Algebra
Sommer 2014

Prof. Dr. Bernd Siebert
Hülya Argüz
Carsten Liese

Präsenzübung 1

Aufgabe 1.
Sei G eine endlich Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,k)$ und $g \in G$. Welche Ordnung kann g haben, falls $k = \mathbb{C}$ bzw. $k = \mathbb{Z}$?
Lösung
Falls $k = \mathbb{C}$ sein g in Jordan Normalform. Dann folgt aus $g^n = 1$, dass $z^n = 1$ für jeden Eigenwert. Also sind die Eigenwerte n-te Einheitswurzeln und jede Ordnung ist möglich. Ist $k = \mathbb{Z}$, ist ausserdem $\det(g), \mathrm{tr}(g) \in \mathbb{Z}$ Also sind einfache Eigenwerte komplex konjugiert, $2Re(z) \in \mathbb{Z}$ und mehrfache Eigenwerte sind höchstens $1, -1$. Sei z ein einfacher Eigenwert, $z = \mu_n^v$. Der Realteil von μ_n^v ist $\cos \frac{v2\pi}{n}$. Da einfache Eigenwerte in konjugierten Paaren auftreten, kann man $v \leq \frac{n}{2}$ annehmen. Wegen $2Re(z) \in \mathbb{Z}$ ist $Re(z)$ also in $\{1, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, -1\}$.Insgesamt gilt $v \in \{0, \frac{n}{6}, \frac{n}{4}, \frac{n}{3}, \frac{n}{2}\}$.
Somit ist z sechste oder vierte Einheitswurzel, also $\mathrm{ord}(g) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Elemente der Ordnung 1 und 2 sind offensichtlich, ein Element der Ordnung 4 ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, eines der Ordnung 6 ist $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Aufgabe 2.
Eine Gruppe der Ordnung 33 wirke auf einer Menge mit 16 Elementen. Hat eine solche Wirkung einen Fixpunkt?
Lösung
Die Zerlegung von X in G-Bahnen liefert

$$|X| = |\coprod_{[x] \in X/G} G.x| = \sum_{[x] \in X/G} |G.x| = \sum_{[x] \in X/G} |G/G_x| = \sum_{[x] \in X/G} \frac{G}{G_x}$$

Für $|X| = 16$ und $|G| = 33$, also $|G_x| \in \{1, 3, 11, 33\}$ erhält man insbesonders

$$16 \in 33\mathbb{N} + 11\mathbb{N} + 3\mathbb{N} + |X^G|,$$

also $|X^G| \geq 1$.
Aufgabe 3.
Seien $A, B \subset G$ zwei endliche G-Untergruppen. Wieviele Elemente enthält der Schnitt $A \cap B$, wenn die Ordnungen von A und B teilerfremd sind?
Lösung
Sei $g \in A \cap B$, dann ist $\langle g \rangle$ Untergruppe von A und B, also teilt $|\langle g \rangle|$ sowohl $|A|$ als auch $|B|$.
Aufgabe 4.
Sei G eine endlich Gruppe. Wie viele Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}$ nach G gibt es? (Hinweis: Betrache $\mathrm{ev}_1 : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \phi \mapsto \phi(1).)$
Lösung
Die Abbildung ev_1 ist bijektiv, mit $\mathrm{ev}_1^{-1}(g)(m) = g^m$.