Algebra
Sommer 2014

Prof. Dr. Bernd Siebert
Hülya Argüz
Carsten Liese

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1.
Wie viele irreduzible Polynome vom Grad 6 gibt es über $\mathbb{F}_5$?
Hinweis: Verwende einen Satz aus der Vorlesung.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper, $f \in K[X]$, L der Zerfällungskörper von f, und $Z_f := \{\alpha \in L | f(\alpha) = 0\}$ die Menge der Nullstellen von f über L. Zeige:
a)Die Einschränkung von $\phi \in \mathrm{Aut}(L/K)$ auf Z_f definiert eine Einbettung der Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(L/K)$ in die Permutationen $S_{|Z_f|}$ von Z_f:

$$\mathrm{Aut}(L/K) \hookrightarrow S_{|Z_f|},\ \phi \mapsto \phi|_{Z_f}$$

b) Ist f irreduzibel ber K, so wirkt $\mathrm{Aut}(L/K)$ transitiv auf Z_f.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.
Sei p prim und $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom von Grad p. Zeige: Hat f über $\mathbb{C}$ genau zwei nicht-reele Nullstellen, so gilt $\mathrm{Aut}(L/K) \cong S_p$ für den Zerfällungskörper L von f.
Hinweis: Da f irreduzibel ist, hat f keine mehrfache Nullstelle über $\mathbb{C}$. Verwende nun Aufgabe 2 und die komplexe Konjugation.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.
Sei $f := X^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und L der Zefällungskörper von f. Bestimme $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$. Zeige dazu:
a)Ist α Nullstelle von f über L, so gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$.
b)L enthält die Gruppe der 5-ten Einheitswurzeln $G_5 := \{\zeta \in \mathbb{C} |\ \zeta^5 = 1\}$
c)Sei ζ ein Erzeuger von $G_5 \cong \mathbb{Z}/5$. Der Isomorphismus

$$\phi : (\mathbb{Z}/5)^\times \to \mathrm{Aut}(G_5),\ \phi(l)(\eta) := \eta^l$$

induziert einen Isomorphismus $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/5)^\times$ (Bemerkung: $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 4$)
d)$\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ ist isomorph zum semidirekten Produkt $\mathbb{Z}/5 \rtimes (\mathbb{Z}/5)^\times$ bezüglich der Wirkung ϕ.

(4 Punkte)