Algebra
Sommer 2014

Prof. Dr. Bernd Siebert
Hülya Argüz
Carsten Liese

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1.
Sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index zwei. Zeige: H ist Normalteiler von G.

(3 Punkte)

Aufgabe 2.
Berechne die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 26 & 20 & 6 \\ 3 & 24 & 27 & 4 \\ 4 & 50 & 40 & 10 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3.
Sei G eine endliche Gruppe, $A \subset B \subset G$ zwei Untergruppen, $N_G(A) := \{g \in G : gAg^{-1} = A\}$ der Normalisator von A in G und $Z_G(A) := \{g \in G : gag^{-1} = a\}$ der Zentralisator von A in G. Zeige oder finde Gegenbeispiele zu den folgenden Aussagen:

$$\begin{array}{llllll} (a) & N_G(A) \subset N_G(B) & (c) & Z_G(A) \subset Z_G(B) & (e) & Z(A) \subset Z(B) \\ (b) & N_G(A) \supset N_G(B) & (d) & Z_G(A) \supset Z_G(B) & (f) & Z(A) \supset Z(B). \end{array}$$

Hinweis: Nur eine der sechs Aussagen ist immer richtig, für die Gegenbeispiele betrachte z.B $G = S_3$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.
Zeige: Es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 1001 bis auf Isomorphie.

(4 Punkte)