

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1.

1. Sei K ein Körper, $p \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n und L der Zerfallungs-körper von p über K . Zeige: $[L : K] \leq n!$ (Das ist ein n -Fakultät und kein Ausrufezeichen.)

(4 Punkte)

Aufgabe 2.

(a) Bestimme den Grad des Zerfallungs-körpers von $p = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ über \mathbb{Q} .

(b) Bestimme den Grad des Zerfallungs-körpers von $q = X^5 - 6$ über \mathbb{Q} .

Hinweis: Zeige: Wenn α eine Nullstelle von q ist und β eine 5. Einheitswurzel (d. h. eine Nullstelle von $X^5 - 1$), dann ist $\alpha \cdot \beta$ auch eine Nullstelle von q .

(4 Punkte)

Aufgabe 3.

Sei p eine Primzahl. Zeige: $p \mid (p-1)! + 1$.

Hinweis: Rechne in \mathbb{F}_p .

(4 Punkte)

Aufgabe 4.

Sei $L := \mathbb{Q}(\zeta_8)$ der achte Kreisteilungskörper über \mathbb{Q} , es sei also ζ_8 eine primitive achte Einheitswurzel. Bestimme die Galoisgruppe der Erweiterung, deren Untergruppen und alle Zwischenkörper der Erweiterung. Welche der Zwischenkörper sind ebenfalls galoissch über \mathbb{Q} ?

(4 Punkte)