an ganzzahligen Stellen.

Definition A.2.1. (Multipler Zeta-Wert, Länge, Gewicht)

- (i) Ein Tupel $s := (s_1, \dots, s_l) \in \mathbb{N}^l$ natürlicher Zahlen mit $s_1 > 1$ nennen wir eine *zulässige Indexmenge* und bezeichnen mit $\ell(s) := l$ die *Länge* und mit $|s| := \sum s_i$ das *Gewicht* von s .
- (ii) Für eine zulässige Indexmenge s nennen wir

$$\zeta(s) = \zeta(s_1, \dots, s_l) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}}$$

einen *Multiplen Zeta-Wert (MZV)* der Länge $\ell(s)$ und Gewicht $|s|$.

- (iii) Im Fall $\ell(s) = 2, 3$ sprechen wir von Doppel bzw. Triple Zeta-Werten.

Multiple Zeta-Werte der Länge 1 entsprechen genau den Werten der Riemannschen Zeta-Funktion an natürlichen Stellen.

Analog zum Satz von Euler lassen sich einige Multiple Zeta-Werte mit geradem Gewicht darstellen als ein rationales Vielfaches von π -Potenzen. So gilt z.B.:

Satz A.2.2. Für $n \geq 1$ gilt:

$$\zeta(\underbrace{2, \dots, 2}_n) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

und

$$\zeta(\{3, 1\}_n) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!},$$

wobei $\{3, 1\}_n := \underbrace{(3, 1, 3, 1, \dots, 3, 1)}_{2n}$.

Beweis. Der Beweis der ersten Aussage findet sich in [Zag] und die zweite Aussage ist in [Zud03] Theorem 8. □

Neben der Darstellung als Reihe besitzen Multiple Zeta-Werte auch eine Darstellung durch iterierte Integrale. Hierzu betrachten wir als Beispiel zunächst folgendes Integral, welches wir mit Hilfe der geometrischen Reihe umformen:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x \frac{dy}{1-y} &= \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} y^n dy \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} y^{n+1} \right]_0^x \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n dx \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).
\end{aligned}$$

Analog sieht man leicht ein, dass für beliebige $1 < s \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\zeta(s) = \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} \int_0^{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \dots \int_0^{x_{s-2}} \frac{dx_{s-1}}{x_{s-1}} \int_0^{x_{s-1}} \frac{dx_s}{1-x_s}.$$

Dies funktioniert allgemein auch für Multiple Zeta-Werte, indem man pro Level eine Form vom Typ $\frac{dy}{1-y}$ integriert. Als Beispiel betrachten wir die Integraldarstellung für $\zeta(2, 2)$:

$$\begin{aligned}
\zeta(2, 2) &= \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} \int_0^{x_1} \frac{dx_2}{1-x_2} \int_0^{x_2} \frac{dx_3}{x_3} \int_0^{x_3} \frac{dx_4}{1-x_4} \\
&= \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} \int_0^{x_1} \frac{1}{1-x_2} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} x_2^{n+1} dx_2 \\
&= \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} \int_0^{x_1} \sum_{m \geq 0} x_2^m \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} x_2^{n+1} dx_2 \\
&= \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} \left[\sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2 (m+n+2)} x_2^{m+n+2} \right]_0^{x_1} \\
&= \int_0^1 \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2 (m+n+2)} x_1^{m+n+1} dx_1 \\
&= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2 (m+n+2)^2} = \sum_{m' > n' > 0} \frac{1}{n'^2 m'^2}.
\end{aligned}$$

Allgemein gilt:

Proposition A.2.3. (*Drinfeld Integraldarstellung*) Der Multiple Zeta-Wert $\zeta(s_1, \dots, s_n)$ besitzt folgende Darstellung durch iterierte Integrale:

$$\zeta(s_1, \dots, s_l) = \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1} \int_0^{x_1} \frac{dx_2}{x_2} \dots \int_0^{x_{s_1-1}} \frac{dx_{s_1}}{1-x_{s_1}} \int_0^{x_{s_1}} \frac{dx_{s_1+1}}{x_{s_1+1}} \dots \int_0^{x_{|s|-1}} \frac{dx_{|s|}}{1-x_{|s|}}.$$

Beweis. Für jedes s_i hat man s_i -Integrale, wobei $s_i - 1$ die Form $\int \frac{dx_j}{x_j}$ und eins die Form $\int \frac{dx_j}{1-x_j}$ hat. Insgesamt hat man also $|s|$ Integrale. Die Identität erhält man durch direktes Nachrechnen. Für jedes s_i führt man die obige Rechnung des Beispiels durch und erhält dann nach einem Indexshift genau die Summendarstellung der Multiplen Zeta-Werte. $\square$

Die beiden unterschiedlichen Darstellungen als Summe und als iterierte Integrale liefert zwei unterschiedliche Darstellungen für das Produkt von zwei Multiplen Zeta-Werten, die wir explizit im Abschnitt über Doppel Zeta-Werte darstellen.

Eine der bekanntesten Relationen zwischen Multiplen Zeta-Werten ist die Folgende:

Proposition A.2.4. (*Summenformel*) Für alle $k > 1$ und alle $1 \leq l < k$ gilt:

$$\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_l = k \\ k_1 > 1}} \zeta(k_1, \dots, k_l) = \zeta(k).$$

Beweis. Siehe [GX08b]. $\square$

Der einfachste Fall ist hierbei $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$. Diese Relation wurde schon von Goldbach und Euler bewiesen und in [BB05] finden sich 32 Varianten, diese zu beweisen.

Im folgenden Abschnitt werden wir nun einen algebraischen Rahmen zur Behandlung von Doppel Shuffle Relationen vorstellen und kurz auf Multiple Polylogarithmen eingehen.

A.3. Hoffman Algebra & Polylogarithmen

Dieser Abschnitt soll kurz die algebraische Beschreibung der MZVs darstellen, die von M. Hoffmann in [Hof97] eingeführt wurde. Wir benutzen dabei die Notationen und Vorhergehensweise aus [Zud03].

Für eine endliche Menge Σ (Buchstaben) definieren wir die Menge der Wörter Σ^* als das durch Σ erzeugte freie Monoid, mit dem Aneinanderhängen von Wörtern als Verknüpfung und dem leeren Wort 1 als neutralem Element. Ist $\Sigma = \{x_0, x_1\}$, dann schreiben wir für $x_0 x_0 \dots x_0 \in \Sigma^*$ auch x_0^n . Zusätzlich setzen wir $y_s = x_0^{s-1} x_1$ für $s \geq 1$.

Definition A.3.1. Für $\Sigma = \{x_0, x_1\}$ definieren wir $\mathfrak{H}$ als den $\mathbb{Q}$ -Vektorraum

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{w \in \Sigma^*} \mathbb{Q},$$

zusammen mit den Untervektorräumen

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}^1 &= \mathbb{Q}1 \oplus \mathfrak{H}x_1, \\ \mathfrak{H}^0 &= \mathbb{Q}1 \oplus x_0\mathfrak{H}x_1.\end{aligned}$$

Identifiziert man eine Indexmenge $(s_1, \dots, s_l)$ mit dem Wort $x_0^{s_1-1}x_1x_0^{s_2-1}x_1\dots x_0^{s_l-1}x_1$, dann wird $\mathfrak{H}_0$ genau durch die Wörter erzeugt, die zu einer zulässigen Indexmenge gehören.

Wir fassen die Multiplen Zeta-Werte nun als Abbildung

$$\zeta : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

auf, indem wir für ein Wort w_s , welches zur Indexmenge s , gehört definieren:

$$\begin{aligned}\zeta(w_s) &:= \zeta(s), \\ \zeta(1) &:= 1\end{aligned}$$

und dieses dann linear auf alle Elemente in $\mathfrak{H}_0$ fortsetzen.

Motiviert durch die Shuffle und Stuffle Relationen, die durch die Darstellungen der MZVs als Summen bzw. Integrale entstehen, kann man zwei Multiplikationen auf $\mathfrak{H}$ definieren, die $\mathfrak{H}$ zu einer $\mathbb{Q}$ -Algebra machen.

Definition A.3.2. (Shuffle Algebra) Die Shuffle Algebra $\mathfrak{H}_{\sqcup}$ wird definiert als der $\mathbb{Q}$ -Vektorraum $\mathfrak{H}$ zusammen mit der linearen Fortsetzung von der auf Wörtern $u, v, w \in \Sigma^*$, $b_1, b_2 \in \Sigma$ rekursiv definierten Verknüpfung

$$\begin{aligned}1 \sqcup w &= w \sqcup 1 = w, \\ b_1u \sqcup b_2v &= b_1(u \sqcup b_2v) + b_2(b_1u \sqcup v)\end{aligned}$$

(Shuffle Produkt).

Diese Verknüpfung ist assoziativ und kommutativ und macht $\mathfrak{H}$ zu einer $\mathbb{Q}$ -Algebra. Sie entspricht dabei der Multiplikation von MZV in Integralldarstellung. Das Analogon für die Summendarstellung ist folgendermaßen gegeben:

Definition A.3.3. (Stuffle Algebra) Die Stuffle Algebra $\mathfrak{H}_*$ wird definiert als der $\mathbb{Q}$ -Vektorraum $\mathfrak{H}$ zusammen mit der linearen Fortsetzung von der auf Wörtern $u, v, w \in \Sigma^*$, $b_1, b_2 \in \Sigma$ rekursiv definierten Verknüpfung

$$\begin{aligned}1 * w &= w * 1 = w, \\ y_ju * y_kv &= y_j(u * y_kv) + y_k(y_ju * v) + y_{j+k}(u * v), \\ x_0^j * w &= w * x_0^k = wx_0^j\end{aligned}$$

(Stuffle Produkt).

Beispiel A.3.4. Die Gleichung

$$y_3 * y_2 = x_0^2 x_1 * x_0 x_1 = y_3(1 * y_2) + y_2(y_3 * 1) + y_5(1 * 1) = y_3 y_2 + y_2 y_3 + y_5 .$$

entspricht der Identität $\zeta(3) \cdot \zeta(2) = \zeta(3, 2) + \zeta(2, 3) + \zeta(5)$.

Satz A.3.5. Die Abbildung ζ induziert zwei Algebrenhomomorphismen

$$\zeta_{\sqcup} : (\mathfrak{H}^0, \sqcup) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\zeta_* : (\mathfrak{H}^0, *) \longrightarrow \mathbb{R},$$

d.h.

$$\zeta(w_1 \sqcup w_2) = \zeta(w_1) \zeta(w_2) = \zeta(w_1 * w_2)$$

für alle $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0$.

Beweis. Die erste Aussage werden wir gleich mit Hilfe von Polylogarithmen beweisen und als Korollar von Lemma A.3.9 erhalten. Die zweite Aussage findet sich in [Zud03] S. 17. $\square$

Diese Relation ist die oben erwähnte Doppel Shuffle Relation.

Die Frage nach Relationen zwischen MZV wirft daher die Frage nach dem Kern von ζ auf.

Der Satz liefert, dass $\{w_1 \sqcup w_2 - w_1 * w_2 \mid w_i \in \mathfrak{H}^0\} \subset \ker \zeta$.

Es gibt aber auch Relationen, die nicht durch die Doppel Shuffle Relation entstehen können, wie z.B. $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$, da $\zeta(1)$ nicht definiert ist. Betrachtet man aber den formalen Rahmen und lässt $\zeta(1)$ als formales Symbol zu, d.h. man betrachtet Wörter in $\mathfrak{H}^1$, dann ergibt sich diese Relation aus der Doppel Shuffle Relation, die durch $\zeta(2) \cdot \zeta(1)$ entsteht. Die zugehörige Shuffle Relation ist dabei:

$$\zeta(2) \cdot \zeta(1) = \zeta(2, 1) + \zeta(1, 2) + \zeta(3),$$

und die zugehörige Shuffle Relation ergibt sich zu:

$$\zeta(2) \cdot \zeta(1) = 2\zeta(2, 1) + \zeta(1, 2).$$

Durch Gleichsetzen fallen die nicht konvergenten Terme weg und man erhält $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$. Dies wird als erweiterte Doppel Shuffle Relation bezeichnet und die Vermutung ist, dass so alle Relationen entstehen (siehe z.B. [Hof97]):

Vermutung A.3.6. *Alle Relationen zwischen Multiplen Zeta-Werten werden durch die erweiterten Doppel Shuffle Relationen erzeugt, d.h.*

$$\ker(\zeta) = \left\{ w_1 \sqcup w_2 - w_1 * w_2 \mid w_1 \in \mathfrak{H}^1, w_2 \in \mathfrak{H}^0 \right\}.$$

Definition A.3.7. Für $|z| < 1$ und $s = (s_1, \dots, s_l)$ mit $s_i \geq 1$ definieren wir den *Multiplen Polylogarithmus* durch

$$\text{Li}_{s_1, \dots, s_l}(z) = \text{Li}_s(z) := \sum_{n_1 > \dots > n_l > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}}.$$

Wählt man für s eine zulässige Indexmenge (d.h. $s_1 > 1$), so konvergiert diese Reihe auch für $z = 1$ und man erhält:

$$\text{Li}_{s_1, \dots, s_l}(z) = \zeta(s). \quad (\text{A.1})$$

Setzt man nun

$$\text{Li}_{y_s}(z) := \text{Li}_s(z), \quad \text{Li}_1(z) := 1,$$

so erhält man durch lineare Fortsetzung eine Abbildung $\text{Li} : \mathfrak{H}^1 \rightarrow C((0, 1), \mathbb{R})$.

Lemma A.3.8. *Sei $w \in \mathfrak{H}^1$ ein beliebiges nicht leeres Wort und x_j der erste Buchstabe, d.h. $w = x_j u$ für ein $u \in \mathfrak{H}^1$. Dann gilt:*

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_w(z) = \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_j u}(z) = \omega_j(z) \text{Li}_u(z),$$

wobei

$$\omega_j(z) = \omega_{w_j}(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & , \text{ falls } x_j = x_0 \\ \frac{1}{1-z} & , \text{ falls } x_j = x_1 \end{cases}.$$

Beweis. Sei $w = y_s$ für ein $s = (s_1, \dots, s_l)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_w(z) &= \frac{d}{dz} \sum_{n_1 > \dots > n_l > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}} \\ &= \sum_{n_1 > \dots > n_l > 0} \frac{z^{n_1-1}}{n_1^{s_1-1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}}. \end{aligned}$$

Ist nun $s_1 > 1$, d.h. der erste Buchstabe von w entspricht einem x_0 , dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_0 u}(z) &= \frac{1}{z} \sum_{n_1 > \dots > n_l > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1-1} \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}} \\ &= \frac{1}{z} \text{Li}_{s_1-1, \dots, s_l}(z) = \frac{1}{z} \text{Li}_u(z). \end{aligned}$$

Für $s_1 = 1$, also $x_j = x_1$, erhält man unter Benutzung der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{Li}_{x_1 u}(z) &= \sum_{n_1 > \dots > n_l > 0} \frac{z^{n_1-1}}{n_2 \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}} \\ &= \sum_{n_2 > \dots > n_l > 0} \frac{1}{n_2 \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}} \sum_{n_1=n_2+1}^{\infty} z^{n_1-1} \\ &= \frac{1}{1-z} \sum_{n_2 > \dots > n_l > 0} \frac{z^{n_2}}{n_2 \cdot \dots \cdot n_l^{s_l}} = \frac{1}{1-z} \operatorname{Li}_{s_2, \dots, s_l}(z) = \frac{1}{1-z} \operatorname{Li}_u(z). \end{aligned}$$

□

Motiviert durch Lemma A.3.8 kann man die $\operatorname{Li}_w(z)$ für alle $w \in \mathfrak{H}$ definieren durch $\operatorname{Li}_1(z) = 1$ und

$$\operatorname{Li}_w(z) = \begin{cases} \frac{\log(z)^s}{s!}, & \text{falls } w = x_0^s \text{ für ein } s \geq 1, \\ \int_0^z \omega_j \operatorname{Li}_u(z) dz, & \text{falls } w = x_j u \text{ mindst. ein } x_1 \text{ enthält.} \end{cases}$$

Es zeigt sich, dass diese Definition im Fall $w \in \mathfrak{H}^1$ mit der vorherigen übereinstimmt und dass die Aussage des Lemmas erhalten bleibt. Man erhält nun:

Lemma A.3.9. *Die Abbildung $w \mapsto \operatorname{Li}_w(z)$ ist ein $\mathbb{Q}$ -Algebrenhomomorphismus von $\mathfrak{H} \sqcup$ nach $C((0, 1), \mathbb{R})$.*

Beweis. Es bleibt nur zu zeigen, dass für alle $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$ gilt:

$$\operatorname{Li}_{w_1 \sqcup w_2}(z) = \operatorname{Li}_{w_1}(z) \operatorname{Li}_{w_2}(z),$$

wobei man sich aufgrund der Linearität von Li dabei auf Wörter w_1, w_2 beschränken kann. Es sei $|w|$ die Anzahl der Buchstaben eines Wortes w . Wir zeigen die Aussage nun über Induktion nach $|w_1| + |w_2|$. Der Induktionsanfang ist dabei durch $w_1 = w_2 = 1$ gegeben und per Definition von $1 \sqcup 1 = 1$ und $\operatorname{Li}_1(z) = 1$ ergibt sich die Aussage zu $1 = 1 \cdot 1$ und ist somit wahr.

Seien nun $w_1 = x_j u$ und $w_2 = x_k v$. Dann erhalten wir mit der Produktregel, dem obigen Lemma und der Induktionsannahme:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz}(\text{Li}_{w_1}(z) \text{Li}_{w_2}(z)) &= \frac{d}{dz}(\text{Li}_{x_j u}(z) \text{Li}_{x_k v}(z)) \\
 &= \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_j u}(z) \cdot \text{Li}_{x_k v}(z) + \text{Li}_{x_j u}(z) \cdot \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_k v}(z) \\
 &= w_j(z) \text{Li}_u(z) \text{Li}_{x_k v}(z) + w_k(z) \text{Li}_{x_j u}(z) \text{Li}_v(z) \\
 &= w_j(z) \text{Li}_{u \sqcup x_k v}(z) + w_k(z) \text{Li}_{x_j u \sqcup v}(z) \\
 &= \frac{d}{dz} \left(\text{Li}_{x_j(u \sqcup x_k v)}(z) + \text{Li}_{x_k(x_j u \sqcup v)}(z) \right) \\
 &= \frac{d}{dz} \text{Li}_{x_j u \sqcup x_k v}(z) \\
 &= \frac{d}{dz} \text{Li}_{w_1 \sqcup w_2}(z).
 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\text{Li}_{w_1 \sqcup w_2}(z) = \text{Li}_{w_1}(z) \text{Li}_{w_2}(z) + C$$

mit einem $C \in \mathbb{R}$. Enthält mindestens eines der beiden Wörter w_1 oder w_2 den Buchstaben x_1 , so ergibt sich aus der Definition von Li , dass beim Übergang $z \rightarrow 0$ beide Terme $\text{Li}_{w_1 \sqcup w_2}(z)$ als auch $\text{Li}_{w_1}(z) \text{Li}_{w_2}(z)$ verschwinden und somit $C = 0$. Enthalten beide Wörter nur den Buchstaben x_0 , so kann man den Übergang $z \rightarrow 1$ betrachten und erhält ebenfalls für beide Ausdrücke 0, da $\log(1) = 0$ und somit $C = 0$. Damit ist die Aussage bewiesen. $\square$

Zusammen mit A.1 und der Tatsache, dass $\mathfrak{H}^0$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{H}$ ist, erhält man nun den ersten Teil von Satz A.3.5.

A.4. Doppel Zeta-Werte

Der Fall für Level 2 ist Gegenstand von vielen einzelnen Arbeiten wie z.B. [GKZ06] oder [CB94]. Im Folgenden betrachten wir also für zwei positive ganze Zahlen s_1, s_2 mit $s_1 > 1$ die Werte

$$\zeta(s_1, s_2) = \sum_{n_1 > n_2 > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot n_2^{s_2}}.$$

Direkt aus dieser Definition erhält man auch schon die erste Relation (Stuffle Relation)

$$\begin{aligned}
 \zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2) &= \sum_{n_1 > 0} \frac{1}{n_1^{s_1}} \sum_{n_2 > 0} \frac{1}{n_2^{s_2}} \\
 &= \sum_{n_1 > n_2 > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot n_2^{s_2}} + \sum_{n_2 > n_1 > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot n_2^{s_2}} + \sum_{n_1 = n_2 > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdot n_2^{s_2}} \\
 &= \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2).
 \end{aligned}$$

Wie wir oben gesehen haben, besitzen die Multiple Zeta-Werte aber auch eine Darstellung durch Integrale. Wir betrachten nun zunächst was passiert, wenn man zwei iterierte Integrale miteinander multipliziert. Seien $\omega_i = f(t_i)dt_i$ im Folgenden beliebige im Intervall $[0, 1]$ integrierbare 1-Formen. Betrachtet man das Produkt der beiden Integrale über $0 < t_1 < t_2 < 1$ und $0 < t_3 < t_4 < 1$, so kann man dieses zu einem Integral über $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < 1$ zusammenfassen, indem man jede einzelne Umordnung der t_i betrachtet, welche die ursprüngliche Ordnung in den einzelnen Integralen beibehält, über diese einzeln integriert und dann aufsummiert:

$$\begin{aligned} \int_{0 < t_1 < t_2 < 1} \omega_1 \omega_2 \cdot \int_{0 < t_3 < t_4 < 1} \omega_3 \omega_4 &= \int_{0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < 1} + \int_{0 < t_1 < t_3 < t_2 < t_4 < 1} \\ &+ \int_{0 < t_3 < t_1 < t_2 < t_4 < 1} + \int_{0 < t_1 < t_3 < t_4 < t_2 < 1} \\ &+ \int_{0 < t_3 < t_1 < t_4 < t_2 < 1} + \int_{0 < t_3 < t_4 < t_1 < t_2 < 1} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 . \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Überlegung bekommt man eine weitere Darstellung für $\zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2)$, indem man die beiden Integraldarstellungen mit dem obigen Verfahren miteinander multipliziert und das entstehende Integral wieder als Multiple Zeta-Wert interpretiert. Dies hat kombinatorisch gesehen etwas mit dem Mischen von zwei Kartenstapeln der Größe s_1 und s_2 zu tun, da hier auch nach den Möglichkeiten der Mischungen (engl. shuffle) gefragt ist, bei der die Ordnung in den einzelnen Stapeln nicht verletzt wird. Dies entspricht dem Shuffle Produkt im vorigen Abschnitt.

Dies liefert eine zweite Darstellung für das Produkt von Zeta-Werten der Länge 1 (Shuffle Relation):

$$\zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2) = \sum_{r=2}^{k-1} \left(\binom{r-1}{s_1-1} + \binom{r-1}{s_2-1} \right) \zeta(r, s_1 + s_2 - r) . \quad (\text{A.2})$$

Das Gleichsetzen der $\zeta(s_1) \cdot \zeta(s_2)$ in den beiden Relationen ergibt die Doppel Shuffle Relation.

Zudem sind unter anderem folgende Relationen bekannt

Proposition A.4.1. *Für die Doppel Zeta-Werte gelten folgende Relationen*

(i) *Für s_1 ungerade und s_2 gerade ist*

$$\zeta(s_1, s_2) = -\frac{1}{2} \zeta(s_1 + s_2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ ungerade}}}^{s_1+s_2} \left(\binom{j-1}{s_1-1} + \binom{j-1}{s_2-1} \right) \zeta(j) \zeta(s_1 + s_2 - j) .$$

(ii) *Für beliebiges $1 < s \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\zeta(s, 1) = \frac{1}{2} s \zeta(s+1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s-2} \zeta(j+1) \zeta(s-j) .$$

Beweis. Auch diese drei Identitäten stammen von Euler. Siehe [CB94]. $\square$

Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, entstehen vermutungsweise alle Relationen zwischen Multiplen Zeta-Werten durch die Doppel Shuffle Relationen. Man betrachtet daher folgenden Raum:

Definition A.4.2. (Formale Doppel Zeta-Raum) Der Formale Doppel Zeta-Raum $\mathcal{D}_k$ vom Gewicht k ist der durch formale Linearkombinationen von Symbolen $Z_{r,s}, P_{r,s}, Z_k$ mit $r, s \geq 1, r + s = k$ aufgespannte $\mathbb{Q}$ -Vektorraum modulo der Relationen:

$$\begin{aligned} P_{r,s} &= Z_{r,s} + Z_{s,r} + Z_k, \\ P_{r,s} &= \sum_{j=2}^{k-1} \left(\binom{j-1}{r-1} + \binom{j-1}{s-1} \right) Z_{j,k-j}. \end{aligned}$$

Dies ist also der Raum formaler Symbole, welche die Doppel Shuffle Relationen erfüllen. Die $Z_{r,s}$ entsprechen dabei den $\zeta(r, s)$, die Z_k den $\zeta(k)$ und die $P_{r,s}$ dem Produkt $\zeta(r) \cdot \zeta(s)$. Der Unterschied zu den „richtigen“ Zeta-Werten ist, dass auch die Fälle $r = 1$ und $k = 1$ zugelassen sind.

In diesem Raum gilt:

Satz A.4.3. Für gerade $k > 2$ gilt:

$$\sum_{\substack{r=2 \\ r \text{ gerade}}}^{k-1} Z_{r,k-r} = \frac{3}{4} Z_k, \quad \sum_{\substack{r=2 \\ r \text{ ungerade}}}^{k-1} Z_{r,k-r} = \frac{1}{4} Z_k.$$

Beweis. Siehe z.B. [GKZ06] Theorem 1. $\square$

Dieses Ergebnis gilt auch in der „echten“ Zeta-Welt, da die Doppel Shuffle Relation, die durch das hinzufügen der nicht konvergenten Terme entsteht, in diesem Fall durch die oben erwähnte Summenformel A.2.4 gegeben ist. Um dies deutlich zu machen, betrachten wir allgemein die Relationen, die durch die Doppel Shuffle Relationen entstehen:

Proposition A.4.4. Sei k gerade, $l = \lfloor \frac{3}{4}k \rfloor$ und die Matrix $DS^k \in M_{k-1,l}(\mathbb{Q})$ gegeben durch

$$DS_{i,j}^k = \begin{cases} \gamma(j, k-j; i) & , \text{ falls } 1 \leq j \leq \frac{k}{2} \\ (\delta_{i,2j-k} + \delta_{i,2k-2j}) \frac{1}{\kappa(i,k-i)-1} & , \text{ sonst} \end{cases},$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma(r, s; j) &= \binom{j-1}{r-1} + \binom{j-1}{s-1} - \delta_{r,j} - \delta_{s,j}, \\ \kappa(r, s) &= -\frac{B_r \cdot B_s \cdot (r+s)!}{2B_{r+s} \cdot r! \cdot s!}. \end{aligned}$$

Dann gilt für beliebige $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)^T \in \mathbb{Q}^l$ und $DS^k \cdot \Lambda =: (c_1, \dots, c_{k-1})^T \in \mathbb{Q}^{k-1}$:

$$\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i \right) \zeta(k) = \sum_{i=2}^{k-1} c_i \zeta(i, k-i).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, geben wir ein Beispiel. Für den Fall $k = 12$ gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1382}{893} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2764}{239} & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & \frac{691}{12} \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 42 & 42 & 0 & \frac{2764}{239} & 0 \\ 1 & 8 & 28 & 64 & 98 & 112 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 45 & 120 & 210 & 252 & \frac{1382}{893} & 0 & 0 \\ 1 & 20 & 90 & 240 & 420 & 504 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{DS^{12}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 42 \\ -90 \\ 55 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{360}{691} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 168 \\ 0 \\ 150 \\ 0 \\ 28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\frac{5197}{691} \zeta(12) = \left(42 - 90 + 55 + \frac{360}{691} \right) \zeta(12) = 168 \zeta(5, 7) + 150 \zeta(7, 5) + 28 \zeta(9, 3).$$

Beweis. Durch Gleichsetzen erhält man in A.4.2 für jedes Paar (r, s) mit $r + s = k$ eine Relation der Form

$$\zeta(k) = \sum_{j=2}^{k-1} \gamma(r, s; j) \zeta(j, k-j)$$

mit

$$\gamma(r, s; j) = \binom{j-1}{r-1} + \binom{j-1}{s-1} - \delta_{r,j} - \delta_{s,j}.$$

Dies gilt auch für den Fall $r = 1$ und $s = k - 1$, da in diesem Fall diese Relation sich zu

$$\zeta(k) = \sum_{j=2}^{k-1} \zeta(j, k-j)$$

ergibt und diese Relation durch A.2.4 gegeben ist.

Interessiert man sich für alle Relationen, die aus den Double Shuffle Relationen A.4.2 für Doppel Zeta-Werte erzeugt werden können, so kann man einen beliebigen Vektor der Form $\Lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})^T \in \mathbb{Q}^{k-1}$ wählen und die obigen Relationen mit den Faktoren λ_i gewichten.

Wir definieren zusätzlich $|\Lambda| = \sum \lambda_i$ und erhalten durch Gleichsetzen der beiden Darstellungen für das Produkt der Werte $\zeta(r)$ und $\zeta(s)$ mit $r+s = k$ die Darstellung

$$\begin{aligned} |\Lambda|\zeta(k) &= \sum_{r=1}^{k-1} \lambda_r \zeta(k) = \sum_{r=1}^{k-1} \lambda_r \sum_{i=1}^{k-1} \gamma(r, k-r; i) \zeta(i, k-i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{r=1}^{k-1} \lambda_r \gamma(r, k-r; i) \right) \zeta(i, k-i) \\ &=: \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i(\Lambda) \zeta(i, k-i), \end{aligned}$$

wobei hier der Fall $r = 1$ nicht durch das Produkt $\zeta(1) \cdot \zeta(k-1)$ gegeben ist, sondern durch die Summenformel $\zeta(k) = \sum_{i=2}^{k-1} \zeta(i, k-i)$.

Man hat also $(\alpha_1(\Lambda), \dots, \alpha_{k-1}(\Lambda))^T =: \alpha(\Lambda) = M\Lambda$, wobei $M \in M_{k-1}(\mathbb{Q})$ die Matrix ist mit

$$M_{i,j} = \gamma(j, k-j; i).$$

Will man nun prüfen, ob die Relation $\zeta(k) = \sum_{j=1}^{k-1} c_j \zeta(j, k-j)$ aus den Doppel Shuffle-Relationen folgt, so muss man das Gleichungssystem

$$M\Lambda = (c_1, \dots, c_{k-1})$$

lösen. Die λ_r geben dann den Beitrag der Doppel Shuffle Relation für $\zeta(r) \cdot \zeta(k-r)$ in der Darstellung der gesuchten Relation an.

Beispiel: Mit $k = 6$ berechnen wir die Matrix

$$M = (\gamma(j, 6-j; i))_{\substack{1 \leq j \leq 5 \\ 1 \leq i \leq 5}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 12 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} M \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0 \right)^T &= (0, 1, 0, 1, 0)^T, \\ M \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, 0 \right)^T &= (0, 0, 1, 0, 1)^T \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \zeta(6) &= \frac{3}{4} \zeta(6) = \zeta(2, 4) + \zeta(4, 2), \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \zeta(6) &= \frac{1}{4} \zeta(6) = \zeta(3, 3) + \zeta(5, 1). \end{aligned}$$

Einführung in Multiple Zeta-Werte

Für gerade k gibt es nun zusätzlich noch die Euler Identität $\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k B_k}{2k!}$. Damit ergibt sich zusammen mit der Shuffle Relation folgende Identität für gerade r, s und $r + s = k$:

$$\zeta(r, s) + \zeta(s, r) = (\zeta(r) \cdot \zeta(s) - \zeta(k)) = \kappa_{r,s} \zeta(k) - \zeta(k),$$

wobei

$$\kappa(r, s) = -\frac{B_r \cdot B_s \cdot (r+s)!}{2B_{r+s} \cdot r! \cdot s!}.$$

Somit ergibt sich

$$\zeta(k) = \frac{1}{\kappa_{r,s} - 1} (\zeta(r, s) + \zeta(s, r)).$$

Wir definieren dazu nun für ein gerades k die Matrix E durch

$$E_{i,j} = (\delta_{j,2i} + \delta_{j,k-2i}) \frac{1}{\kappa_{r,s} - 1}.$$

Somit kann man analog zu oben nun die im Satz erwähnte Matrix $DS^k := (M \mid E)$ betrachten und erhält so alle Relationen, die durch die Doppel Shuffle Relation und die Euler Identität entstehen. Aufgrund der Symmetrie der Produkte kann man sich dabei jeweils auf die Hälfte der Relationen beschränken, da die Matrizen M und E beide achsensymmetrisch sind. $\square$

B. Periodenpolynome und Hecke-Operatoren

Dieses Kapitel soll einen kleinen Überblick über Periodenpolynome von Modulformen und einem analogen Begriff von Hecke-Operatoren auf ihnen geben. Mit Hilfe dieser Operatoren berechnen wir ähnliche Formeln für $\tau(n)$, wie sie in Abschnitt 4.11 hergeleitet wurden.

B.1. Periodenpolynome

Mit V_k bezeichnen wir im Folgenden alle homogenen Polynome in $\mathbb{C}[X, Y]$ vom Grad $k - 2$ und mit $V_k^- \subset V_k$ alle Polynome, deren Monome geradzahlige Exponenten haben. Analog ist $V_k^+ \subset V_k$ die Menge aller Polynome mit ungeraden Exponenten.

Bemerkung B.1.1. Diese Bezeichnung ist nicht einheitlich. In [Zag93a] wird die Bezeichnung so gewählt, dass V_k^- die ungeraden Polynome bezeichnet, wobei wir hingegen die Notation aus [BS11] und [GKZ06] benutzen.

Auf der Menge V_k lassen wir erneut ein $\gamma \in M_2(\mathbb{Z})$ wirken durch

$$P_{|\gamma}[X, Y] = P(aX + bY, cX + dY).$$

Definition B.1.2. (Periodenpolynom) Für eine Spitzenform $f \in S_k$ definieren wir die Abbildung r durch

$$\begin{aligned} r : S_k &\rightarrow V_k \\ f &\mapsto \int_0^\infty f(z)(X - Yz)^{k-2} dz. \end{aligned}$$

$r(f)$ wird das *Periodenpolynom* von f genannt. Mit r^- und r^+ bezeichnen wir jeweils die Abbildung auf V_k^- bzw. V_k^+ .

Diese Definition macht aus Konvergenzgründen des Integrals nur für Spitzenformen Sinn. Für nicht-Spitzenformen kann man eine ähnliche Definition angeben, in der im Integranden von f der 0-te Fourierkoeffizient abgezogen wird, um die Konvergenz zu gewährleisten. Hierzu definieren wir für eine beliebige Modulform $f \in M_k$ das Periodenpolynom durch

$$\begin{aligned} r(f) = & \int_{\tau_0}^{\infty} (X - Y\tau)^{k-2} (f(\tau) - a_0(f)) d\tau \\ & + \int_0^{\tau_0} (X - Y\tau)^{k-2} (f(\tau) - \tau^{-k} a_0(f)) d\tau \\ & + \frac{a_0(f)}{k-1} \left(\frac{1}{Y} - \frac{\tau_0^{1-k}}{X} \right) (X - Y\tau_0)^{k-1} \quad \in \bigoplus_{\substack{r+s=k \\ r,s \geq 0}} \mathbb{C} \cdot X^{r-1} Y^{s-1}, \end{aligned}$$

wobei $\tau_0 \in \mathbb{H}$ beliebig ist (siehe [Zag93a] S. 453).

Beispiel:

$$\begin{aligned} r^-(\Delta) &= \omega \cdot \left(\frac{36}{691} X^{10} Y^2 - X^8 Y^4 + 3X^6 Y^6 - 3X^4 Y^8 + X^2 Y^{10} - \frac{36}{691} \right), \\ r(G_k) &= \frac{2\pi i \zeta(k-1)}{2k-2} (X^{k-2} - Y^{k-2}) - \frac{(2\pi i)^k}{2k-2} \sum_{r=0}^k \frac{B_r}{r!} \frac{B_{k-r}}{(k-r)!} X^{r-1} Y^{k-r-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

wobei $\omega \approx 0.114379...i \in \mathbb{C}$.

Mit

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definieren wir den Raum W_k^- durch

$$W_k^- := \left\{ P \in V_k^- \quad | \quad P_{|1+S} = P_{|1+U+U^2} = 0 \right\}.$$

Satz B.1.3. *Die Abbildung r^- liefert einen Vektorraumisomorphismus und somit ist $M_k \cong W_k^-$.*

Beweis. Dies ist Theorem 1 in [Zag93a] Abschnitt 2 (S. 453). □

Hieraus folgt insbesondere, dass $S_k \cong W_k / (X^{k-2} - Y^{k-2})$.

B.2. Hecke-Operatoren auf Periodenpolynomen

Im Abschnitt über die Modulformen wurden Hecke-Operatoren eingeführt. Hecke-Operatoren sind dabei Endomorphismen auf M_k und Periodenpolynome sind, wie im vorherigen Abschnitt gesehen, Polynome vom Grad $k - 2$ mit gewissen Eigenschaften. Es gibt nun, motiviert durch die Eichler-Shimura Theorie (Satz B.1.3), die einen Isomorphismus von M_k zum Raum gewisser Periodenpolynome liefert, einen analogen Begriff der Hecke-Operatoren auf dem Raum der Periodenpolynome. Wir wollen diese hier kurz wiederholen und sehen, dass durch die Wirkung der Hecke-Operatoren $\tilde{T}_n$ auf den Monomen $X^r Y^s$ Folgen entstehen, die den verallgemeinerten Teilersummen $\sigma_{r,s}(n)$ ähneln.

Mit M_n bezeichnen wir in diesem Abschnitt die Matrizen mit Determinante n .

Proposition B.2.1 (Hecke-Operatoren auf Periodenpolynomen). *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\tilde{T}_n \in \mathbb{Q}[M_n]$ mit*

$$(1 - S)\tilde{T}_n = T_n^\infty(1 - S) + (1 - T)Y_n$$

für ein $Y_n \in \mathbb{Q}[M_n]$ und

$$T_n^\infty = \sum_{ad=n} \sum_{0 \leq b < d} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für jedes k und n : $W_k|T_n \subset W_k$ und die Wirkung von T_n auf W_k korrespondiert zur Wirkung der Hecke-Operatoren auf $S_k \oplus M_k$ bezüglich der Periodenabbildung r , d.h. es gilt

$$r(T_n f) = r(f)|T_n.$$

Beweis. Siehe [Zag93b]. □

Ein Beispiel für ein $\tilde{T}_n$, das die Bedingung von B.2.1 erfüllt, sind die sogenannten Manin Matrizen, welche in diesem Abschnitt genauer betrachtet werden sollen.

Definition B.2.2. Wir definieren folgende Mengen von Matrizen:

$$\begin{aligned}
 M^{\triangleright} &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z}) \mid a > |c|, d > |b| \right\}, \\
 M^+ &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z}) \mid b \cdot c > 0 \right\}, \\
 B_0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z}) \mid -\frac{a}{2} < c \leq \frac{a}{2} \right\}, \\
 C_0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z}) \mid -\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2} \right\}, \\
 \mathfrak{M}_n^0 &:= M^{\triangleright} \cap B_0, \\
 \mathfrak{M}_n^1 &:= M^{\triangleright} \cap C_0, \\
 \mathfrak{M}_n^2 &:= M^{\triangleright} \cap M^+, \\
 \mathfrak{M}_n &:= \mathfrak{M}_n^0 \cup \mathfrak{M}_n^1 \cup \mathfrak{M}_n^2.
 \end{aligned}$$

Die letzte Menge $\mathfrak{M}_n$ nennen wir *Manin Matrizen*.

Proposition B.2.3. $\mathfrak{M}_n$ erfüllt die Bedingungen von B.2.1.

Beweis. Siehe [Zag90] oder [Bac09]. □

Beispiel: Die geraden Periodenpolynome der Eisensteinreihe G_k sind durch $X^{k-2} - Y^{k-2}$ gegeben. Man erhält für die Fourierkoeffizienten:

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{\mathfrak{M}_n} d^{k-2} - b^{k-2}.$$

(Siehe dafür auch [Bac09] Satz 5.1 für die genaue Begründung, warum die X durch d und die Y durch b ersetzt werden können, wenn man die Wirkung der $\mathfrak{M}_n$ auf einem Periodenpolynom $P(X, Y)$ betrachtet.) Wir wollen die rechte Seite (für beliebige $k \in \mathbb{N}$) genauer untersuchen und berechnen dazu zunächst die Anteile der Summe für die Mengen $\mathfrak{M}_n^i$ für $i = 0, 1, 2$ einzeln. Für $\mathfrak{M}_n^0$ und $\mathfrak{M}_n^1$ lassen sich diese in Form von Teilersummenfunktionen darstellen:

$$\sum_{\mathfrak{M}_n^0} d^k - b^k = \sum_{\mathfrak{M}_n^0} d^k = \sum_{\substack{ad=n \\ a, d > 0}} \sum_{-\frac{a}{2} < c \leq \frac{a}{2}} d^k = \sum_{\substack{ad=n \\ a, d > 0}} ad^k = ad \sum_{d|n} d^{k-1} = n\sigma_{k-1}(n).$$

$$\sum_{\mathfrak{M}_n^1} d^k = \sum_{\substack{ad=n \\ a, d > 0}} \sum_{-\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2}} d^k = \sum_{\substack{ad=n \\ a, d > 0}} d \cdot d^k = \sigma_{k+1}(n).$$

$$\beta_k(n) := \sum_{\mathfrak{M}_n^1} b^k = \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \sum_{-\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2}} b^k = 2 \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \sum_{b=1}^{\frac{d-1}{2}} b^k + \sum_{\substack{ad=n \\ 2|d>0}} \left(\frac{d}{2}\right)^k.$$

Bekannterweise lassen sich die Potenzsummen $\sum_{b=1}^{\frac{d-1}{2}} b^k$ als Polynome in $\frac{d-1}{2}$ ausdrücken (Siehe Proposition 1.2.4). Im Fall $k = 1$ ist z.B. $\frac{1}{2} \frac{d-1}{2} \left(\frac{d-1}{2} + 1\right) = \frac{d^2-1}{8}$ bzw. für $k = 2$ ergibt dies $\frac{d^3-3}{24}$. Für $\beta_1(n), \beta_2(n)$ erhält man somit:

$$\begin{aligned} \beta_1(n) &= \frac{1}{4} (\sigma_2(n) - \sigma_0(n)) + \sum_{\substack{ad=n \\ 2|d>0}} \frac{d}{2}, \\ \beta_2(n) &= \frac{1}{12} (\sigma_3(n) - \sigma_1(n)) + \sum_{\substack{ad=n \\ 2|d>0}} \frac{d^2}{4}, \\ \beta_3(n) &= \frac{1}{32} (\sigma_4(n) - 2\sigma_2(n) + \sigma_0(n)) + \sum_{\substack{ad=n \\ 2|d>0}} \frac{d^3}{8} \end{aligned}$$

und insbesondere für $n = p$ prim hat man $\beta_1(p) = \frac{p^2-1}{4}$, $\beta_2(p) = \frac{p^3-p}{12}$ und $\beta_3(p) = \frac{p^4-2p^2+1}{32}$.

Da man mit obigen Summanden den Teil mit $b = c = 0$ doppelt zählt, muss dieser später noch abgezogen werden. Für diesen Teil hat man

$$\sum_{\mathfrak{M}_n^0 \cap \mathfrak{M}_n^0} d^k - b^k = \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^k = \sigma_k(n).$$

Der Teil für $\mathfrak{M}_n^2$ lässt sich nicht auf obige Weise vereinfachen. Wir wählen aber, wie zuvor auch, eine andere Darstellung, bei der nur über positive b, c summiert wird und definieren:

$$\lambda_k(n) := \sum_{\mathfrak{M}_n^2} d^k - b^k = 2 \sum_{\substack{ad+bc=n \\ a>c>0 \\ d>b>0}} d^k - b^k.$$

Insgesamt hat man dann

$$\sum_{\mathfrak{M}_n} d^k - b^k = n\sigma_{k-1}(n) + \sigma_{k+1}(n) - \sigma_k(n) - \beta_k(n) + \lambda_k(n).$$

Der Grund, weshalb die Darstellungen so gewählt wurden, dass $b, c > 0$, liegt in der folgenden Vermutung:

Vermutung B.2.4. Für alle $k > 1$ (also auch für die ungeraden) gilt:

$$\sigma_{k+1}(n) = \sum_{\mathfrak{M}_n} d^k - |b|^k.$$

Man hat somit

$$\sigma_{k+1}(n) = n\sigma_{k-1}(n) + \sigma_{k+1}(n) - \sigma_k(n) - \beta_k(n) + \lambda_k(n),$$

welches umgeformt ergibt:

$$\lambda_k(n) = \beta_k(n) + \sigma_k(n) - n\sigma_{k-1}(n).$$

Im Fall $k = 1, 2$ und ungerade $n = p$ prim gilt also insbesondere:

$$\begin{aligned}\lambda_k(p) &= \frac{p^2 - 1}{4} + p + 1 - 2p = \frac{p^2 - 4p + 3}{4} = \frac{(p-1)(p-3)}{4}, \\ \lambda_k(p) &= \frac{p^3 - p}{12} + p + 1 - 2p = \frac{p^3 - 13p + 12}{12} = \frac{(p-1)(p-3)(p+4)}{12}, \\ \lambda_k(p) &= \frac{p^4 - 2p^2 + 1}{32} + p + 1 - 2p = \frac{p^3 - 13p + 12}{12} = \frac{(p-1)(p-3)(p^2 + 4p + 11)}{32},\end{aligned}$$

bzw.

$$\sum_{\substack{ad+bc=p \\ a>c>0 \\ d>b>0}} d - b = \frac{(p-1)(p-3)}{8}.$$

Diese Aussage lässt sich auch elementar beweisen.

Wir wollen nun allgemein homogene Polynome in $\mathbb{C}[X, Y]$ und die Wirkung von $\mathfrak{M}_n$ auf ihnen betrachten, um damit dann eine Formel für $\tau(n)$ herzuleiten. Auf dem Monom $X^r Y^s$ erhalten wir:

$$\sum_{\mathfrak{M}_n} d^r b^s = \sum_{\mathfrak{M}_n^0} d^r b^s + \sum_{\mathfrak{M}_n^1} d^r b^s + \sum_{\mathfrak{M}_n^2} d^r b^s - \sum_{\mathfrak{M}_n^0 \cap \mathfrak{M}_n^1} d^r b^s.$$

Die Summe über $\mathfrak{M}_n^1$ verschwindet, sofern $s > 0$. Wir betrachten die Terme wieder einzeln und setzen

$$\begin{aligned}\alpha_{r,s}(n) &:= \sum_{\mathfrak{M}_n^0} d^r b^s = \begin{cases} n\sigma_{r-1}(n), & \text{falls } s = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \\ \beta_{r,s}(n) &:= \sum_{\mathfrak{M}_n^1} d^r b^s = \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^r \sum_{-\frac{d}{2} < b < \frac{d}{2}} b^s + \gamma_{r,s}(n), \\ \gamma_{r,s}(n) &:= \begin{cases} 2^r \sigma_{r+s}^* \left(\frac{n}{2} \right), & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \\ \lambda_{r,s}(n) &:= \sum_{\mathfrak{M}_n^2} d^r b^s = \sum_{\substack{ad+bc=n \\ a>c>0 \\ d>b>0}} d^r b^s, \\ \epsilon_{r,s}(n) &:= \sum_{\mathfrak{M}_n^0 \cap \mathfrak{M}_n^1} d^r b^s = \begin{cases} \sigma_r(n), & \text{falls } s = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.\end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen gilt dann:

$$\sum_{\mathfrak{M}_n} d^r b^s = \alpha_{r,s}(n) + \beta_{r,s}(n) + \lambda_{r,s}(n) - \epsilon_{r,s}(n).$$

Den Term $\beta_{r,s}$ können wir mit Hilfe von 1.2.4 noch weiter umformen:

$$\begin{aligned} \beta_{r,s}(n) &= \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^r \sum_{-\frac{d}{2} < b < \frac{d}{2}} b^s + \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0, 2|d}} d^r \left(\frac{d}{2}\right)^s \\ &= 2 \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^r \sum_{b=1}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} b^s + \gamma_{r,s}(n) = 2 \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^r S_s \left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \right) + \gamma_{r,s}(n), \end{aligned}$$

wobei

$$S_k(n) := \sum_{b=1}^n b^k \stackrel{1.2.4}{=} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j(n+1)^{k+1-j}.$$

Die rechte Seite macht dabei auch für $n \in \mathbb{Q}$ Sinn, so dass wir $S_k(n)$ für nicht natürliche n durch die rechte Seite definieren. Man erhält:

$$S_s \left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor \right) = S_s \left(\frac{d-1}{2} \right) + \begin{cases} S_s \left(\frac{d}{2} - 1 \right) - S_s \left(\frac{d-1}{2} \right), & \text{falls } d \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir teilen hiermit den Term $\beta_{r,s}$ weiter auf und setzen:

$$\begin{aligned} \beta_{r,s}^1 &:= 2 \sum_{d|n} d^r S_s \left(\frac{d-1}{2} \right), \\ \beta_{r,s}^2 &:= 2 \sum_{2|d|n} d^r \left(S_s \left(\frac{d}{2} - 1 \right) - S_s \left(\frac{d-1}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Damit ist $\beta_{r,s} = \beta_{r,s}^1 + \beta_{r,s}^2 + \gamma_{r,s}$. Für ungerade n und $s > 0$ gilt damit

$$\sum_{\mathfrak{M}_n} d^r b^s = \beta_{r,s}^1(n) + \lambda_{r,s}(n).$$

Da wir uns für die Fourierkoeffizienten von Δ interessieren und das zugehörige Periodenpolynom durch

$$r_{\Delta}^-(X, Y) = -\frac{36}{691} X^{10} + X^8 Y^2 - 3X^6 Y^4 + 3X^4 Y^6 - X^2 Y^8 + \frac{36}{691} Y^{10}$$

gegeben ist, erhalten wir so eine Formel für die τ -Funktion:

$$\begin{aligned}
 \tau(n) &= \sum_{\mathfrak{M}_n} \left(d^{10} - b^{10} - \frac{691}{36} (d^8 b^2 - 3d^6 b^4 + 3d^4 b^6 - d^2 b^8) \right) \\
 &= \sigma_{11}(n) - \frac{691}{36} \sum_{\mathfrak{M}_n} (d^8 b^2 - 3d^6 b^4 + 3d^4 b^6 - d^2 b^8) \\
 &= \sigma_{11}(n) - \frac{691}{36} (\beta_{8,2}(n) - 3\beta_{6,4}(n) + 3\beta_{4,6}(n) - \beta_{2,8}(n)) \\
 &\quad - \frac{691}{36} (\lambda_{8,2}(n) - 3\lambda_{6,4}(n) + 3\lambda_{4,6}(n) - \lambda_{2,8}(n)) .
 \end{aligned}$$

Um dies weiter umzuformen, berechnen wir die zugehörigen Terme einzeln. Dabei betrachten wir zunächst $d^r S_s \left(\frac{d-1}{2} \right)$ für $(r, s) \in \{(8, 2), (6, 4), (4, 6), (2, 8)\}$:

$$\begin{aligned}
 d^8 S_2 \left(\frac{d-1}{2} \right) &= \frac{d^{11}}{24} - \frac{d^9}{24} , \\
 d^6 S_4 \left(\frac{d-1}{2} \right) &= \frac{d^{11}}{160} - \frac{d^9}{48} + \frac{7d^7}{480} , \\
 d^4 S_8 \left(\frac{d-1}{2} \right) &= \frac{d^{11}}{896} - \frac{d^9}{128} + \frac{7d^7}{384} - \frac{31d^5}{2688} , \\
 d^2 S_6 \left(\frac{d-1}{2} \right) &= \frac{d^{11}}{4608} - \frac{d^9}{384} + \frac{49d^7}{3840} - \frac{31d^5}{1152} + \frac{127d^3}{7680} .
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 & - \frac{691}{36} (\beta_{8,2}^1(n) - 3\beta_{6,4}^1(n) + 3\beta_{4,6}^1(n) - \beta_{2,8}^1(n)) = \\
 & \frac{87757}{138240} \sigma_3(n) + \frac{21421}{72576} \sigma_5(n) + \frac{4837}{69120} \sigma_7(n) - \frac{2902891}{2903040} \sigma_{11}(n) .
 \end{aligned}$$

Für ungerade n hat man somit:

$$\begin{aligned}
 \tau(n) &= \frac{149}{2903040} \sigma_{11}(n) + \frac{4837}{69120} \sigma_7(n) + \frac{21421}{72576} \sigma_5(n) + \frac{87757}{138240} \sigma_3(n) \\
 &\quad - \frac{691}{18} \sum_{\substack{ad+bc=n \\ a>c>0 \\ d>b>0}} (d^8 b^2 - 3d^6 b^4 + 3d^4 b^6 - d^2 b^8)
 \end{aligned}$$

und da $\frac{87757}{138240} + \frac{21421}{72576} + \frac{4837}{69120} + \frac{149}{2903040} = 1$ insbesondere für $n = p > 2$ prim:

$$\begin{aligned}
 \tau(p) &= \frac{149}{2903040} p^{11} + \frac{4837}{69120} p^7 + \frac{21421}{72576} p^5 + \frac{87757}{138240} p^3 + 1 \\
 &\quad - \frac{691}{18} \sum_{\substack{ad+bc=p \\ a>c>0 \\ d>b>0}} (d^8 b^2 - 3d^6 b^4 + 3d^4 b^6 - d^2 b^8) .
 \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zu den Teilersummen $\sigma_{r,s}(n)$ ist nun durch die $\lambda_{r,s}(n)$ gegeben. Bei $\sigma_{r,s}(n)$ wird über $ad + bc = n$ mit $a > c > 0$ summiert und bei $\lambda_{r,s}(n)$ über $ad + bc = n$ mit $a > c > 0$ und $d > b > 0$. Es ist anzunehmen, dass die Formeln die in diesem Abschnitt hergeleitet wurden, durch den Satz 3.2.3, der Relationen von Doppel Zeta-Werten in Verbindung mit Periodenpolynomen brachte, zu den Relationen führen, die wir in dem Kapitel über $\tau(n)$ durch Relationen zwischen Doppel Eisensteinreihen gewonnen haben. Dieser Zusammenhang ist bisher noch ein offenes Problem, welches auch in [Kan11] angesprochen wurde.

C. Mathematica Code

Wir geben im Folgenden eine Mathematica Implementierung zur Berechnung der Fourierreihen von $\tilde{G}_{s_1}$, $\tilde{G}_{s_1,s_2}$ und $\tilde{G}_{s_1,s_2,s_3}$. Abschliessen werden wir noch ein Beispiel zur Benutzung des Codes angeben.

```
(* Einstellungen *)
isDivString:=1;
isZetaString:=0;
isDividedByPi:=1;
latexString:=1;

(* Teilersummen *)
divS1[k_,n_]:= If[isDivString==1,
If[latexString==1,StringForm["\sigma_{''}('')",k,n],
StringForm["divS1['','']",k,n]],
DivisorSigma[k,n]];

divS2[r_,s_,n_]:=
If[isDivString==1,
If[latexString==1,StringForm["\sigma_{'',''}('')",r,s,n],
StringForm["divS2['','','']",r,s,n]],
divS2N[r,s,n]];

divS3[r_,s_,t_,n_]:=
If[isDivString==1,
If[latexString==1,StringForm["\sigma_{'','',''}('')",r,s,t,n],
StringForm["divS3['','','','']",r,s,t,n]],
divS3N[r,s,t,n]];

divS2N[r_,s_,n_]:=Sum[Sum[Sum[
If[u1*v1+u2*v2==n,u1^r * u2^s,0],
{u1,1,n},{u2,1,n}},{v2,1,v1-1}},{v1,1,n]];

divS2NS1[r_,s_,n_]:=Sum[Sum[Sum[
If[u1*v1+u2*v2==n,u1^r * u2^s*v1,0],
{u1,1,n},{u2,1,n}},{v2,1,v1-1}},{v1,1,n]];
```

```

divS2NS2[r_,s_,n_] := Sum[Sum[Sum[
If[u1*v1+u2*v2==n,u1^r * u2^s*v2,0],
{u1,1,n},{u2,1,n}],{v2,1,v1-1}],{v1,1,n}];

divS3N[r_,s_,t_,n_] := Sum[Sum[Sum[Sum[
If[u1*v1+u2*v2+u3*v3==n,u1^r * u2^s*u3^t,0],
{u1,1,n},{u2,1,n},{u3,1,n}],{v3,1,v2-1}],{v2,1,v1-1}],{v1,1,n}];

(* Zeta Werte *)
Ze[s1_] := If[isZetaString==1,
StringForm["z(')",s1],If[s1<2,StringForm["z(')",s1],
If[isDividedByPi==1,Zeta[s1]/(2*Pi*I)^s1,Zeta[s1]]] ];
DZe[s1_,s2_] := If[isZetaString==1,
StringForm["z('',')",s1,s2],DZeN[s1,s2]];
TZe[s1_,s2_,s3_] := StringForm["z('','',')",s1,s2,s3];
DZeN[n_,m_] := If[n==6&& m==4,11/10*Ze[10]-DZe[7,3]-Ze[5]^2,
If[n<2,0,If[EvenQ[n+m] || m==1,If[n==m,(Ze[n]*Ze[m]-Ze[m+n])/2,
If[n<m && m>1,Ze[n]*Ze[m]-DZeN[m,n]-Ze[m+n],
StringForm["z('',')",n,m]]],1/2*(1+(-1)^n)*Ze[m]*Ze[n]
+1/2*((-1)^n*Binomial[m+n,m]-1)*Ze[m+n]-(-1)^n*Sum[(Binomial[m+n-2*i-1,m-1]
+Binomial[m+n-2*i-1,n-1])*Ze[2*i]*Ze[m+n-2*i],{i,1,(m+n-3)/2}]] ];

(* g_{...} *)
gS1[k_,n_] := (-1)^k/(k-1)!*divS1[k-1,n];
gS2[r_,s_,n_] := (-1)^(r+s)/((r-1)!*(s-1)!)*(divS2[r-1,s-1,n]);
gS3[r_,s_,t_,n_] := (-1)^(r+s+t)/((r-1)!*(s-1)!*(t-1)!)*divS3[r-1,s-1,t-1,n];

(* Terme für Koeffizienten *)
CC[p_,s1_,s2_] := (-1)^(p-s1)*Binomial[p-1,s1-1]+(-1)^s2*Binomial[p-1,s2-1];
Bino2[a1_,a2_,b1_,b2_] := Binomial[a1-1,b1-1]*Binomial[a2-1,b2-1];

(* Zusätze für nicht abs. Konvergenten Fall *)
DoubleANEps[r_,s_,n_] :=
(-1)^(r+s)/((r-1)!*(s-1)!)
*(KroneckerDelta[s,1]*(n/2*divS1[r-2,n]-1/2*divS1[r-1,n])
+KroneckerDelta[r,2]*n/(2*s)*divS1[s-1,n]);
TripleANEps[s1_,s2_,s3_,n_] :=
KroneckerDelta[s1,2]*n/(2*(s2+s3))*(DoubleAN[s2,s3,n])
-KroneckerDelta[s1,2]*KroneckerDelta[s2,2]*n^2/(2^3*s3*(s3+1))*SingleAN[s3,n];

(* Eisensteinreihenoeffizienten *)
SingleAN[k_,n_] := gS1[k,n];

```



```
DoubleAN[r_,s_,n_] := gS2[r,s,n] + Ze[s] * gS1[r,n]
+ Sum[If[k1+k2==r+s, CC[k2,r,s] * Ze[k2] * gS1[k1,n], 0], {k1, 1, r+s}, {k2, 1, r+s}]
+ DoubleANEps[r,s,n];
```

```
TripleAN[s1_,s2_,s3_,n_] := DZe[s2,s3] * gS1[s1,n] + Ze[s3] * gS2[s1,s2,n]
+ gS3[s1,s2,s3,n] + Ze[s3] * (Sum[If[k1+k2==s1+s2, CC[k1,s1,s2] * Ze[k1]
* gS1[k2,n], 0], {k1, 1, s1+s2}, {k2, 1, s1+s2}])
+ Sum[If[k1+k2==s1+s2, CC[k1,s1,s2] * Ze[k1]
* gS2[k2,s3,n], 0], {k1, 1, s1+s2}, {k2, 1, s1+s2}]
+ Sum[If[k1+k2==s2+s3, CC[k1,s2,s3] * Ze[k1]
* gS2[s1,k2,n], 0], {k1, 1, s2+s3}, {k2, 1, s2+s3}]
+ (-1)^(s2) * Sum[If[k1+k2+k3==s1+s2+s3, ((-1)^s3
* Bino2[k2,k3,s2,s3] + (-1)^(s1+k2+k3)
* Bino2[k3,k2,s1,s2]) * DZe[k3,k2] * gS1[k1,n], 0]
, {k1, 1, s1+s2+s3}, {k2, 1, s1+s2+s3}, {k3, 1, s1+s2+s3}]
+ (-1)^(s1+s3) * Sum[If[k1+k2+k3==s1+s2+s3, (-1)^k2
* Bino2[k2,k3,s1,s3] * Ze[k3] * Ze[k2] * gS1[k1,n], 0]
, {k1, 1, s1+s2+s3}, {k2, 1, s1+s2+s3}, {k3, 1, s1+s2+s3}]
+ TripleANEps[s1,s2,s3,n];
```

Beispiel C.0.5. Wir haben Abschnitt 4.11 unter anderem gesehen, dass gilt:

$$\Delta = -\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11}{71} \tilde{G}_{12} + \frac{2^{12} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 691}{71} \tilde{G}_{5,3,4} - \frac{2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691}{71} \tilde{G}_{6,3,3} \\ + \frac{2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691}{71} \tilde{G}_{4,5,3} + \frac{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 691}{71} \tilde{G}_{5,4,3} - \frac{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 691}{71} \tilde{G}_{9,3}.$$

Unter Benutzung obigen Codes erhält man für die ersten 10 Koeffizienten der rechten Seite:

```
Table[Expand[
-2^5*3^2*5*7^2*11/71*SingleAN[12,n]
+2^12*3^3*7*691/71*TripleAN[5,3,4,n]
-2^9*3^4*5*7*691/71*TripleAN[6,3,3,n]
+2^9*3^4*5*7*691/71*TripleAN[4,5,3,n]
+2^10*3^4*7*691/71*TripleAN[5,4,3,n]
-2^9*3^2*5*7*691/71*DoubleAN[9,3,n]]
,{n,1,10}]

>> {1, -24, 252, -1472, 4830, -6048, -16744, 84480, -113643, -115920}
```


Literaturverzeichnis

- [AET] Shigeki Akiyama, Shigeki Egami, and Yoshio Tanigawa. Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers.
- [Bac09] Henrik Bachmann. Hecke-operatoren auf periodenpolynomen. 2009. Bachelorarbeit Uni Hamburg 2009.
- [BB05] J. M. Borwein and D. M. Bradley. Thirty-two Goldbach Variations. *ArXiv Mathematics e-prints*, February 2005.
- [BK97] D. J. Broadhurst and D. Kreimer. Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops. *Phys. Lett. B*, 393(3-4):403–412, 1997.
- [Bra05] David M. Bradley. Multiple q -zeta values. *J. Algebra*, 283(2):752–798, 2005.
- [Bro11] F. Brown. Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$. *ArXiv e-prints*, February 2011.
- [BS11] S. Baumard and L. Schneps. Period polynomial relations between double zeta values. *ArXiv e-prints*, September 2011.
- [Car11] Pierre Cartier. On the double zeta values. *IHES Preprint M-11-21*, 2011.
- [CB94] Richard E. Crandall and Joe P. Buhler. On the evaluation of Euler sums. *Experiment. Math.*, 3(4):275–285, 1994.
- [Dra] Milicic Dragan. Notes on riemann’s zeta function.
- [DS05] Fred Diamond and Jerry Shurman. *A first course in modular forms*, volume 228 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [EF06] R. Busam E. Freitag. *Funktionentheorie 1*. Springer-Verlag, 2006.
- [Fis05] G. Fischer. *Lineare Algebra*. Vieweg, 2005.
- [GKZ06] Herbert Gangl, Masanobu Kaneko, and Don Zagier. Double zeta values and modular forms. pages 71–106, 2006.
- [GM02] A. B. Goncharov and Y. I. Manin. Multiple zeta-motives and moduli spaces $M_{0,n}$. *ArXiv Mathematics e-prints*, April 2002.
- [GX08a] L. Guo and B. Xie. Explicit double shuffle relations and a generalization of Euler’s decomposition formula. *ArXiv e-prints*, August 2008.
- [GX08b] L. Guo and B. Xie. Weighted sum formula for multiple zeta values. *ArXiv e-prints*, September 2008.
- [Hir08] Friedrich Hirzebruch. Eulerian polynomials. *Münster J. Math.*, 1:9–14, 2008.

- [Hof97] Michael E. Hoffman. The algebra of multiple harmonic series. *J. Algebra*, 194(2):477–495, 1997.
- [Kan04] Masanobu Kaneko. Double zeta values and modular forms. *Korea-Japan Number Theory Seminar, October 9-12, 2004*, 2004.
- [Kan11] Masanobu Kaneko. Double eisensteinseries and modular forms. *Workshop on Multiple Zeta Values, Modular Forms and Elliptic Motives, University of Bristol Mai 2011*, 2011.
- [KKW03] Masanobu Kaneko, Nobushige Kurokawa, and Masato Wakayama. A variation of Euler’s approach to values of the Riemann zeta function. *Kyushu J. Math.*, 57(1):175–192, 2003.
- [Kön04] Konrad Königsberger. *Analysis. 1*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 2004.
- [KT11] M. Kaneko and K. Tasaka. Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2. *ArXiv e-prints*, December 2011.
- [Lan95] Serge Lang. *Introduction to modular forms*, volume 222 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1995. With appendixes by D. Zagier and Walter Feit, Corrected reprint of the 1976 original.
- [Mac] P. A. MacMahon. *Divisors of Numbers and their Continuations in the Theory of Partitions*. Proc. London Math. Soc. 1921 s2-19: 75-113.
- [Mic] Michael Hoffman. References on multiple zeta values and euler sums. <http://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html>.
- [MK07] A. Krieg M. Koecher. *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Springer-Verlag, 2007.
- [PP01] Paul C. Pasles and Wladimir de Azevedo Pribitkin. A generalization of the Lipschitz summation formula and some applications. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(11):3177–3184, 2001.
- [Riv02] T. Rivoal. Irrationalite d’au moins un des neuf nombres $z(5)$, $z(7)$, ..., $z(21)$. *Acta Arithmetica*, 103:157–167, 2002.
- [Ser77] J. P. Serre. *A Course in Arithmetic*. Springer-Verlag, 1977.
- [SR] G. Andrews S. Rose. *MacMahon’s Sum-of-Divisors Functions, Chebyshev Polynomials, and Quasi-Modular Forms*. To appear in J. Reine Angew. Math. (Crelle’s Journal).
- [Tas11] K. Tasaka. On a conjecture for representations of integers as sums of squares and double shuffle relations. *ArXiv e-prints*, December 2011.
- [vdP79] Alfred van der Poorten. A proof that Euler missed...Apéry’s proof of the irrationality of $\zeta(3)$. *Math. Intelligencer*, 1(4):195–203, 1978/79. An informal report.

- [Zag] D. Zagier. *Evaluation of the multiple zeta values $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$* . To appear in *Annals of Math*.
- [Zag77] D. Zagier. Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. In *Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*, pages 105–169. Lecture Notes in Math., Vol. 627. Springer, Berlin, 1977.
- [Zag90] Don Zagier. Hecke operators and periods of modular forms. In *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part II (Ramat Aviv, 1989)*, volume 3 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 321–336. Weizmann, Jerusalem, 1990.
- [Zag93a] Don Zagier. Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values. (843):162–170, 1993. Research into automorphic forms and L functions (Japanese) (Kyoto, 1992).
- [Zag93b] Don Zagier. Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values. *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku*, (843):162–170, 1993. Research into automorphic forms and L functions (Japanese) (Kyoto, 1992).
- [Zag94] Don Zagier. Values of zeta functions and their applications. In *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, volume 120 of *Progr. Math.*, pages 497–512. Birkhäuser, Basel, 1994.
- [Zag08] Don Zagier. Elliptic modular forms and their applications. In *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, pages 1–103. Springer, Berlin, 2008.
- [Zha00] Jianqiang Zhao. Analytic continuation of multiple zeta functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(5):1275–1283, 2000.
- [Zud02] V. V. Zudilin. Diophantine problems for q -zeta values. *Mat. Zametki*, 72(6):936–940, 2002.
- [Zud03] V. V. Zudilin. Algebraic relations for multiple zeta values. *Uspekhi Mat. Nauk*, 58(1(349)):3–32, 2003.

Eidesstattliche Erklärung

Die vorliegende Arbeit habe ich selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel - insbesondere keine im Quellenverzeichnis nicht benannten Internet-Quellen - benutzt.

Die Arbeit habe ich vorher nicht in einem anderen Prüfungsverfahren eingereicht. Die eingereichte schriftliche Fassung entspricht genau der auf dem elektronischen Speichermedium.

Henrik Bachmann

Hamburg, 21. Februar 2012