Algebra
Sommer 2014

Prof. Dr. Bernd Siebert
Hülya Argüz
Carsten Liese

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1.
Sei $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Welche der folgenden Teilmengen M des Polynomrings $\mathbb{Z}[x]$ sind Ideale, welche Unterringe von $\mathbb{Z}[x]$? Begründe und gib eine minimale Teilmenge $E \subset M$ an, die M erzeugt (d.h M ist das kleinste Ideal bzw der kleinste Unterring von $\mathbb{Z}[x]$, der E enthält).

a) $\{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n : a_n \in k\mathbb{Z}\}$
b) $\{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n : a_n = 0 \text{ falls } n \notin k\mathbb{Z}\}$
c) $\{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n : a_n \in \mathbb{Z}, (2k)|a_0, k|a_1, k|a_2, k > 1\}$
c) $\{p \in \mathbb{Z}[x] : p(y) = 0\}$ für ein $y \in \mathbb{Z}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.
Seien A, B zwei Ringe. Zeige: $A \times B$ mit der komponentenweisen Multiplikation ist wieder ein Ring und jedes Ideal I von $A \times B$ hat die Form $J \times K$ für geeignete Ideale $J \subset A$ und $K \subset B$. (Betrachte $(1,0)I$ und $(0,1)I$.)

(3 Punkte)

Aufgabe 3.
Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeige: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist ein Unterring von $\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$. (Betrachte einen geeigneten Auswertungshomomorphismus.)

(4 Punkte)

Aufgabe 4.
Betrachte das Monoid $M_l := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m \geq 0, m + ln \geq 0\}$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Zeige, dass für jeden Körper k gilt:

$$k[M_l] \cong k[x, y, z]/(xy - z^l).$$

(4 Punkte)