Algebra
Sommer 2014

Prof. Dr. Bernd Siebert
Hülya Argüz
Carsten Liese

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1.
Gib einen Isomorphismus der Untergruppe

$$G := \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}) \in \mathbb{Z}^3 \mid 3 \text{ teilt } \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}\}$$

von $\mathbb{Z}^3$ zu einem Produkt zyklischer Gruppen an.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.
Zeige: Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ ist nicht frei, d.h. für alle $n > 0$ gilt $\mathbb{Q} \ncong \mathbb{Z}^n$
Hinweis: Betrachte das Bild der Standarderzeuger von $\mathbb{Z}^n$ unter einem Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Q}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.(Semidirektes Produkt).
Sei $\phi : G \to Aut(N)$ eine Wirkung einer Gruppe G auf einer Gruppe N , so dass $\phi(g)$ ein Gruppenautomorphismus ist für alle $g \in G$. Die Menge $G \times N$ mit der Verknüpfung $(g, n).(g', n') := (gg', n\phi(g)(n'))$ heiβt semidirektes Produkt $G \rtimes N$. Zeige:
a) Diese Verknüpfung definiert eine Gruppenstruktur auf $G \rtimes N$.
b)Jedes Element von $G \rtimes N$ lässt sich eindeutig schreiben als ein Produkt gn von $n \in N$ und $g \in G$, wobei wir G und N als Untergruppen von $G \rtimes N$ auffassen vermöge der Inklusionen $n \to (1, n)$ und $g \to (g, 1)$.
c)N ist ein Normalteiler von $G \rtimes N$.
d) Die Gruppe der affinen Abbildungen $Aff(\mathbb{R}^n)$ ist ein semidirektes Produkt $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardwirkung $\phi : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to Aut(\mathbb{R}^n)$. .

(4 Punkte)

Aufgabe 4.(Semidirektes Produkt II).
Sei $\phi : G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, der einen rechtsinversen Gruppenhomomorphismus $\sigma : H \to G, \phi \circ \sigma = id_H$ besitze. (Man sagt dann, die kurze exakte Sequenz

$$\phi : 0 \to \ker \phi \to G \to H \to 0$$

spaltet.) Zeige, dass G zu einem semidirekten Produkt $H \rtimes \ker \phi$ isomorph ist.

(4 Punkte)