Prof. Dr. Bernd Siebert

Probeklausur

Algebra
SS 2014

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr: ____________________

Es dürfen alle Vorlesungsunterlagen inklusive Übungsaufgaben und Lösungen verwendet werden. Untersagt ist jedoch die Benutzung eines Taschenrechners und anderer elektronischer Geräte. Jede zusätzliche beschriebene Seite muss mit Namen und Matrikelnummer beschriftet werden.

von den Korrektoren auszufüllen:

____

Note nach Klausurpunkten

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$\sum$:

1. Finde die Ordnung des Normalisators von $\langle(12\cdots5)\rangle$ in S_5. (Hinweis: Betrachte die Operation von S_5 auf der Menge der 5-Sylowgruppen und benutze die Bahnenformel.)

   Lösung:
   Es gilt $|S_5| = 5! = 2^3\cdot3\cdot5$. Die Anzahl n_5 der 5-Sylowgruppen teilt also $2^3\cdot3$ und $n_5 \equiv 1 \mod 5$. Also $n_5 = 1$ oder $n_5 = 6$. Im ersten Fall wäre $H := \langle(12\cdots5)\rangle$ die einzige 5-Sylowgruppe, also ein Normalteiler von S_5. Es gilt

   $$H = \{(12345), (13524), (14253), (15432), \mathrm{id}\}.$$

   Konjugiert man (12345) mit (13) erhält man (14532), also ist H nicht normal. Demnach hat S_5 sechs 5-Sylowgruppen. Nach den Sylowsätzen sind diese alle konjugiert, und jede zu H konjugierte Gruppe ist eine 5-Sylowgruppe. Lässt man G durch Konjugation auf der Menge seiner Untergruppen wirken, hat die Bahn von H also Länge 6. Die Isotropiegruppe von H unter dieser Wirkung ist gerade der Normalisator $N_{S_5}(H)$ von H. Nach der Bahnenformel gilt

   $$6 = [S_5 : N_{S_5}(H)] = \frac{|S_5|}{|N_{S_5}(H)|} = \frac{120}{N_{S_5}(H)}$$

   Also ist $|N_{S_5}(H)| = 20$.

2. Sei $G = \mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^2$ mit $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \in M(3\times 2, \mathbb{Z})$. Bestimme den Rang von G. Begründe!

   Lösung:
   Aus der exakten Sequenz

   $$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^3 \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

   erhält man durch dualisieren die Sequenz

   $$\mathbb{Q}^2 \xleftarrow{A^t} \mathbb{Q}^3 \longleftarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(G, \mathbb{Q}) \longleftarrow 0.$$

   Der Rang von G ist per Definition die Dimension des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(G, \mathbb{Q})$ und dieser ist nach obiger Sequenz gleich der Dimension des Kerns von $A^t = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, aufgefasst als Matrix mit rationalen Koeffizienten. $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ sind nicht linear abhängig, also ist $\mathrm{rk}(A^t) = 2$ und der Kern von A^t hat Dimension 1, weil $\dim\ker(A^t) = 3 - \mathrm{rk}(A^t)$ ist.

3. Bestimme die Anzahl r der Linksnebenklassen von $H = \langle(124)\rangle \subset S_4$. Finde sodann $g_1, \cdots, g_r \in S_4$, so dass $\{g_1H, \cdots, g_rH\}$ die Menge der Linksnebenklassen von H ist.

   Lösung:
   Für eine endliche Gruppe G lautet der Satz von Lagrange:

   $$|G| = |H| \cdot [G:H]$$

mit $[G : H]$ der Index von H in G, die Anzahl der Nebenklassen von H in G. Für $G = S_4$ und $H = \langle(124)\rangle \subset S_4$ gilt $|G| = 4! = 24$ und $|H| = 3$. Es folgt $r = 24/3 = 8$.
Wir können nehmen

$$\begin{aligned} &g_1 = (23),\ g_2 = (43),\ g_3 = (234),\ g_4 = (243),\\ &g_5 = (24),\ g_6 = (123),\ g_7 = (1243),\ g_8 = \mathrm{id}, \end{aligned}$$

mit id die Identität. Dann haben wir

$$\begin{aligned} &g_1H = \{(23), (1324), (1432)\},\ g_2H = \{(43), (1234), (1342)\},\ g_3H = \{(234), (134), (12)(34)\}\\ &g_4H = \{(243), (14)(23), (1432)\},\ g_5H = \{(24), (14), (12)\},\ g_6H = \{(123), (13)(24), (143)\}\\ &g_7H = \{(1243), (1423), (13)\},\ g_8H = \{\mathrm{id}, (124), (142)\}. \end{aligned}$$

4. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $x \in A$ nilpotent. Zeige:
   a) $1 + x \in A^\times$
   b) $\forall e \in A^\times$ ist $e + x$ eine Einheit.

   Lösung:

   a) Sei $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}\setminus 0$. Dann gilt $(1+x)(1-x+x^2 \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}) = 1 + (-1)^n x^n = 1$. Also hat $1 + x$ ein Inverses.
   b) Ist e eine Einheit und $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $x^n = 0$, dann ist $e(1+e^{-1}x) = e + x$ nach (a) eine Einheit, denn $(ex)^n = e^n x^n = 0$.

5. Sei p eine Primzahl, $p \equiv 3 \bmod 4$. Zeige: $X^2 + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   Lösung:
   Das Polynom $X^2 + 1$ hat Grad 2. Demnach reicht es zu zeigen, dass es keine Nullstellen in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat. Angenommen a sei eine Nullstelle. Dann gilt $a^2 \equiv -1 \bmod p$ und somit $a^4 \equiv 1 \bmod p$. Die Ordnung von a in der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ ist also 4. Die Ordnung von $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ ist $p - 1$. Dann teilt aber 4 die Ordnung $p - 1$, also ist $p \equiv 1 \bmod 4$, ein Widerspruch.

6. Welche abelschen Gruppen der Ordnung 120 gibt es bis auf Isomorphie? Begründe!

   Lösung:
   Es gilt $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Nach dem Klassifikationssatz gibt es die folgenden Isomorphietypen:

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\\ &\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

7. Betrachte die Auswertungsabbildung

$$\phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto f(2+3i)$$

a) Finde einen Erzeuger des Kerns $\ker(\phi)$. Begründe!
b) Zeige, dass das Bild $\mathrm{im}(\phi) \subset \mathbb{C}$ von ϕ ein Körper ist.

Lösung:

a) $2+3i$ ist eine Nullstelle des Polynoms $(X-(2+3i)) \cdot (X-(2-3i)) = X^2-4X+13$. Weiterhin ist $f = X^2-4X+13 \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel über $\mathbb{R}$, da die Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ liegen und f ein Polynom vom Grad 2 ist. Damit ist klar, dass f den Kern von ϕ erzeugt.

b) Der Kern von ϕ wird nach (a) von einem irreduziblen Polynom erzeugt, ist also maximal, da $\mathbb{R}[X]$ ein Hauptidealring ist. Die Aussage folgt nun aus $\mathrm{im}(\phi) \cong \mathbb{R}[X]/\ker(\phi)$.

8. Sei $K = \mathbb{F}_3[X]/(X^2+X+2)$. Sei x die Äquivalenzklasse von X in K. In K gilt dann $x^2 = -x-2$. Bestimme $a, b \in \mathbb{F}_3$ so, dass $K^\times$ von $ax+b$ erzeugt wird.

Lösung:
$K^\times = \{1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}$. Es gilt $|K^\times| = 8$ und x ist ein Erzeuger:

$$\begin{aligned} x^2 &= -x-2 = 2x+1, \\ x^3 &= 2x^2+x = 2x+2, \\ x^4 &= 2x^2+2x = 4x+2+2x = 2 \neq 1. \end{aligned}$$

Demnach hat x die Ordnung 8.

9. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und $[L:K] = 3^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine Folge von Körpererweiterungen

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = L$$

gibt, wobei $[K_i : K_{i-1}] = 3$ gilt, $i = 1, ..., n$.

Lösung:
Sei G die Galoisgruppe von L/K. G ist eine p-Gruppe mit $p = 3$ und besitzt somit nach Satz 7.7 aus der Vorlesung eine Kompositionsreihe $G_0 \lhd G_1 \cdots \lhd G_n = G$ mit Subquotienten $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Diese liefern nach dem Hauptsatz der Galoistheorie einen Turm von Körpererweiterungen $K_0 \subset K_1 \cdots \subset K_n$ mit $K_i = L^{G_{n-i}}$. Man erhält

$$[K_i : K_{i-1}] = \frac{[L : K_{i-1}]}{[L : K_i]} = \frac{|G_{n-i+1}|}{|G_{n-i}|} = 3,$$

wie behauptet.

10. Bestimme den Grad des Zerfällungskörpers von $f = X^3 - 11 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$. (Hinweis: f zerfällt nicht nach Adjunktion nur einer Wurzel!)

Lösung:
Sei $\alpha = \sqrt[3]{11} \in \mathbb{R}$ und $\zeta = e^{2\pi/3} \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel. Es gilt

$$X^3 - 11 = (X - \alpha)(X^2 + \alpha X + \alpha^2).$$

Die Wurzeln des quadratischen Polynoms sind $\alpha\zeta$ und $\alpha\zeta^2$ (quadratische Ergänzung). Diese sind beide nicht reell, also ist $X^2 + \alpha X + \alpha^2$ irreduzibel. Der Zerfällungskörper von $X^3 - 11$ enthält diese Wurzeln, daher auch $\zeta = (\alpha\zeta^2)/(\alpha\zeta)$. Somit ist $\mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$ der Zerfällungskörper von $X^3 - 11$. Da $X^3 - 11 = \mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$ und $X^2 + \alpha X + \alpha^2 = \mathrm{Irr}(\alpha\zeta, \mathbb{Q}(\alpha))$ gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ und $[\mathbb{Q}(\alpha, \zeta) : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2$. Es folgt

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \zeta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha, \zeta) : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 6.$$