Prof. Dr. Bernd Siebert
Hülya Argüz
Carsten Liese

Probeklausur

Algebra
SS 2014

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Nachname: ____________________
Vorname: ____________________
Matrikelnr: ____________________

Es dürfen alle Vorlesungsunterlagen inklusive Übungsaufgaben und Lösungen verwendet werden. Untersagt ist jedoch die Benutzung eines Taschenrechners und anderer elektronischer Geräte. Jede zusätzliche beschriebene Seite muss mit Namen und Matrikelnummer beschriftet werden.

---

von den Korrektoren auszufüllen:

____
Note nach Klausurpunkten

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$\sum$:

1. Finde die Ordnung des Normalisators von $\langle(12\cdots 5)\rangle$ in S_5. (Hinweis: Betrachte die Operation von S_5 auf der Menge der 5-Sylowgruppen und benutze die Bahnenformel.)

2. Sei $G = \mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^2$ mit $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \in M(3\times 2, \mathbb{Z})$. Bestimme den Rang von G. Begründe!

3. Bestimme die Anzahl r der Linksnebenklassen von $H = \langle(124)\rangle \subset S_4$. Finde sodann $g_1, \cdots, g_r \in S_4$, so dass $\{g_1H, \cdots, g_rH\}$ die Menge der Linksnebenklassen von H ist.

4. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $x \in A$ nilpotent. Zeige:

   i. $1 + x \in A^\times$

   ii. $\forall e \in A^\times$ ist $e + x$ eine Einheit.

5. Sei p eine Primzahl, $p \equiv 3 \bmod 4$. Zeige: $X^2 + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

6. Welche abelschen Gruppen der Ordnung 120 gibt es bis auf Isomorphie? Begründe!

7. Betrachte die Auswertungsabbildung

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(2 + 3i)$$

   a) Finde einen Erzeuger des Kerns $\ker(\phi)$. Begründe!
   b) Zeige, dass das Bild $\operatorname{im}(\phi) \subset \mathbb{C}$ von ϕ ein Körper ist.

8. Sei $K = \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + X + 2)$. Bestimme $a, b \in \mathbb{F}_3$ so, dass $K^\times$ von $aX + b$ erzeugt wird.

9. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und $[L : K] = 3^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine Folge von Körpererweiterungen

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = L$$

   gibt, wobei $[K_i : K_{i-1}] = 3$ gilt, $i = 1, ..., n$.

10. Bestimme den Grad des Zerfällungskörpers von $f = X^3 - 11 \in \mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$. (Hinweis: f zerfällt nicht nach Adjunktion nur einer Wurzel!)