Prof. Dr. Bernd Siebert
Hülya Argüz
Carsten Liese

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1.
S_5 operiere auf $\mathbb{R}^5$ durch Permutation der Koordinaten. Welche Bahnlängen kommen vor? Begründung?

(3 Punkte)

Aufgabe 2.
S_n operiere auf sich durch Konjugation

$$\kappa : S_n \to \mathrm{Hom}(S_n, S_n), \qquad \kappa(\pi)(\sigma) = \pi \circ \sigma \circ \sigma^{-1}.$$

Zeige: Der Bahnenraum $S_n/\sim$ von κ ist in natürlicher Bijektion zur Menge P der Partitionen von n in aufsteigende Folgen $n_1 \leq n_2 \leq \cdots$ mit $\sum_i n_i = n$ und $n_i > 0$.
Hinweis: Sei $\sigma \in \mathrm{Bij(X)}$ und $\langle\sigma\rangle = \{\sigma^n | n \in \mathbb{Z}\}$ die von σ erzeugte Untergruppe. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die Zerlegung von X in die Bahnen $\langle\sigma\rangle$ eine Zerlegng $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{|X/\langle\sigma\rangle|}$ von σ in Zykel aufsteigender Länge $\mathrm{ord}(\sigma_1) \leq \cdots \leq \mathrm{ord}(\sigma_{|X/\langle\sigma\rangle|})$ definiert. Damit erhalten wir eine natürliche Abbildung

$$f : S_n \to P, \qquad \sigma \mapsto (\mathrm{ord}(\sigma_1), \ldots, \mathrm{ord}(\sigma_{|X/\langle\sigma\rangle|})).$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3.
Sei G eine Gruppe, und seien $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
a) Zeige:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) &\to \{g \in G : g^m = 1\} \\ \varphi &\to \varphi([1]) \end{aligned}$$

definiert ein Bijektion.
b) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in den Fällen
(1) $m|n$ (2) $n|m$ oder (3) m und n sind teilerfremd.

(3 Punkte)

Aufgabe 4.
Sei $v, w \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ und $M := \{g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) | g.v = w\}$ die Menge der invertierbaren Matrizen, die v auf w abbildet. Zeige: Es gibt eine eindeutige Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, so dass M eine Linksnebenklasse von G ist (d.h $M = gG$ für ein $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$).

(4 Punkte)