Algebra
Sommer 2014

Prof. Dr. Bernd Siebert
Hülya Argüz
Carsten Liese

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1.
Seien $I, J \subset R$ Ideale eines Rings R. Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel:
a)$I \cap J$ ist ein Ideal.
b)Sind I, J Primideale, so ist auch $I \cap J$ Primideal.
c)Sind I, J Primideale, so ist auch $I + J$ Primideal.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.
Sei $p > 0$ eine Primzahl. Zeige:
a)Es gilt $m^p = m$ für alle $m \in \mathbb{Z}/p$. (Hinweis: Betrachte $(\mathbb{Z}/p)^\times$.)
b)Ist R ein Ring der Charakteristik p, so ist $R \to R,\ a \mapsto a^p$ ein Ringhomomorphismus.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.
Sei R ein Hauptidealring und seien $a_1, \ldots, a_n \in R$. Zeige, dass das von $a_1, \ldots, a_n$ erzeugte Ideal genau dann gleich R ist, wenn jeder gemeinsame Teiler von $a_1, \ldots, a_n$ eine Einheit ist:

$$(a_1, \ldots, a_n) = R \iff \{t \in R \setminus \{0\} |\ t|a_1, \ldots, t|a_n\} \subset R^\times.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4.
Welche der folgenden Ideale sind Primideale, welche maximale Ideale? Begründe!
a)$\{p \mid p(0) = p'(0) = 0\} \subset \mathbb{C}[x]$.
b)$(x + y) \subset \mathbb{C}[x, y]$. (Hinweis: Koordinatenwechsel.)

(4 Punkte)