

Eberhard M. Schröder

# Geometrische Algebra

**für Studierende der mittleren Lehrämter**

Ausarbeitung einer Vorlesung,  
gehalten am Fachbereich Mathematik  
der Universität Hamburg  
im Wintersemester 2005/2006

# INHALT

<b>1. Eigenschaften komplexer Zahlen</b>	1
<b>2. Bewegungen der Anschauungsebene</b>	6
A. Grundeigenschaften ebener Bewegungen	6
B. Translationen und Punktspiegelungen	8
C. Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen	10
D. Verketteten und Transformieren von Bewegungen	12
<b>3. Diskrete Bewegungsgruppen der Ebene</b>	17
A. Symmetriegruppen	17
B. Zyklische Gruppen und Diedergruppen	18
C. Rosettengruppen	20
D. Die sieben Friesgruppen	21
E. Die siebzehn Ornamentgruppen	25
<b>4. Isometrien des Anschauungsraumes</b>	35
A. Grundeigenschaften des $\mathbb{R}^3$	35
B. Isometrien des $\mathbb{R}^3$	38
<b>5. Die Symmetrien der platonischen Körper</b>	42
A. Würfel, Oktaeder und Tetraeder	42
B. Gerade und ungerade Permutationen	45
C. Der goldene Schnitt	47
D. Ikosaeder und Dodekaeder	48
<b>Stichwortregister</b>	52

# 1. EIGENSCHAFTEN KOMPLEXER ZAHLEN

(1.1) Es sei  $\mathbb{R}(+, \cdot)$  der Körper der reellen Zahlen. Wir deuten die Menge

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

als die Punktmenge der Anschauungsebene, indem wir uns jeden Punkt  $(x, y)$  durch seine *Koordinaten*  $x, y$  beschrieben denken.

Für die Punkte der Anschauungsebene führen wir durch die Festsetzungen

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v) \quad \forall x, y, u, v \in \mathbb{R},$$

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu) \quad \forall x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

eine Addition und eine Multiplikation ein. Auf diese Weise entsteht ein Körper  $\mathbb{C}(+, \cdot)$  mit dem Nullelement  $(0, 0)$  und dem Einselement  $(1, 0)$ , genannt **Körper der komplexen Zahlen**. Die Subtraktion in  $\mathbb{C}(+, \cdot)$  ist gegeben durch

$$(x, y) - (u, v) = (x - u, y - v) \quad \forall x, y, u, v \in \mathbb{R},$$

und die Division in  $\mathbb{C}(+, \cdot)$  ist gegeben durch

$$(x, y) / (u, v) = \frac{(x, y)}{(u, v)} = \left( \frac{xu + yv}{u^2 + v^2}, \frac{-xv + yu}{u^2 + v^2} \right) \text{ für } x, y, u, v \in \mathbb{R} \text{ mit } (u, v) \neq (0, 0).$$

(Man beachte das Verbot der Division durch  $(0, 0)$ .) Wegen

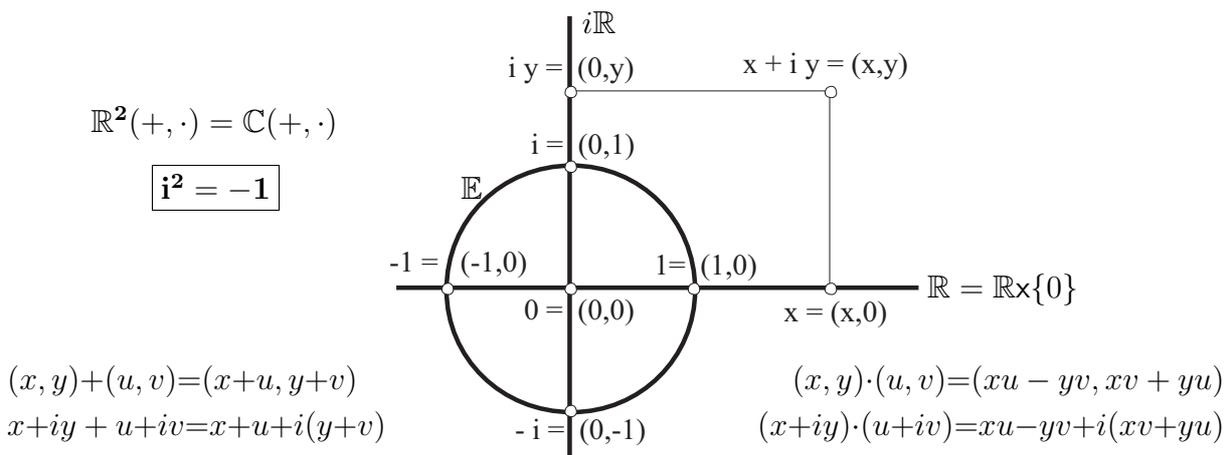
$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \text{ und } (x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

wird in  $\mathbb{R} \times \{0\}$  genau so gerechnet wie in  $\mathbb{R}$ . Deshalb nimmt man die Identifikation

$x = (x, 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  vor und erhält damit  $\mathbb{R}$  als „ $x$ -Achse“ der Anschauungsebene und als Teilkörper von  $\mathbb{C}(+, \cdot)$ .

Man setzt  $i := (0, 1)$ , und wegen  $(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  folgt

$$(x, y) = x + iy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \text{ Überdies ergibt sich } i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$



Aus historischen Gründen bezeichnet man  $i$  als die **imaginäre Einheit**. Man nennt  $\mathbb{R}$  die **reelle Achse** und  $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{yi \mid y \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{R}i =: i\mathbb{R}$  die **imaginäre Achse**. Bei der Darstellung von  $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  in der Form  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  nennt man  $x$  den **Realteil** und  $y$  den **Imaginärteil** von  $z$ , in Zeichen:  $x = \text{Re}(z)$  und  $y = \text{Im}(z)$ .

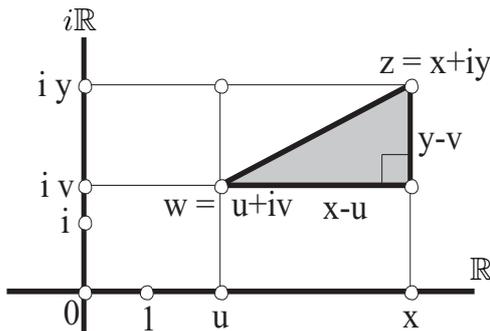
Die Menge

$$\mathbb{E} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

wird als **Einheitskreis** bezeichnet. Es gilt  $1, -1, i, -i \in \mathbb{E}$  und genauer  $x + i\sqrt{1-x^2}, x - i\sqrt{1-x^2} \in \mathbb{E} \quad \forall x \in \mathbb{R}$  mit  $-1 \leq x \leq 1$ , d.h.  $\mathbb{E}$  besteht aus unendlich vielen Punkten.

(1.2) Es sei  $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ ,  $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Man setzt fest:

Die Zahl  $|x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$  wird der **Absolutbetrag** von  $x + iy$  für  $x, y \in \mathbb{R}$  genannt. Es handelt sich hierbei um eine Erweiterung des für  $\mathbb{R}$  erklärten Absolutbetrages, denn für  $x \in \mathbb{R}$  ist  $|x| = \sqrt{x^2}$ . Der Absolutbetrag läßt sich geometrisch deuten:

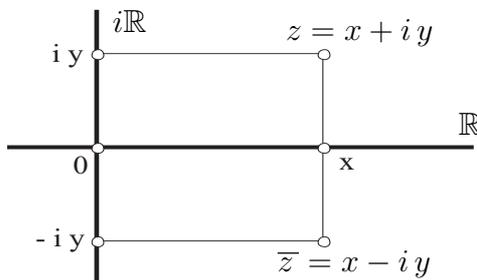


Sind  $z = x + iy$  und  $w = u + iv$  komplexe Zahlen mit  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ , so wird die Zahl

$$d(z, w) = d(x + iy, u + iv) \\ := \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \in \mathbb{R}_+$$

im Hinblick auf den Satz des Pythagoras der **Abstand** oder auch die **Distanz** der Punkte  $z$  und  $w$  genannt.

Wegen  $z - w = (x-u) + i(y-v)$  ist dann  $d(z, w) = |z - w|$ , und für  $w = 0$  ergibt sich  $d(z, 0) = |z|$ , d.h. *der Absolutbetrag einer komplexen Zahl ist ihr Abstand vom sog. Ursprung  $0 = (0, 0)$ .*



Die Abbildung

$$\kappa : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : x + iy \rightarrow \overline{x + iy} := x - iy$$

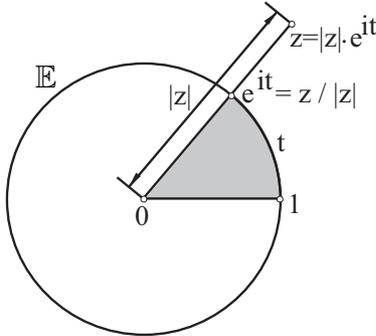
(für  $x, y \in \mathbb{R}$ ) wird **Konjugation** genannt; sie ist ein *Automorphismus* des Körpers  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  mit hervorragenden Eigenschaften und wird auch als **Spiegelung an  $\mathbb{R}$**  bezeichnet.

In den Grundvorlesungen wurde gezeigt:

- (1.3) a) Es gilt  $\kappa \circ \kappa = id_{\mathbb{C}}$ , also  $\kappa = \kappa^{-1}$  und  $\overline{\overline{z}} := \overline{(\overline{z})} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .
- b) Es ist  $z + \overline{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z) \leq 2 \cdot |z|$  und  $z - \overline{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .
- c) Es ist  $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .
- d) Es ist  $z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}i \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .
- e) Es ist  $|z| = |\overline{z}| = |-z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .
- f) Es ist  $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$  und  $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}_+ \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .
- g) Es gilt  $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \wedge \overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w} \wedge \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ .
- h) Es ist  $w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} \quad \forall w \in \mathbb{C}^*$ .
- k) Es ist  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall w \in \mathbb{C}^*$ .
- l) Es ist  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ .

- (1.4) Dreiecksungleichung, 1. Fassung:  $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$  mit  $z/w \notin \mathbb{R}_+$ .  
 Dreiecksungleichung, 2. Fassung:  $||z| - |w|| \leq |z - w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ ,  
 Dreiecksungleichung, 3. Fassung:  $|a - c| \leq |a - b| + |b - c| \quad \forall a, b, c \in \mathbb{C}$ .

- (1.5) Der Einheitskreis  $\mathbb{E}$  ist eine Untergruppe der Gruppe  $\mathbb{C}^*(\cdot)$ . Es gilt  $z^{-1} = \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{E}$ ,  
 $i^{-1} = \bar{i} = -i$  und  $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} = 1\}$ .



- (1.6) Ist  $z \in \mathbb{C}^*$ , so ist  $\boxed{z/|z| \in \mathbb{E}}$  wegen  $|z/|z|| = 1$ . Dann existiert genau ein  $t \in [0, 2\pi[$  mit  $z/|z| = \cos t + i \sin t = e^{it}$ , also mit  $\boxed{z = |z| \cdot e^{it}}$ . Hierbei ist  $t$  die Länge des Bogens  $\{e^{ix} \mid 0 \leq x \leq t\}$ , der sich auf dem Einheitskreis  $\mathbb{E}$  beim Durchlaufen gegen den Uhrzeigersinn von 1 bis  $e^{it}$  ergibt, wobei  $\text{Im } e^{it} > 0 \quad \forall t \in ]0, \pi[$  und  $\text{Im } e^{it} < 0 \quad \forall t \in ]\pi, 2\pi[$  sowie  $e^0 = 1 \wedge e^{i\pi/2} = i \wedge e^{i\pi} = -1 \wedge e^{i3\pi/2} = -i$  gilt.

- (1.7) Für  $s, t \in \mathbb{R}$  gilt  $\boxed{e^{is} \cdot e^{it} = e^{i(s+t)}}$  und  $\boxed{e^{is} = e^{it} \Leftrightarrow s - t \in 2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi \cdot m \mid m \in \mathbb{Z}\}}$ .

Ist  $z \in \mathbb{C}$  in der Form  $z = r \cdot e^{is}$  mit  $r \in \mathbb{R}_+ \wedge s \in \mathbb{R}$  gegeben, so bezeichnet man das Paar  $(r; s) := r \cdot e^{is}$  als eine **Polarkoordinatendarstellung** von  $z$  mit  $r = |z|$  als **Absolutbetrag** und mit  $s$  als **Argument**.

Sind  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  in der Form  $z_1 = (r_1; s_1)$  und  $z_2 = (r_2; s_2)$  gegeben, so folgt

(\*)  $\boxed{z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2; s_1 + s_2)}$ , d.h. zwei komplexe Zahlen werden **multipliziert**,

indem man die *Absolutbeträge multipliziert* und die *Argumente addiert*.

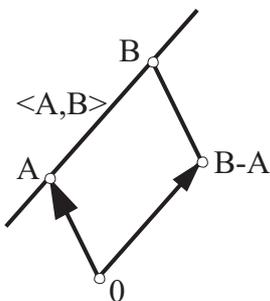
- (1.8) Ist eine komplexe Zahl  $A$  gegeben, so ist durch diese nicht nur der Punkt  $A$ , sondern auch das Paar  $(0, A)$  festgelegt, welches man durch einen *geradlinigen Pfeil* von 0 nach  $A$  veranschaulichen kann. Ein solcher Pfeil wird auch als sog. **Ortsvektor des Punktes**  $A$  bezeichnet. Es hat sich bewährt, für eine komplexe Zahl  $A$  neben der geometrischen Deutung als Punkt zugleich auch die geometrische Deutung als Ortsvektor zuzulassen. Davon werden wir, wo es sinnvoll erscheint, Gebrauch machen.

- (1.9) Sind  $A, B \in \mathbb{C}$  mit  $A \neq B$ , so werden

$\boxed{[A, B] := \{A + \lambda(B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq \lambda \leq 1\}}$  die **Verbindungsstrecke von A, B**,

$\boxed{[A, B) := \{A + \lambda(B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}_+\}}$  der **Strahl aus A durch B** und

$\boxed{\langle A, B \rangle := \{A + \lambda(B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$  die **Verbindungsgerade von A, B** genannt.



Mit der Abkürzung  $U + \mathbb{R}V := \{U + \lambda \cdot V \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  für  $U, V \in \mathbb{C}$  erhalten wir  $\boxed{\langle A, B \rangle = A + \mathbb{R}(B - A)}$  für  $A, B \in \mathbb{C}$  mit  $A \neq B$ .

Bei dieser sog. *Parameterdarstellung* von  $\langle A, B \rangle$  wird  $A$  ein **Aufpunkt** und  $B - A$  ein **Richtungsvektor** von  $\langle A, B \rangle$  genannt. Für  $U, V \in \mathbb{C}$  mit  $V \neq 0$  ist  $U + \mathbb{R}V = \langle U, U + V \rangle$  eine Gerade mit Richtungsvektor  $V$ . Man setzt  $0 + \mathbb{R}V =: \mathbb{R}V$  und erhält  $\langle 0, V \rangle = \mathbb{R}V = \mathbb{R}(\lambda \cdot V) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ .

Punkte  $A, B, C, \dots$  heißen **kollinear**, wenn sie gemeinsam auf einer Geraden liegen, sonst **nichtkollinear**. Es gilt:

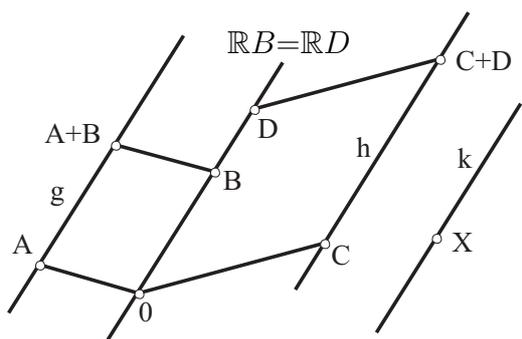
(\*) Ortsvektoren  $A, B \in \mathbb{C}$  sind genau dann linear unabhängig, wenn die Punkte  $0, A, B$  nichtkollinear sind.

Sind  $A, B, X \in \mathbb{C}$ , so sagt man,  $X$  liegt zwischen  $A, B$ , wenn  $X \in [A, B]$  ist.

Z.B. liegt  $\frac{A+B}{2} = A + \frac{1}{2}(B-A)$  zwischen  $A, B$ , und wegen  $|A - \frac{A+B}{2}| = |\frac{A+B}{2} - B|$  wird  $\frac{A+B}{2}$  die **Mitte** von  $A, B$  und auch die **Mitte** von  $[A, B]$  genannt.

(1.10) Es sei  $\mathbb{G}$  die Menge aller Geraden von  $\mathbb{C}$ . Dann gilt:

(1) Sind  $X, Y \in \mathbb{C}$ , so gibt es genau ein  $g \in \mathbb{G}$  mit  $g \ni X, Y$ . Es ist  $g = \langle X, Y \rangle$ .



Zwei Geraden  $g = A + \mathbb{R}B$  und  $h = C + \mathbb{R}D$  mit  $A, C \in \mathbb{C}$  und  $B, D \in \mathbb{C}^*$  heißen **parallel**, in Zeichen:  $g \parallel h$ , wenn  $g = h \vee g \cap h = \emptyset$  gilt, andernfalls **nichtparallel**, in Zeichen:  $g \not\parallel h$ .

Man erhält:

(2)  $g \parallel h \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : B = \lambda D \Leftrightarrow \mathbb{R}B = \mathbb{R}D$ .

(3) Zu jedem  $X \in \mathbb{C}$  gibt es genau ein  $k \in \mathbb{G}$  mit  $k \ni X \wedge k \parallel g$ .

Man nennt  $k$  die **Parallele durch  $X$  zu  $g$**  und notiert  $k$  als  $(X \parallel g)$ .

(4) Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{G}$ . Zu  $g \in \mathbb{G}$  gehört die Äquivalenzklasse  $(g \parallel) := \{h \in \mathbb{G} \mid g \parallel h\}$ , genannt **Parallelbüschel in Richtung  $g$** .

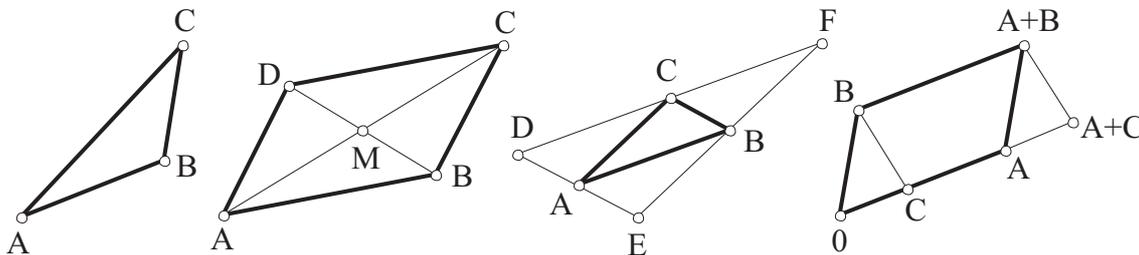
(5) Sind  $g, h \in \mathbb{G}$  mit  $g \not\parallel h$ , so ist  $|g \cap h| = 1$ . Wir sagen, zwei Geraden **schneiden sich**, wenn sie genau einen Punkt gemeinsam haben.

(6) Sind  $g, h, k \in \mathbb{G}$  mit  $g \parallel h$ , so ist  $(g \not\parallel k \Leftrightarrow h \not\parallel k)$ .

(1.11)  $A, B, C$  seien nichtkollineare Punkte von  $\mathbb{C}$ , also auch paarweise verschieden. Dann heißt  $\{A, B, C\}$  ein **Dreieck** und  $(A, B, C)$  ein **geordnetes Dreieck** mit den **Ecken**  $A, B, C$ . (Im zweiten Fall kommt es auf die Reihenfolge der Ecken an, im ersten nicht.)

Zu  $(A, B, C)$  gibt es genau ein  $D \in \mathbb{C}$  mit  $\{D\} = (A \parallel \langle B, C \rangle) \cap (C \parallel \langle B, A \rangle)$ . Man erhält

$D = A - B + C$  und nennt  $D$  den **4. Parallelogrammpunkt** zu  $(A, B, C)$ .



Ferner heißt  $(A, B, C, D)$  ein **Parallelogramm**, in Zeichen:  $\#(A, B, C, D)$ .

Es gilt hier  $\langle A, B \rangle \parallel \langle C, D \rangle$  und  $\langle B, C \rangle \parallel \langle D, A \rangle$ . Für  $M := \frac{A+C}{2}$  folgt  $M := \frac{B+D}{2}$ , d.h.

$M$  ist zugleich die Mitte von  $[A, C]$  und  $[B, D]$  und wird der **Diagonalschnittpunkt** oder die **Mitte** von  $(A, B, C, D)$  genannt.

<sup>1</sup>Das Symbol „ $\notin$ “ bedeute „paarweise verschiedene Elemente von“.

<sup>2</sup>Ist  $M$  eine Menge mit  $n$  Elementen für ein  $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ , also eine endliche Menge, so schreiben wir  $|M| = n$ . Ist  $M$  keine endliche Menge, so notieren wir dies als  $|M| = \infty$ .

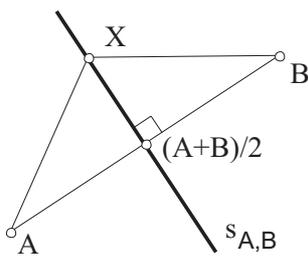
Zum Dreieck  $\{A, B, C\}$  lassen sich die Parallelogramme  $(A, B, C, D)$ ,  $(B, C, A, E)$ ,  $(C, A, B, F)$  mit  $D = A - B + C$ ,  $E = B - C + A$  und  $F = C - A + B$  konstruieren.

Weiter zeigt sich nun, daß die Addition von komplexen Zahlen nach den folgenden Regeln erfolgt:

Sind  $0, A, B$  nichtkollinear und ist  $C \in \langle 0, A \rangle$ , so sind

$(A, 0, B, A+B)$  und  $(A+B, B, C, A+C)$  Parallelogramme.

(1.12) Sind  $A, B \notin \mathbb{C}$ , so heißt die Punktmenge  $s_{A,B} := \{X \in \mathbb{C} \mid |A-X| = |X-B|\}$  die **Mittelsenkrechte** oder **Symmetrieachse** von  $A, B$ . Offenbar gilt  $s_{A,B} = s_{B,A}$  sowie



$A, B \notin s_{A,B}$  und  $\frac{A+B}{2} \in \langle A, B \rangle \cap s_{A,B}$ . Genauer erhalten wir:

(1) Für  $C \in \mathbb{C}$  und  $D \in \mathbb{C}^*$  gilt  $s_{C+iD, C-iD} = C + \mathbb{R}D$ .

(2) Es ist  $s_{A,B} = \frac{A+B}{2} + \mathbb{R}i(B-A) \in \mathbb{G}$ .

(3)  $\mathbb{G}$  ist die Menge aller Mittelsenkrechten.

*Beweis:* (1): Für  $X \in \mathbb{C}$  ist

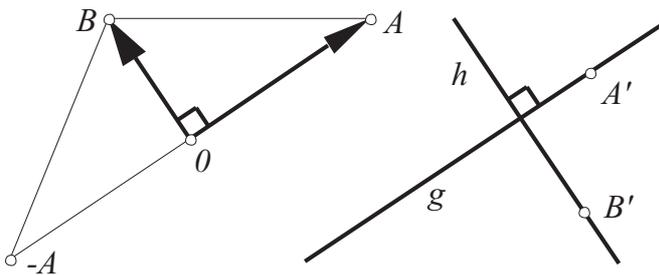
$$\begin{aligned} X \in s_{C+iD, C-iD} &\Leftrightarrow |X-(C+iD)|^2 = |X-(C-iD)|^2 \Leftrightarrow \stackrel{(1.3)f}{\Leftrightarrow} ((X-C)-iD) \cdot \overline{((X-C)+iD)} = \\ &= ((X-C)+iD) \cdot \overline{((X-C)-iD)} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (X-C) \cdot 2i\overline{D} = \overline{(X-C)} \cdot 2iD \Leftrightarrow (X-C)/D = \\ &= \overline{(X-C)}/\overline{D} \stackrel{(1.3)c}{\Leftrightarrow} (X-C)/D \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Leftrightarrow X \in C + \mathbb{R}D. \end{aligned}$$

(2), (3): Für  $C := \frac{1}{2}(A+B)$  und  $D := \frac{1}{2}i(B-A)$  ist  $C+iD = A$  und  $C-iD = B$ . Deshalb führt (1) auf (2), und aus (1), (2) folgt (3).  $\square$

(1.13) Zwei Ortsvektoren  $A, B \in \mathbb{C}$  heißen (im Punkt 0) **orthogonal**, in Zeichen:  $A \perp B$ , wenn  $d(-A, B) = d(A, B)$  ist.

Wir haben dann  $A \perp 0 \wedge 0 \perp B \quad \forall A, B \in \mathbb{C}$ , und im Falle  $A, B \in \mathbb{C}^*$  folgt

$$(*) \quad A \perp B \Leftrightarrow s_{-A,A} \ni B \stackrel{(1.12)(2)}{\Leftrightarrow} \mathbb{R}iA = \mathbb{R}B \Leftrightarrow \mathbb{R}A = \mathbb{R}iB \stackrel{(1.12)(2)}{\Leftrightarrow} A \in s_{-B,B} \Leftrightarrow B \perp A.$$



(1.14) Geraden  $g = A' + \mathbb{R}A$  und  $h = B' + \mathbb{R}B$  mit  $A', B' \in \mathbb{C} \cap A, B \in \mathbb{C}^*$  heißen **orthogonal** oder **senkrecht**, in Zeichen:  $g \perp h$ , wenn  $A \perp B$  gilt, wenn also ihre Richtungsvektoren orthogonal sind.

Nach (1.12) und (1.13) gilt

$$(1) \quad \langle A, B \rangle \perp s_{A,B} \quad \forall A, B \notin \mathbb{C}.$$

Weiter erhalten wir mit (1.9), (1.10) und (1.13) für  $g, h, k \in \mathbb{G}$ :

(2) Aus  $g \perp h$  folgt  $|g \cap h| = 1$  und  $h \perp g$ .

(3) Ist  $g \perp h$ , so gilt  $(k \perp g \Leftrightarrow k \parallel h)$ , d.h. die zu  $g$  senkrechten Geraden bilden ein sog. **Parallelbüschel**, das ist eine maximale Menge paarweise paralleler Geraden.

(4) Zu jedem  $X \in \mathbb{C}$  gibt es genau ein  $l \in \mathbb{G}$  mit  $l \ni X \wedge l \perp g$ . Man notiert  $l$  als  $(X \perp g)$  und nennt  $l$  das **Lot** von  $X$  auf  $g$ . Ist  $\{F\} = g \cap l$ , so wird  $F$  als der **Fußpunkt** des Lotes von  $X$  auf  $g$  bezeichnet.

## 2. BEWEGUNGEN DER ANSCHAUUNGSEBENE

In dem sehr lesenswerten Buch „5000 Jahre Geometrie“ von C. J. SCRIBA und P. SCHREIBER (ISBN 3-540-67924-3, Berlin 2000) findet sich auf Seite 300 die Bemerkung:

„Aus heutiger Sicht ist die[se] Verzahnung von geometrischen und algebraischen Methoden Voraussetzung und Kern einer leistungsfähigen Mathematik.“

Die vorangehenden Erörterungen dürfen als Ausgangspunkt einer solchen Verzahnung verstanden werden und sollen uns nun helfen, wichtige geometrische Abbildungen näher kennenzulernen.

### A. Grundeigenschaften ebener Bewegungen

(2.1) Gegeben seien Abbildungen  $\alpha_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\alpha_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$(1) \quad \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow [\alpha_1(X) = \alpha_2(X) \quad \forall X \in \mathbb{C}].$$

Ferner kann man die Abbildung  $\alpha_1 \circ \alpha_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \mathbb{X} \rightarrow \alpha_1(\alpha_2(X))$  betrachten. Man sagt,  $\alpha_1 \circ \alpha_2$  entsteht aus  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  durch **Verketteten** und liest  $\alpha_1 \circ \alpha_2$  als „ $\alpha_1$  nach  $\alpha_2$ “ oder als „ $\alpha_1$  Kreis  $\alpha_2$ “. Es gilt

$$(2) \quad \alpha_1 \circ \alpha_2(X) = \alpha_1(\alpha_2(X)) \quad \forall \mathbb{X} \in \mathbb{C},$$

d.h. auf  $X$  wird *zuerst*  $\alpha_2$  und *dann*  $\alpha_1$  angewendet. Das Verketteten ist *assoziativ*, denn sind  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  Abbildungen von  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ , so führt  $\alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ \alpha_3)(X) = \alpha_1((\alpha_2 \circ \alpha_3)(X)) = \alpha_1(\alpha_2(\alpha_3(X))) = (\alpha_1 \circ \alpha_2)(\alpha_3(X)) = (\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \alpha_3(X) \quad \forall \mathbb{X} \in \mathbb{C}$  mit (1) auf

$$(3) \quad \alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ \alpha_3) = (\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \alpha_3.$$

Die folgende Definition ist grundlegend für alles weitere:

Eine Abbildung  $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **distanztreu** oder **Bewegung**, wenn die Bedingung

$$(*) \quad |\alpha(X) - \alpha(Y)| = |X - Y| \quad \forall X, Y \in \mathbb{C} \text{ erfüllt ist.}$$

Ausgehend von dieser Festlegung zeigen wir

(2.2) **Satz.** Sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  Bewegungen, so ist auch  $\alpha_1 \circ \alpha_2$  eine Bewegung.

*Beweis:* Für  $X, Y \in \mathbb{C}$  ist  $|\alpha_1 \circ \alpha_2(X) - \alpha_1 \circ \alpha_2(Y)| = |\alpha_2(X) - \alpha_2(Y)| = |X - Y|$ .  $\square$

(2.3) **Satz.** Ist  $A \in \mathbb{E}$  und  $B \in \mathbb{C}$ , so ist die Abbildung  $\alpha_{A,B} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : X \rightarrow A \cdot X + B$

eine bijektive Bewegung, ebenso auch die Abbildung  $\alpha_{A,B}^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : Y \rightarrow \bar{A} \cdot (Y - B)$ .

Ist  $P \in \mathbb{C}$ ,  $Q \in \mathbb{C}^*$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$(1) \quad \alpha_{A,B}(P + \lambda \cdot Q) = \alpha_{A,B}(P) + \lambda \cdot A Q, \quad (2) \quad \alpha_{A,B}(P + \mathbb{R}Q) = \alpha_{A,B}(P) + \mathbb{R}A Q.$$

Durch  $\alpha_{A,B}$  werden Geraden, Strahlen, Strecken und Streckenmittelpunkte auf Objekte gleichen Typs abgebildet. Man nennt  $\alpha_{A,B}$  eine **gerade Bewegung von**  $\mathbb{C}$ . Es sei  $\mathbb{B}^+$  die Menge aller geraden Bewegungen von  $\mathbb{C}$ .

*Beweis:* Wegen  $A\bar{A} = |A|^2 = 1$  ist  $A(\bar{A}(Y - B)) + B = Y \wedge \bar{A}((AX + B) - B) = X \quad \forall Y, X \in \mathbb{C}$ , d.h.  $\alpha_{A,B}$  und  $\alpha_{A,B}^{-1}$  sind zueinander inverse Abbildungen. Ferner gilt

$|\alpha_{A,B}(X) - \alpha_{A,B}(Y)| = |A \cdot X - A \cdot Y| = |A| \cdot |X - Y| = |X - Y| \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}$ . Schließlich ist  $\alpha_{A,B}(P + \lambda Q) = A(P + \lambda Q) + B = (AP + B) + \lambda A Q$ , und damit folgt die Behauptung.  $\square$

**(2.4) Satz.** Ist  $A \in \mathbb{E}$  und  $B \in \mathbb{C}$ , so ist die Abbildung  $\boxed{\beta_{A,B} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : X \rightarrow A\bar{X} + B}$  eine bijektive Bewegung, ebenso auch die Abbildung  $\boxed{\beta_{A,B}^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : Y \rightarrow A \cdot (\bar{Y} - \bar{B})}$ . Ist  $P \in \mathbb{C}$ ,  $Q \in \mathbb{C}^*$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$(1) \boxed{\beta_{A,B}(P + \lambda \cdot Q) = \beta_{A,B}(P) + \lambda \cdot A\bar{Q}}, \quad (2) \boxed{\beta_{A,B}(P + \mathbb{R}Q) = \beta_{A,B}(P) + \mathbb{R}A\bar{Q}}.$$

Durch  $\beta_{A,B}$  werden Geraden, Strahlen, Strecken und Streckenmittelpunkte auf Objekte gleichen Typs abgebildet. Man nennt  $\beta_{A,B}$  eine **ungerade Bewegung** von  $\mathbb{C}$ . Es sei  $\mathbb{B}^-$  die Menge aller ungeraden Bewegungen von  $\mathbb{C}$ .

*Beweis:* Wegen  $A\bar{A} = |A|^2 = 1$  ist  $A(\bar{A}(Y - B)) + B = Y \wedge A((\bar{A}X + \bar{B}) - \bar{B}) = X \forall Y, X \in \mathbb{C}$ , d.h.  $\beta_{A,B}$  und  $\beta_{A,B}^{-1}$  sind zueinander inverse Abbildungen. Ferner gilt  $|\beta_{A,B}(X) - \beta_{A,B}(Y)| = |A\bar{X} - A\bar{Y}| = |A| \cdot |\bar{X} - \bar{Y}| = |X - Y| \forall X, Y \in \mathbb{C}$ . Schließlich ist  $\beta_{A,B}(P + \lambda Q) = A(\bar{P} + \lambda\bar{Q}) + B = (A\bar{P} + B) + \lambda A\bar{Q}$ , und damit folgt die Behauptung.  $\square$

**(2.5) Transitivitätssatz.** Sind  $R, S, U, V \in \mathbb{C}$  mit  $|R - S| = |U - V| \neq 0$ , so gibt es genau ein  $\alpha \in \mathbb{B}^+$  mit  $\alpha(R) = U \wedge \alpha(S) = V$  und genau ein  $\beta \in \mathbb{B}^-$  mit  $\beta(R) = U \wedge \beta(S) = V$ .

*Beweis:* Für  $A, B \in \mathbb{C}$  gilt  $(AR + B = U \wedge AS + B = V \Leftrightarrow A = (U - V)/(R - S) \wedge B = V - AS)$  und  $(A\bar{R} + B = U \wedge A\bar{S} + B = V \Leftrightarrow A = (U - V)/(\bar{R} - \bar{S}) \wedge B = V - A\bar{S})$ .  $\square$

Im weiteren benötigen wir

**(2.6) Lemma.** Sind  $X, Y \in \mathbb{C}$  mit  $|X| = |Y| \wedge |X - 1| = |Y - 1|$ , so ist  $Y \in \{X, \bar{X}\}$ .

*Beweis:* Gemäß (1.3) f) gilt  $X\bar{X} = Y\bar{Y} \wedge (X - 1) \cdot (\bar{X} - 1) = (Y - 1) \cdot (\bar{Y} - 1)$  und damit  $X\bar{X} = Y\bar{Y} \wedge \bar{Y} = X + \bar{X} - Y$ . Durch Einsetzen führt dies auf  $X\bar{X} = Y \cdot (X + \bar{X} - Y)$ , d.h. es ist  $0 = (Y - \bar{X}) \cdot (X - Y)$  und damit  $Y \in \{X, \bar{X}\}$ .  $\square$

Mit (2.3) – (2.6) erhalten wir

**(2.7) Satz.** Die Menge aller Bewegungen von  $\mathbb{C}$  ist  $\mathbb{B} := \mathbb{B}^+ \cup \mathbb{B}^-$ .

*Beweis:* Nach (2.3) und (2.4) ist jedes Element von  $\mathbb{B}$  eine Bewegung. Umgekehrt sei nun  $\gamma$  eine beliebige Bewegung von  $\mathbb{C}$ . Dann ist  $\gamma \in \mathbb{B}$  zu zeigen: Es gilt  $|\gamma(1) - \gamma(0)| = |1 - 0| = 1$ , und nach (2.5) gibt es eine Bewegung  $\alpha = \alpha_{A,B} \in \mathbb{B}^+$  mit  $\alpha(0) = \gamma(0) \wedge \alpha(1) = \gamma(1)$ . Nach (2.2) und (2.3) ist  $\alpha^{-1} \circ \gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : X \rightarrow X'$  nun eine Bewegung mit  $0' = 0 \wedge 1' = 1$ . Für  $X \in \mathbb{C}$  folgt dann  $|X'| = |X' - 0'| = |X - 0| = |X| \wedge |X' - 1| = |X' - 1'| = |X - 1|$ , also  $X' \in \{X, \bar{X}\}$  gemäß (2.6). Gäbe es jetzt  $U, V \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  mit  $U' = U \wedge V' = \bar{V}$ , so erhielten wir  $(U - V) \cdot (\bar{U} - \bar{V}) = |U - V|^2 = |U' - V'|^2 = |U - \bar{V}|^2 = (U - \bar{V}) \cdot (\bar{U} - V)$ , also  $\bar{U} \cdot (\bar{V} - V) = U \cdot (\bar{V} - V)$  und damit  $\bar{U} = U$  im Widerspruch zu  $U \notin \mathbb{R}$ . Mithin gilt entweder  $\alpha^{-1} \circ \gamma = \alpha_{1,0}$  oder  $\alpha^{-1} \circ \gamma = \beta_{1,0}$ , also  $\gamma = \alpha \in \mathbb{B}^+$  oder  $\gamma = \alpha \circ \beta_{1,0} \in \mathbb{B}^-$  gemäß (2.4).  $\square$

**(2.8) Corollar.** Die Bewegungen sind Parallelitätstreu und Orthogonalitätstreu, d.h. für  $\gamma \in \mathbb{B}$  und  $g, h \in \mathbb{G}$  gilt  $(g \parallel h \Rightarrow \gamma(g) \parallel \gamma(h)) \wedge (g \perp h \Rightarrow \gamma(g) \perp \gamma(h))$ .

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (2.7), (2.3)(2) und (2.4)(2). – Weiter folgt

**(2.9) Satz.** Mit dem Verketteten als Verknüpfung bilden die Bewegungen von  $\mathbb{C}$  eine Gruppe  $\mathbb{B}(\circ)$ . Die identische Abbildung  $id_{\mathbb{C}} = \alpha_{1,0}$  ist das neutrale Element von  $\mathbb{B}(\circ)$ , und  $\mathbb{B}^+$  ist eine Untergruppe von  $\mathbb{B}(\circ)$ . Es ist  $\mathbb{B}^+ \cap \mathbb{B}^- = \emptyset$ . Für  $A \in \mathbb{E}$  und  $B \in \mathbb{C}$  ergibt sich  $\alpha_{A,B} \circ \kappa = \beta_{A,B} = \kappa \circ \alpha_{\bar{A}, \bar{B}}$ , wobei  $\kappa = \beta_{1,0}$  die Konjugation ist, und für  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{B}^+$  und  $\beta, \beta' \in \mathbb{B}^-$  ist  $\alpha \circ \beta, \beta \circ \alpha \in \mathbb{B}^-$  sowie  $\alpha \circ \alpha', \beta \circ \beta' \in \mathbb{B}^+$ .

*Beweis:* Die erste Aussage gilt wegen (2.1) – (2.4) und (2.7). Für  $A, C \in \mathbb{E}$  und  $B, D, X \in \mathbb{C}$  folgt  $\alpha_{A,B} \circ \alpha_{C,D}(X) = A \cdot (CX + D) + B = AC \cdot X + (AD + B)$ , und mit (2.3) ist dann klar, daß  $\mathbb{B}^+$  eine Untergruppe von  $\mathbb{B}(\circ)$  ist. Offenbar gilt auch  $\alpha_{A,B} \circ \kappa = \beta_{A,B} = \kappa \circ \alpha_{\bar{A},\bar{B}}$  für  $A \in \mathbb{E} \wedge B \in \mathbb{C}$ , und wegen  $\kappa \circ \kappa = id_{\mathbb{C}}$  impliziert dies die letzte Aussage. Gäbe es  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{B}^+$  mit  $\alpha \circ \kappa = \alpha' \in \mathbb{B}^- \cap \mathbb{B}^+$ , so wäre  $\kappa = \alpha^{-1} \circ \alpha' \in \mathbb{B}^+$  mit  $\kappa(0) = id_{\mathbb{C}}(0) \wedge \kappa(1) = id_{\mathbb{C}}(1)$  im Widerspruch zu  $\kappa \neq id_{\mathbb{C}}$  und (2.5).  $\square$

(2.10) Punktmengen  $L, M$  von  $\mathbb{C}$  heißen **kongruent** bzw. **gleichsinnig kongruent** bzw. **gegensinnig kongruent**, wenn es ein  $\gamma \in \mathbb{B}$  bzw.  $\gamma \in \mathbb{B}^+$  bzw.  $\gamma \in \mathbb{B}^-$  gibt mit  $\gamma(L) = M$ .

Entsprechend werden  $n$ -tupel  $(A_1, \dots, A_n), (B_1, \dots, B_n)$  mit  $A_i, B_i \in \mathbb{C}$  für  $n \geq 2$  **kongruent** bzw. **gleichsinnig kongruent** bzw. **gegensinnig kongruent** genannt, wenn es ein  $\gamma \in \mathbb{B}$  bzw.  $\gamma \in \mathbb{B}^+$  bzw.  $\gamma \in \mathbb{B}^-$  gibt mit  $\gamma(A_i) = B_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Kongruenz und gleichsinnige Kongruenz besitzt die Grundeigenschaften einer Äquivalenzrelation, da  $\mathbb{B}$  und  $\mathbb{B}^+$  Gruppen sind.

Kongruenz ist die beste Beziehung, die zwischen verschiedenen Figuren bestehen kann, denn sie bedeutet „Übereinstimmung in allen Stücken“. Deshalb wird Kongruenz auch gern mit „Deckungsgleichheit“ übersetzt, da sich Bild und Urbild verzerrungsfrei aufeinander beziehen lassen.

(2.11) Es ist üblich, Bewegungen anhand dessen zu unterscheiden, was „festgelassen“ wird. Dazu definieren wir: Ist  $\gamma$  eine Bewegung von  $\mathbb{C}$ , so wird ein Punkt  $X$  als **Fixpunkt von  $\gamma$**  bezeichnet, wenn  $\gamma(X) = X$  ist.

Entsprechend wird eine Gerade  $g$  eine **Fixgerade von  $\gamma$**  genannt, wenn  $\gamma(g) = g$  ist, wenn also  $g$  „als Ganzes“ (nicht unbedingt elementweise) festbleibt.

*Beispiel:*  $\mathbb{R}$  ist Fixgerade der Bewegung  $\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : X \rightarrow X + 1$ , aber  $\tau$  hat keinen Fixpunkt.

Für jede Bewegung  $\gamma$  gilt:

- (1) Wenn ein Punkt  $Y$  der Schnittpunkt von zwei verschiedenen Fixgeraden  $g, h$  von  $\gamma$  ist, so ist  $\gamma(Y) \in \gamma(g) \cap \gamma(h) = g \cap h = \{Y\}$ , d.h. dann ist  $Y$  ein Fixpunkt von  $\gamma$ .
- (2) Wenn  $\gamma$  einen Fixpunkt  $X$  und eine Fixgerade  $g$  hat, dann sind auch  $(X \parallel g)$  und  $(X \perp g)$  Fixgeraden von  $\alpha$ . (Beweis: (1.10)(3), (1.14)(4), (2.8).)

(2.12) Sind  $\alpha, \gamma \in \mathbb{B}$  und ist  $\boxed{\alpha' = \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}}$ , so sagt man,  $\alpha'$  **entsteht aus  $\alpha$  durch Transformieren mit  $\gamma$** . Nach (2.9) gilt

- (1)  $(\alpha \in \mathbb{B}^+ \Leftrightarrow \alpha' \in \mathbb{B}^+) \wedge (\alpha \in \mathbb{B}^- \Leftrightarrow \alpha' \in \mathbb{B}^-)$ .

Als weitere wichtige Eigenschaft notieren wir für  $X \in \mathbb{C}$  und  $g \in \mathbb{G}$ :

- (2)  $X$  ist genau dann ein Fixpunkt von  $\alpha$ , wenn  $\gamma(X)$  ein Fixpunkt von  $\alpha'$  ist.
- (3)  $g$  ist genau dann eine Fixgerade von  $\alpha$ , wenn  $\gamma(g)$  eine Fixgerade von  $\alpha'$  ist.

*Beweis:* Für  $Y \in \mathbb{C} \cup \mathbb{G}$  ist  $\alpha(Y) = Y \Leftrightarrow \alpha'(\gamma(Y)) = \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1} \circ \gamma(Y) = \gamma(\alpha(Y)) = \gamma(Y)$ .  $\square$

## B. Translationen und Punktspiegelungen

(2.13) Ist  $A \in \mathbb{C}$ , so wird die gerade Bewegung  $\boxed{\tau_A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : X \rightarrow X + A}$  als eine **Translation** oder als eine **Verschiebung** von  $\mathbb{C}$  mit der **Länge**  $|\tau_A| := |A|$  bezeichnet.

Für  $A, B, X \in \mathbb{C}$  gilt  $\tau_A \circ \tau_B(X) = (X + B) + A = X + A + B = \tau_{A+B}(X)$ , also

$$(1) \quad \boxed{\tau_A \circ \tau_B = \tau_{A+B} = \tau_B \circ \tau_A}.$$

Insbesondere ist dann  $\tau_A \circ \tau_{-A} = \tau_{-A} \circ \tau_A = \boxed{\tau_0 = \text{id}_{\mathbb{C}}}$ , d.h.  $\tau_A$  ist eine Bijektion mit

$$(2) \quad \boxed{(\tau_A)^{-1} = \tau_{-A}}.$$

Dies bedeutet, daß die Menge  $\mathcal{T}$  aller Translationen von  $\mathbb{C}$  eine **abelsche Untergruppe** von  $(\mathbb{B}^+)(\circ)$  ist, die vermittelt  $A \rightarrow \tau_A$  isomorph zu  $\mathbb{C}(+)$  ist. Wir erhalten

$$(3) \quad \boxed{\tau_A(C + \mathbb{R}D) = \tau_A(C) + \mathbb{R}D \parallel C + \mathbb{R}D}$$
 für  $A, C \in \mathbb{C} \wedge D \in \mathbb{C}^*$ ,

d.h.  $\tau_A$  bildet jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade ab.

Für  $A, D \in \mathbb{C}^*$  und  $C \in \mathbb{C}$  ist  $(\tau_A(C) + \mathbb{R}D = C + \mathbb{R}D \Leftrightarrow \tau_A(C) \in C + \mathbb{R}D \Leftrightarrow A = \tau_A(C) - C \in \mathbb{R}D \Leftrightarrow \mathbb{R}A = \mathbb{R}D)$ , und mithin haben wir

$$(4) \quad \boxed{\tau_A(g) = g \Leftrightarrow g \parallel \mathbb{R}A}$$
 für  $g \in \mathbb{G}$  und  $A \in \mathbb{C}^*$ .

Ist  $\tau \in \mathcal{T} \setminus \{id_{\mathbb{C}}\}$  und ist  $g \in \mathbb{G}$  mit  $\tau(g) = g$ , so bezeichnet man das Parallelbüschel  $(g \parallel)$  wegen (4) als **die Richtung** von  $\tau$  und nennt  $\tau$  eine Translation **in Richtung**  $g$ .

Ist  $A \neq 0$ , so wird  $\tau_A$  als **echt** bezeichnet, und dann gilt  $\boxed{\tau_A(X) \neq X \quad \forall X \in \mathbb{C}}$ , d.h. dann hat  $\tau_A$  **keinen Fixpunkt**.

Wegen  $R + A = S \Leftrightarrow A = S - R$  für  $A, R, S \in \mathbb{C}$  erhalten wir

$$(5) \quad \text{Sind } R, S \in \mathbb{C}, \text{ so ist } \boxed{\tau_{R,S} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : X \rightarrow X + (S - R)}$$
 die einzige Translation, die  $R$  auf  $S$  abbildet.

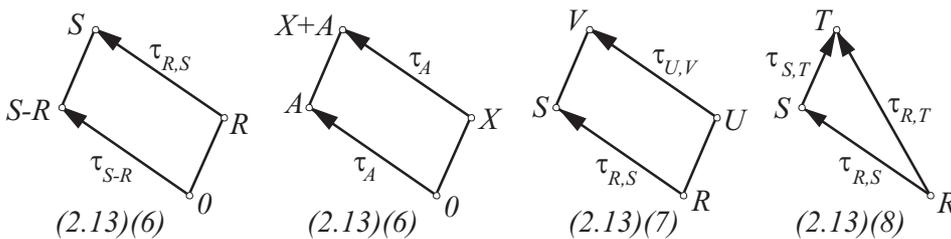
Damit folgt

$$(6) \quad \boxed{\tau_{R,S} = \tau_{S-R}} \wedge \boxed{\tau_{0,A} = \tau_A = \tau_{X,X+A}}$$
 für  $R, S, A, X \in \mathbb{C}$ ,

$$(7) \quad \boxed{\tau_{R,S} = \tau_{U,V} \Leftrightarrow S - R = V - U \Leftrightarrow S - R + U = V}$$
 für  $R, S, U, V \in \mathbb{C}$ ,

$$(8) \quad \boxed{\tau_{R,S} \circ \tau_{S,T} = \tau_{S,T} \circ \tau_{R,S} = \tau_{R,T}}$$
 für  $R, S, T \in \mathbb{C}$ .

(2.14) In Verbindung mit (1.11) führt (2.13)(6)–(8) auf die folgenden Figuren:



Hierbei wird die Anwendung einer Translation  $\tau_A$  auf einen Punkt  $X$  jeweils durch einen geradlinigen **Pfeil** von  $X$  nach  $\tau_A(X) = A + X =: Y$  veranschaulicht.

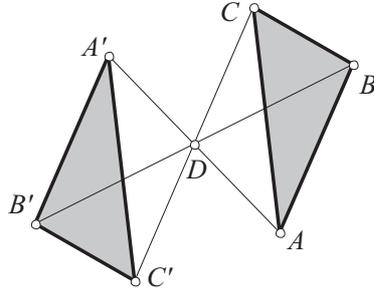
Dieser Pfeil ist durch das Paar  $(X, Y)$  mit  $X = \mathbf{Fu\ss} = \text{Anfang}$  und  $Y = \mathbf{Kopf} = \text{Spitze}$  festgelegt und wird deshalb mit dem Paar  $(X, Y)$  identifiziert, d.h.  $(X, Y)$  wird als **Pfeil von X nach Y** deklariert.

Zwei Pfeile  $(R, S)$ ,  $(U, V)$  heißen **parallelgleich**, wenn  $\boxed{S - R = V - U}$  und damit  $\tau_{R,S} = \tau_{U,V}$  ist, wenn sie also zur gleichen Translation gehören (vgl. (2.13)(7)).

Nach (1.11) sind  $(R, S)$ ,  $(U, V)$  im Falle  $R \neq S \wedge U \notin \langle R, S \rangle$  genau dann parallelgleich, wenn  $(S, R, U, V)$  ein *Parallelogramm* ist.

Die Figur zu (2.13)(8) zeigt, wie man das Verketteten von Translationen durch *Aneinanderhängen von Pfeilen* veranschaulichen kann.

(2.15) Ist  $D \in \mathbb{C}$ , so wird die gerade Bewegung  $\boxed{\tilde{D} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : X \rightarrow -X + 2D}$  als die **180°-Drehung um  $D$**  und zugleich als die **Punktspiegelung an  $D$**  bezeichnet.



Wegen  $(\tilde{D}(X) = X \Leftrightarrow X = D)$  ist  $D$  der *einzigste Fixpunkt* von  $\tilde{D}$ , und wegen  $\frac{1}{2}(X + \tilde{D}(X)) = D$  ist  $D$  bzgl.  $\tilde{D}$  die *Mitte zwischen Bild und Urbild* für jedes  $X \in \mathbb{C}$ . Dies bedeutet, daß *alle Geraden durch  $D$  Fixgeraden* von  $\tilde{D}$  sind. Damit folgt aber, daß jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade abgebildet wird (vgl. (2.8)) und daß nur die Geraden durch  $D$  bei  $\tilde{D}$  festbleiben, denn gäbe es weitere Fixgeraden, so gäbe es auch weitere Fixpunkte. Man verifiziert sofort

$$(1) \quad \boxed{\tilde{D} \circ \tilde{D} = \text{id}_{\mathbb{C}} \wedge \tilde{D} = \tilde{D}^{-1}}.$$

Wir setzen  $\tilde{\mathbb{C}} := \{ \tilde{X} \mid X \in \mathbb{C} \}$ . Für  $A, B, C \in \mathbb{C}$  erhalten wir dann

- (2)  $\tilde{A} \circ \tilde{B} \circ \tilde{C} = (A - B + C)^\sim = \tilde{C} \circ \tilde{B} \circ \tilde{A}$ ,
- (3)  $\tilde{A} \circ \tilde{B} = \tau_{2 \cdot (A-B)} \wedge \tilde{A} \circ \tau_{2 \cdot (A-B)} = \tilde{B} \wedge \tau_{2 \cdot (A-B)} \circ \tilde{B} = \tilde{A} \wedge \tau_{2A} = \tilde{A} \circ \tilde{0}$ ,
- (4)  $\tilde{A} \circ \tilde{B} = \tilde{B} \circ \tilde{A} \Leftrightarrow A = B$ ,
- (5)  $(\tilde{\mathbb{C}} \cup \mathcal{T})$  ist eine nichtkommutative Untergruppe von  $\mathbb{B}^+$ .

Zum *Beweis* vergleiche man die Übungen.

### C. Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen

(2.16) Wir legen fest:

- (1) Eine Bewegung  $\delta$  wird **Drehung um den Punkt  $D$**  oder **mit dem Drehzentrum  $D$**  genannt, wenn  $D$  der einzige Fixpunkt von  $\delta$  ist, oder wenn  $\delta = \text{id}_{\mathbb{C}}$  ist. Eine Drehung heißt **echt**, wenn sie von der identischen Abbildung  $\text{id}_{\mathbb{C}}$  verschieden ist.
- (2) Eine Bewegung  $\sigma$  heißt **Spiegelung an der Geraden  $g$**  mit  $a_\sigma := g$  als **Achse**, wenn  $g$  die Menge aller Fixpunkte von  $\sigma$  ist.
- (3) Eine Bewegung heißt **Gleitspiegelung**, wenn sie weder Translation noch Drehung noch Spiegelung ist.

Mit (1)–(3) erhalten wir eine übersichtliche Einteilung der Bewegungen. Im Detail gilt:

(2.17) **Satz.** Sind  $C, D \in \mathbb{C}$  mit  $D \neq 0$ , so existiert zur Geraden  $g = C + \mathbb{R}D$  genau eine Spiegelung  $\tilde{g}$  mit der Fixpunktmenge  $g$ . Es gilt:

- (1)  $\boxed{\tilde{g} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : X \rightarrow \frac{D}{\bar{D}}(\bar{X} - \bar{C}) + C}$ .
- (2)  $\tilde{g} = \tilde{g}^{-1} \wedge \tilde{g} \circ \tilde{g} = \text{id}_{\mathbb{C}}$ .
- (3)  $g = s_{X, \tilde{g}(X)} \quad \forall X \in \mathbb{C} \setminus g$ .
- (4)  $R, S \in \mathbb{C} \wedge R \neq S \wedge g = s_{R,S} \Rightarrow S = \tilde{g}(R)$ .
- (5)  $\tilde{g}(h) = h \Leftrightarrow h = g \vee h \perp g \quad \forall h \in \mathbb{G}$ .
- (6)  $\widetilde{\alpha(g)} = \alpha \circ \tilde{g} \circ \alpha^{-1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{B}$ .

*Beweis:*  $\tilde{g}$  sei durch (1) definiert. Wegen  $|D/\overline{D}| = 1$  ist  $\tilde{g} \in \mathbb{B}^-$ . a) Nach (2.5) gibt es ein  $\gamma \in \mathbb{B}^+$  mit  $\gamma(0) = C \wedge \gamma(|D|) = C+D$ . Es folgt  $\gamma(\mathbb{R}) = g$  und  $\kappa' := \gamma \circ \kappa \circ \gamma^{-1} \in \mathbb{B}^-$ . Da  $\kappa$  die Fixpunktmenge  $\mathbb{R}$  hat, hat  $\kappa'$  nach (2.12)(2) die Fixpunktmenge  $g$ . Aus (1) folgt durch Einsetzen, daß  $\tilde{g}$  die Punkte  $C$  und  $C+D$  festläßt, und dies gilt dann auch für  $\tilde{g}^{-1}$ . Nach (2.5) ist  $\tilde{g}$  das einzige Element von  $\mathbb{B}^-$  mit dieser Eigenschaft, und folglich ist  $\tilde{g} = \kappa' = \tilde{g}^{-1}$ .

b) Aus a) folgt (2), und (3) gilt, weil  $[|X-U| = |\tilde{g}(X)-\tilde{g}(U)| = |\tilde{g}(X)-U| \quad \forall U \in g]$  auf  $g \subseteq s_{X, \tilde{g}(X)} \quad \forall X \in \mathbb{C} \setminus g$  führt (vgl. (1.12)).

c) Sind  $R, S \in \mathbb{C}$  mit  $R \neq S$  und ist  $g = s_{R,S}$ , so gilt  $g = \frac{1}{2}(R+S) + \mathbb{R}i(R-S)$  gemäß (1.12), und mit  $\tilde{g}(R) = -\frac{R-S}{\overline{R-S}}(\overline{R}-\frac{\overline{R+S}}{2}) + \frac{R+S}{2} = -\frac{R-S}{2} + \frac{R+S}{2} = S$  folgt (4).

d) Es gilt  $\tilde{g}(g) = g$ . Da  $\tilde{g}$  orthogonalitätstreu ist, ergibt sich  $\tilde{g}(U + \mathbb{R}iD) = \tilde{g}(U) + \mathbb{R}iD = U + \mathbb{R}iD \quad \forall U \in g$ , also  $\tilde{g}(h) = h$  für  $h \in \mathbb{G}$  mit  $h \perp g$ . Hätte  $\tilde{g}$  noch weitere Fixgeraden, so hätte  $\tilde{g}$  nach (2.11)(1) auch weitere Fixpunkte. Damit ist (5) gezeigt.

e) Es seien  $U, V \in g$  mit  $U \neq V$ . Da  $\widetilde{\alpha(g)}$  und  $\alpha \circ \tilde{g} \circ \alpha^{-1}$  nach (2.9) Elemente von  $\mathbb{B}^-$  sind, die  $\alpha(U)$  und  $\alpha(V)$  festlassen, ist (6) gemäß (2.5) gültig.  $\square$

**(2.18) Corollar 1.** *Ist  $\alpha \in \mathbb{B}^-$  und besitzt  $\alpha$  (wenigstens) einen Fixpunkt, so ist  $\alpha$  eine Spiegelung.*

*Beweis:* Es sei  $A \in \mathbb{C}$  mit  $\alpha(A) = A$ . Wegen  $\alpha \in \mathbb{B}^-$  gibt es ein  $B \in \mathbb{C}$  mit  $\alpha(B) \neq B$ . Hierbei ist  $|B-A| = |\alpha(B)-A|$ , also  $A \in g := s_{B, \alpha(B)}$ . Mit (2.17)(4) folgt  $\tilde{g}(B) = \alpha(B)$ , und dann führt  $\tilde{g}(A) = A = \alpha(A)$  mit (2.5) auf  $\tilde{g} = \alpha$ .  $\square$

**(2.19) Corollar 2.** *Jede gerade Bewegung ist entweder echte Drehung oder Translation. Jede ungerade Bewegung ist entweder Spiegelung oder Gleitspiegelung.*

*Beweis:* Ist  $\alpha = \alpha_{A,B} \in \mathbb{B}^+$  mit  $A \in \mathbb{E}$  und  $B \in \mathbb{C}$  (vgl. (2.3)), so gilt  $[\alpha \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A=1]$ . Ist  $\boxed{A \neq 1}$  und ist  $D \in \mathbb{C}$ , so ist  $[\alpha(D) = D \Leftrightarrow (1-A)D = B \Leftrightarrow D = B/(1-A)]$ , d.h.  $\alpha$  ist eine echte Drehung um  $D$ , und es folgt  $\boxed{\alpha(X) = A \cdot (X-D) + D \quad \forall X \in \mathbb{C}}$ . Zusammen mit (2.18) führt dies auf die Behauptung.  $\square$

**(2.20) Corollar 3.** *Jede gerade Bewegung ist ein Produkt von zwei Spiegelungen.*

*Jede ungerade Bewegung ist ein Produkt von drei Spiegelungen.*

*(Dies erklärt die Bezeichnungen „gerade“ und „ungerade“.)*

*Beweis:* a) Ist  $\delta \in \mathbb{B}^+$ , so gibt es nach (2.17) ein  $g \in \mathbb{G}$  mit  $\tilde{g}(\delta(0)) = 0$ . Nun ist  $\tilde{g} \circ \delta \in \mathbb{B}^-$  mit Fixpunkt 0, und nach (2.18) ist dann  $\tilde{g} \circ \delta = \tilde{h}$  für ein  $h \in \mathbb{G}$ , also  $\delta = \tilde{g} \circ \tilde{h}$ .

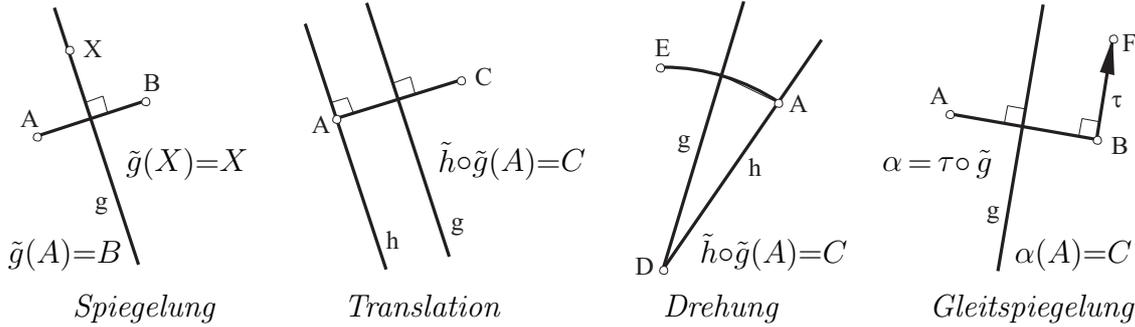
b) Ist  $\alpha \in \mathbb{B}^-$ , so ist  $\kappa \circ \alpha \in \mathbb{B}^+$ , also  $\kappa \circ \alpha \stackrel{a)}{=} \tilde{a} \circ \tilde{b}$  und  $\alpha = \kappa \circ \tilde{a} \circ \tilde{b}$  mit  $a, b \in \mathbb{G}$ .  $\square$

**(2.21) Satz.** *Sind  $g, h \in \mathbb{G}$  mit  $h \parallel g$ , so ist  $\tilde{h} \circ \tilde{g}$  eine Translation. Genauer*

*führt  $h \parallel g$  auf  $\tilde{h} \circ \tilde{g} = \tau_{2(B-A)} = \tilde{B} \circ \tilde{A}$  für  $A \in g$  und  $B \in (A \perp g) \cap h$ .*

*Sind  $g, h \in \mathbb{G}$  und gibt es ein  $D \in g \cap h$ , so ist  $\tilde{h} \circ \tilde{g}$  eine Drehung um  $D$ .*

*Beweis:* Ist  $g = A + \mathbb{R}E$  und  $h = B + \mathbb{R}E$  mit  $A, B \in \mathbb{C} \wedge E = i \cdot (A - B)$ , so ist  $\tilde{h} \circ \tilde{g}(X) = \frac{E}{E} \left( \left[ \frac{E}{E}(\overline{X-A}) + A \right] - \overline{B} \right) + B = X - A + B + \frac{E}{E}(\overline{A-B}) = X + 2(B-A) \quad \forall X \in \mathbb{C}$ , also  $\tilde{h} \circ \tilde{g} = \tau_{2(B-A)} = \tilde{B} \circ \tilde{A}$ . Wenn es ein  $D \in g \cap h$  gibt, ist  $\tilde{h} \circ \tilde{g}(D) = D$ .  $\square$



(2.22) **Satz.** Ist  $\psi$  eine Gleitspiegelung, so gibt es genau eine Gerade  $g$  und genau eine Translation  $\tau \neq id_{\mathbb{C}}$  mit  $\psi = \tilde{g} \circ \tau = \tau \circ \tilde{g} \wedge \tau(g) = g \wedge \psi \circ \psi = \tau \circ \tau$ .

Man nennt  $a_{\psi} := g$  die **Achse** und  $\tau_{\psi} := \tau$  den **Schub** von  $\psi$ .

Die Achse  $g$  von  $\psi$  ist die einzige Fixgerade von  $\psi$ .

Überdies ist  $g$  die Menge aller Mitten zwischen Bild und Urbild bzgl.  $\psi$ .

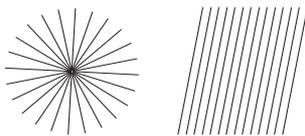
*Beweis:* Es sei  $\psi(X) = A\bar{X} + B \quad \forall X \in \mathbb{C}$  mit  $A \in \mathbb{E}$  und  $B \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $\psi \circ \psi(X) = A(A\bar{X} + B) + B = X + A\bar{B} + B \quad \forall X \in \mathbb{C}$ , also  $\psi \circ \psi = \tau \circ \tau$  für  $\tau := \tau_{(A\bar{B}+B)/2}$ . Es folgt  $\tau^{-1} \circ \psi(B/2) = A(\bar{B}/2) + B - (A\bar{B} + B)/2 = B/2$ , und nach (2.18) gibt es dann ein  $g \in \mathbb{G}$  mit  $\tau^{-1} \circ \psi = \tilde{g}$ , also mit  $\psi = \tau \circ \tilde{g}$  und mit  $\psi^{-1} \circ \tau = \tilde{g}^{-1} = \tilde{g}$ . Dies impliziert  $\psi = \psi^{-1} \circ (\psi \circ \psi) = \psi^{-1} \circ \tau \circ \tau = \tilde{g} \circ \tau$  und damit  $\tau \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tau$ , also  $\tilde{g} = \tau \circ \tilde{g} \circ \tau^{-1} \stackrel{(2.17)(6)}{=} \widetilde{\tau(g)}$  und  $g = \tau(g)$ . Wegen  $\tau \circ \tau = \psi \circ \psi$  ist  $\tau$  durch  $\psi$  festgelegt, damit aber auch  $g$  wegen  $\tilde{g} = \tau^{-1} \circ \psi$ . Wäre  $\tau = id_{\mathbb{C}}$ , so wäre  $\psi$  eine Spiegelung.

Hätte  $\psi$  eine Fixgerade  $h \neq g$ , so wäre  $h \cap g = \emptyset$ , denn sonst hätte  $\psi$  einen Fixpunkt. Damit ergäbe sich aber  $\tilde{g}(h) = \tilde{g}(\tau(h)) = \psi(h) = h$  im Widerspruch zu (2.17)(5).

Für  $C := \tau(0)$ ,  $X \in \mathbb{C}$  und  $Y := \tilde{g}(X)$  führt (2.17) auf  $M := (X+Y)/2 \in g$ , und wegen  $\tau(g) = g$  folgt  $g = M + \mathbb{R}C$  und  $[X + \psi(X)]/2 = (X+Y+C)/2 = M+C/2 \in g$ . Für  $U \in g$  ergibt sich  $U = [(U-C/2) + \psi(U-C/2)]/2$ , und damit ist alles gezeigt.  $\square$

### D. Verketteten und Transformieren von Bewegungen

Für unsere späteren Untersuchungen benötigen wir sehr genaue Kenntnisse über das Verketteten und das Transformieren von Bewegungen. Zunächst legen wir fest:



(2.23) Wir sagen, Geraden von  $\mathbb{C}$  **liegen im Büschel**, wenn sie einen gemeinsamen Punkt besitzen, oder wenn sie paarweise parallel sind.

Mit dieser Redeweise folgt

(2.24) **Dreispiegelungssatz.** Für  $g, h, k \in \mathbb{G}$  gilt:

- (1) Liegen  $g, h, k$  im Büschel, so ist  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$  eine Spiegelung.
- (2) Ist  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k} = \tilde{m}$  mit  $m \in \mathbb{G}$ , so ist  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k} = \tilde{k} \circ \tilde{h} \circ \tilde{g}$ , und  $g, h, k, m$  liegen im Büschel

*Beweis:* a) Gibt es ein  $D \in g \cap h \cap k$ , so ist  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$  nach (2.18) wegen  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}(D) = D$  eine Spiegelung.

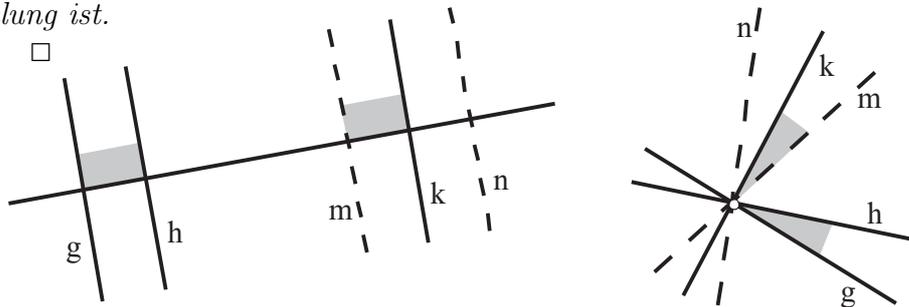
b) Ist  $g \parallel h \parallel k$ , so sind  $\tau := \tilde{g} \circ \tilde{h}$  und  $\sigma := \tilde{h} \circ \tilde{k}$  nach (2.21) Translationen, und für  $X \in k$  und  $Y := \tau(X)$  folgt  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}(X) = Y$  sowie  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}(Y) = \tilde{g} \circ \sigma \circ \tau(X) \stackrel{(2.13)(1)}{=} \tilde{g} \circ \tau \circ \sigma(X) = \tilde{g} \circ \tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}(X) = X$ . Demnach vertauscht  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$  die Punkte  $X, Y$  und hat deren Mitte  $\frac{1}{2}(X+Y)$  gemäß (2.4) als Fixpunkt. Nach (2.18) ist  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$  dann eine Spiegelung. c) Aus a) und b) folgt (1).

d) Es sei  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k} = \tilde{m}$  vorausgesetzt. Dann gilt  $\tilde{k} \circ \tilde{h} \circ \tilde{g} = \tilde{m}^{-1} = \tilde{m} = \tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$  sowie  $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{m} \circ \tilde{k} \wedge \tilde{g} \circ \tilde{m} = \tilde{h} \circ \tilde{k}$ . Ist nun  $g \cap h = \{D\}$  mit  $D \in \mathbb{C}$ , so ist  $D$  der einzige Fixpunkt von  $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{m} \circ \tilde{k}$ , und mit (2.21) folgt  $D \in g \cap h \cap k \cap m$ , also (2).

Analog ergibt sich (2) im Falle  $m \nparallel g \vee h \nparallel k$ , und andernfalls gilt  $g \parallel h \parallel k \parallel m$ .  $\square$

**(2.25) Corollar 1.** Geraden  $g, h, k$  von  $\mathbb{C}$  liegen genau dann im Büschel, wenn  $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$  eine Spiegelung ist.

Beweis: (2.24).  $\square$



**(2.26) Corollar 2.** Sind  $g, h \in \mathbb{G}$  fest vorgegeben und ist  $k$  eine beliebige Gerade, die mit  $g$  und  $h$  im Büschel liegt, so gibt es genau eine Gerade  $m$  mit  $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{m} \circ \tilde{k}$  und genau eine Gerade  $n$  mit  $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{k} \circ \tilde{n}$ , und die Geraden  $g, h, k, m, n$  liegen im Büschel. Demnach kann man bei der Darstellung der geraden Bewegung  $\alpha = \tilde{g} \circ \tilde{h}$  durch Spiegelungen **eine der beiden Spiegelachsen frei vorgeben.**

Beweis: Nach (2.17) und (2.24) sind  $m$  und  $n$  durch  $\tilde{m} = \tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$  und  $\tilde{n} = \tilde{k} \circ \tilde{g} \circ \tilde{h}$  festgelegt und liegen mit  $g, h, k$  im Büschel.  $\square$

Als wichtige Aussage über Drehungen zeigen wir

**(2.27) Satz.** Für jedes  $D \in \mathbb{C}$  bilden die Drehungen um  $D$  eine abelsche Gruppe

$$\text{Dreh}(D)(\circ). \text{ Es ist } \text{Dreh}(D) = \{\delta_{D,\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ mit } \boxed{\delta_{D,\alpha}(X) = e^{i\alpha} \cdot (X-D) + D}$$

$$\forall X \in \mathbb{C}. \text{ Für } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ gilt } \boxed{\delta_{D,\alpha} \circ \delta_{D,\beta} = \delta_{D,\alpha+\beta}}. \text{ Die reelle Zahl } \alpha \text{ wird „der“}$$

$$\text{Drehwinkel von } \delta_{D,\alpha} \text{ genannt. Für } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ist } \boxed{\delta_{D,\alpha} = \delta_{D,\beta} \Leftrightarrow \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}}.$$

Für  $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$  ist  $\delta_{D,\alpha} = id_{\mathbb{C}}$ , und für  $\alpha \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$  ist  $\delta_{D,\alpha}$  die Punktspiegelung  $\tilde{D}$ .

Beweis: Wegen  $\delta_{D,\alpha}(D) = D$  und wegen (2.3) und (2.19) (mit Beweis) besteht  $\text{Dreh}(D)$  genau aus den angegebenen Abbildungen. Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  folgt  $\delta_{D,\alpha} \circ \delta_{D,\beta} \stackrel{(1.7)}{=} \delta_{D,\alpha+\beta}$ , also auch  $\delta_{D,\beta} \circ \delta_{D,\alpha} = \delta_{D,\alpha+\beta}$ . Damit ist klar, daß  $\text{Dreh}(D)(\circ)$  eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element  $id_{\mathbb{C}} = \delta_{D,0}$  und der Inversenbildung  $\delta_{D,\alpha}^{-1} = \delta_{D,-\alpha}$  ist. Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $[\delta_{D,\alpha} = \delta_{D,\beta} \stackrel{(2.5)}{\Leftrightarrow} \delta_{D,\alpha}(D+1) = \delta_{D,\beta}(D+1) \Leftrightarrow e^{i\alpha} = e^{i\beta} \stackrel{(1.7)}{\Leftrightarrow} \alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}]$ . Demnach ist  $\delta_{D,0} = \delta_{D,2\pi m}$  und  $\delta_{D,\pi+2\pi m}(X) = \delta_{D,\pi}(X) = -(X-D) + D \quad \forall X \in \mathbb{C}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

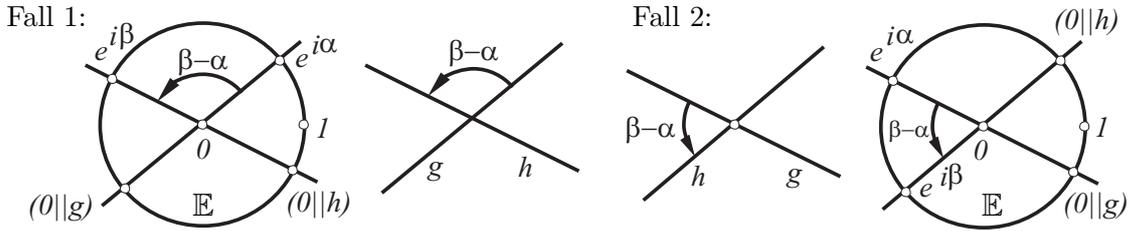
**(2.28)** Sind Winkelgrößen im *Bogenmaß* gegeben, so kann man diese nach der Formel

$\boxed{x^\circ = x \cdot \pi / 180}$  in das **Gradmaß** umrechnen. Demnach ist  $0^\circ = 0, 60^\circ = \pi/3, 90^\circ = \pi/2, 180^\circ = \pi, 360^\circ = 2\pi$ . Man bezeichnet die Drehung  $\delta_{D,\alpha^\circ}$  auch als  $\alpha^\circ$ -**Drehung** um  $D$ .

Es sei  $r \in \mathbb{R}^*$  und  $r\mathbb{Z} := \{r \cdot m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ . Für  $x, y \in \mathbb{R}$  wird die Aussage  $x - y \in r\mathbb{Z}$  auch in der Form  $x \equiv_r y$  notiert, und man sagt dann, „ $x$  ist  $r$ -kongruent zu  $y$ “ oder „ $x$  ist modulo  $r$  kongruent zu  $y$ “ oder „ $x$  stimmt mit  $y$  bis auf ganzzahlige Vielfache von  $r$  überein“. Man bestätigt sofort, daß  $\equiv_r$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}$  ist.

Nach (2.27) sind die Drehungen  $\delta_{D,\alpha}$  und  $\delta_{D,\beta}$  genau dann gleich, wenn  $\alpha$  und  $\beta$  modulo  $2\pi$  kongruent und damit modulo  $360^\circ$  kongruent sind.

(2.29) Sind  $g, h \in \mathbb{G}$ , so gibt es genau ein  $\alpha \in [0, \pi[$  mit  $e^{i\alpha} \in (0 \parallel g) \cap \mathbb{E}$  und genau ein  $\beta \in [\alpha, \alpha + \pi[$  mit  $e^{i\beta} \in (0 \parallel h) \cap \mathbb{E}$ . Wir bezeichnen  $\sphericalangle(g, h) := \beta - \alpha$  als die **Größe** des  $\mathbb{G}$ -Winkels  $(g, h)$ . Offenbar ist  $\sphericalangle(g, h) \in [0, \pi[$ . Wir erhalten



(2.30) Satz. Sind  $g, h \in \mathbb{G}$ , so gilt:

- (1)  $[g \parallel h \Leftrightarrow \sphericalangle(g, h) = 0^\circ] \wedge [g \perp h \Leftrightarrow \sphericalangle(g, h) = 90^\circ]$ .
- (2) Ist  $D \in g \cap h$  und ist  $\gamma = \sphericalangle(g, h)$ , so ist  $\delta_{D,\gamma}(g) = h$  und  $\delta_{D,2\gamma} = \tilde{h} \circ \tilde{g}$ , d.h. der Drehwinkel von  $\tilde{h} \circ \tilde{g}$  ist **doppelt so groß** wie  $\sphericalangle(g, h)$  (vgl. die 3. Figur vor (2.22)).

*Beweis:* Mit den Bezeichnungen aus (2.29) folgt  $[g \parallel h \Leftrightarrow e^{i\alpha} = e^{i\beta} \Leftrightarrow \alpha = \beta]$  und  $[g \perp h \stackrel{(1.13)^*}{\Leftrightarrow} i \cdot e^{i\alpha} = e^{i\beta} \Leftrightarrow e^{i(\alpha+\pi/2)} = e^{i\beta} \Leftrightarrow \alpha + \pi/2 = \beta]$ , also (1). Nun sei  $\gamma = \beta - \alpha$ . Wegen  $g = D + \mathbb{R}e^{i\alpha}$  und  $h = D + \mathbb{R}e^{i\beta}$  und  $\delta_{D,\gamma}(D + e^{i\alpha}) = e^{i\gamma} \cdot e^{i\alpha} + D \in h$  folgt  $\delta_{D,\gamma}(g) = h$ . Ferner ist  $\tilde{h} \circ \tilde{g}(D + 1) = \tilde{h}(e^{i2\alpha} + D) = e^{i2(\beta-\alpha)} + D = e^{i2\gamma}((D+1) - D) + D = \delta_{D,2\gamma}(D + 1)$ , und dies führt mit (2.5) auf die Behauptung.  $\square$

(2.31) Die Größe des  $\mathbb{G}$ -Winkels  $(g, h)$  wird gemäß (2.30) nach der folgenden Regel bestimmt: Man dreht den 1. Schenkel  $g$  von  $(g, h)$  mathematisch positiv in den 2. Schenkel  $h$  von  $(g, h)$  und mißt den entstehenden Drehwinkel. Im Detail erhalten wir

(2.32) Satz. Für  $g, h, k, l \in \mathbb{G}$  und  $D \in \mathbb{C}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

- (1)  $g \parallel k \wedge h \parallel l \Rightarrow \sphericalangle(g, h) = \sphericalangle(k, l)$ .
- (2)  $D \in g \cap h \cap k \cap l \Rightarrow [\sphericalangle(g, h) = \sphericalangle(k, l) \Leftrightarrow \tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{k} \circ \tilde{l}]$ .
- (3)  $\sphericalangle(g, h) = \sphericalangle(k, l) \Leftrightarrow \sphericalangle(h, g) = \sphericalangle(l, k) \Leftrightarrow \sphericalangle(g, k) = \sphericalangle(h, l)$ .
- (4)  $\sphericalangle(g, h) + \sphericalangle(h, k) \equiv_\pi \sphericalangle(g, k)$ .
- (5)  $g \nparallel h \Rightarrow \sphericalangle(g, h) = \pi - \sphericalangle(h, g)$ .
- (6)  $[\varphi \in \mathbb{B}^+ \Rightarrow \sphericalangle(\varphi(g), \varphi(h)) = \sphericalangle(g, h)] \wedge [\psi \in \mathbb{B}^- \Rightarrow \sphericalangle(\psi(g), \psi(h)) = \sphericalangle(h, g)]$ .
- (7)  $[\psi \in \mathbb{B}^- \wedge \psi(g) = g \Rightarrow \sphericalangle(k, g) = \sphericalangle(g, \psi(k))]$ .
- (8)  $\sphericalangle(g, \delta_{D,\alpha}(g)) \equiv_\pi \alpha$ .
- (9)  $\alpha \notin \pi\mathbb{Z} \Rightarrow g \nparallel \delta_{D,\alpha}(g)$ .

*Beweis:* Wegen  $[g \parallel k \wedge h \parallel l \Rightarrow (g \parallel 0) = (k \parallel 0) \wedge (h \parallel 0) = (l \parallel 0)]$  führt die Definition von  $\sphericalangle$  auf (1). Damit dürfen wir im weiteren o.B.d.A. von  $D \in g \cap h \cap k \cap l$  ausgehen. Für  $\sphericalangle(g, h) =: \beta$  und  $\sphericalangle(k, l) =: \gamma$  folgt  $[\beta = \gamma \Leftrightarrow 2\beta = 2\gamma \Leftrightarrow \delta_{D,2\beta} = \delta_{D,2\gamma} \stackrel{(2.30)}{\Leftrightarrow} \tilde{h} \circ \tilde{g} = \tilde{l} \circ \tilde{k} \Leftrightarrow \tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{k} \circ \tilde{l}]$ , also (2), und

wegen  $[\tilde{g}\tilde{o}\tilde{h} = \tilde{k}\tilde{o}\tilde{l} \Leftrightarrow \tilde{h}\tilde{o}\tilde{g} = \tilde{l}\tilde{o}\tilde{k} \Leftrightarrow \tilde{g}\tilde{o}\tilde{k} = \tilde{h}\tilde{o}\tilde{l}]$  führt (2) auf (3). Ist  $\sphericalangle(h, k) := \varepsilon$  und  $\sphericalangle(g, k) := \varrho$ , so ist  $\delta_{D, 2(\beta+\varepsilon)} \stackrel{(2.27)}{=} \delta_{D, 2\varepsilon} \circ \delta_{D, 2\beta} \stackrel{(2.30)}{=} \tilde{k}\tilde{o}\tilde{h} \circ \tilde{h}\tilde{o}\tilde{g} = \tilde{k}\tilde{o}\tilde{g} \stackrel{(2.30)}{=} \delta_{D, 2\varrho}$ , also  $2(\beta + \varepsilon) \stackrel{(2.27)}{\equiv_{2\pi}} 2\varrho$  und damit  $\beta + \varepsilon \equiv_{\pi} \varrho$ . Dies impliziert (4), und speziell für  $k = g \nparallel h$  ergibt sich  $\beta + \varepsilon \equiv_{\pi} 0$  mit  $0 < \beta + \varepsilon < 2\pi$ , also  $\beta + \varepsilon = \pi$  und damit (5).

Nun seien  $a, b, c \in \mathbb{G}$ . Wegen  $\widetilde{\tilde{a}(b)} \circ \tilde{a} \stackrel{(2.17)(6)}{=} \tilde{a}\tilde{o}\tilde{b}\tilde{o}\tilde{a} \circ \tilde{a} = \tilde{a}\tilde{o}\tilde{b}$  gilt (\*)  $\boxed{\sphericalangle(\tilde{a}(b), a) = \sphericalangle(a, b)}$  gemäß (2) und (2.8), und mit (3) folgt analog ( $\diamond$ )  $\boxed{\sphericalangle(a, \tilde{a}(c)) = \sphericalangle(c, a)}$ . Mit (4) führt Addition von (\*) und ( $\diamond$ ) auf  $\sphericalangle(\tilde{a}(b), \tilde{a}(c)) = \sphericalangle(c, b)$ . Damit ist (6) für den Fall  $\psi = \tilde{a}$  gezeigt, und wegen (2.20) gilt (6) dann auch allgemein.

Aus (6) folgt (7). Zum Beweis von (8) sei  $k \in \mathbb{G}$  mit  $\delta_{D, \alpha} = \tilde{k}\tilde{o}\tilde{g}$  (vgl. (2.26)) sowie  $\sphericalangle(g, k) =: \varrho$ . Nach (2.30) ist  $\alpha \equiv_{2\pi} 2\varrho$ , und mit  $\sphericalangle(k, \delta_{D, \alpha}(g)) = \sphericalangle(k, \tilde{k}(g)) \stackrel{(\diamond)}{=} \sphericalangle(g, k)$  folgt dann  $\sphericalangle(g, \delta_{D, \alpha}(g)) \stackrel{(4)}{\equiv_{\pi}} \varrho + \varrho \equiv_{2\pi} \alpha$ , also (8). Für  $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$  führt dies auf (9).  $\square$

**(2.33)** Neben den gerade betrachteten  $\mathbb{G}$ -Winkeln benötigen wir nun auch „gewöhnliche“ Winkel. Hierzu notieren wir einige bekannte Aussagen:

Das Skalarprodukt „ $\circ$ “ auf  $\mathbb{C}$  ist definiert durch

- (1)  $(x, y) \circ (u, v) := xu + yv \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , und es gilt
- (2)  $X \circ X = |X|^2 \wedge X \circ Y = Y \circ X \wedge X \circ (\lambda Y + Z) = \lambda(X \circ Y) + X \circ Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

Damit folgt  $X \circ (-Y) = -(X \circ Y)$  und  $|X - Y|^2 = |X|^2 - 2 \cdot X \circ Y + |Y|^2$ , also

- (3)  $X \circ Y = \frac{1}{2}(|X|^2 + |Y|^2 - |X - Y|^2) \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}$ .

Wegen der Distanztreue der Bewegungen impliziert dies

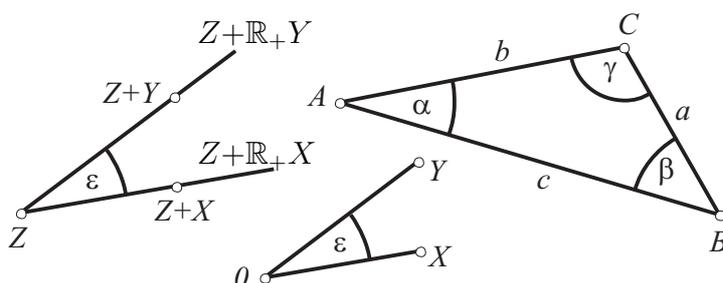
- (4)  $(\varphi(A) - \varphi(C)) \circ (\varphi(B) - \varphi(C)) = (A - C) \circ (B - C) \quad \forall A, B, C \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in \mathbb{B}$ ,

und mit (1.3) f) und (3) ergibt sich

- (5)  $X \circ Y = \frac{1}{2}(X\bar{Y} + \bar{X}Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}$ .

Ist nun  $X = r \cdot e^{i\alpha}$  und  $Y = s \cdot e^{i\beta}$  mit  $r, s \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so führt (5) auf  $X \circ Y = |X| \cdot |Y| \cdot \cos(\alpha - \beta)$ . Da es genau ein  $\varepsilon \in [0, \pi]$  gibt mit  $\cos \varepsilon = \cos(\alpha - \beta)$ , folgt

- (6)  $\boxed{X \circ Y = |X| \cdot |Y| \cdot \cos \varepsilon}$  mit  $\boxed{\varepsilon \in [0, \pi]}$ ,  $\varepsilon$  eindeutig bestimmt.



Man nennt  $\boxed{\sphericalangle(X, Y) := \varepsilon}$  die **Größe des Winkels**  $(X, Y)$  und bezeichnet  $\boxed{\sphericalangle(\tau_X, \tau_Y) := \varepsilon}$  als den **Winkel zwischen den Translationen**  $\tau_X, \tau_Y$ . Ferner heißt  $\boxed{\sphericalangle(Z + \mathbb{R}_+ X, Z + \mathbb{R}_+ Y) := \varepsilon}$

die **Größe des Winkel mit den Schenkeln**  $Z + \mathbb{R}_+ X$  und  $Z + \mathbb{R}_+ Y$ .

Ist  $\{A, B, C\}$  ein Dreieck und ist  $a := |B - C|$ ,  $b := |C - A|$ ,  $c := |A - B|$ ,  $\alpha := \sphericalangle(B - A, C - A)$ ,  $\beta := \sphericalangle(C - B, A - B)$ ,  $\gamma := \sphericalangle(A - C, B - C)$ , so gilt

- (7)  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ,      (8)  $[a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta]$ ,      (9)  $[a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta]$ ,

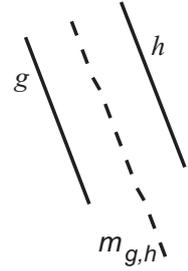
d.h. *die Winkelsumme im Dreieck ist  $180^\circ$ ; im Dreieck liegen gleichlange Seiten gleichgroßen Winkeln gegenüber; im Dreieck liegt der größere Winkel stets der größeren Seite gegenüber.* (Zum Beweis vergleiche man die Übungen.)

(2.34) Sind  $g, h \in \mathbb{G}$  mit  $g \parallel h$ , so wird  $m_{g,h} := \{\frac{1}{2}(X+Y) \mid X \in g \wedge Y \in h\}$  die **Mittellinie**

von  $(g, h)$  genannt. Es gilt (1)  $\boxed{m_{g,h} \in \mathbb{G} \wedge g \parallel m_{g,h} \parallel h \wedge \tilde{m}_{g,h}(g) = h}$ ,

denn ist  $g = U + \mathbb{R}A$  mit  $U \in \mathbb{C} \wedge A \in \mathbb{C}^*$  und ist  $\{V\} = (U \perp h) \cap h$ , so ist  $m_{g,h} = \{\frac{1}{2}(U + \lambda A + V + \mu A) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\frac{1}{2}(U+V) + \frac{1}{2}(\lambda+\mu)A \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{2}(U+V) + \mathbb{R}A \in \mathbb{G}$  mit  $g \parallel m_{g,h} \parallel h$ , und mit (1.12), (1.13)(3) und (2.17) folgt  $\tilde{m}_{g,h}(g) = h$ . Ist  $\psi \in \mathbb{B}^-$  mit der Achse  $a_\psi$ , so führen (2.8), (2.17)

und (2.22) auf (2)  $\boxed{k \parallel a_\psi \Rightarrow a_\psi = m_{k,\psi(k)} \quad \forall k \in \mathbb{G}}$ . Wir zeigen nun



### (2.35) Hauptsatz über das Transformieren von Bewegungen.

Sind  $A \in \mathbb{C}^*$ ,  $D \in \mathbb{C}$ ,  $g \in \mathbb{G}$  und  $\alpha \in ]0, 2\pi[$ , so gilt:

- (1)  $\eta \circ \tilde{g} \circ \eta^{-1} = \tilde{\eta(g)} \quad \forall \eta \in \mathbb{B}$ .
- (2)  $\varphi \circ \delta_{D,\alpha} \circ \varphi^{-1} = \delta_{\varphi(D),\alpha} \quad \forall \varphi \in \mathbb{B}^+$ .
- (3)  $\psi \circ \delta_{D,\alpha} \circ \psi^{-1} = \delta_{\psi(D),-\alpha} \quad \forall \psi \in \mathbb{B}^-$ .
- (4) Es sei  $\eta \in \mathbb{B}$ . Dann ist  $\tau' := \eta \circ \tau_A \circ \eta^{-1}$  die Translation  $\tau_{\eta(A)-\eta(0)}$ , und es ist  $|\tau'| = |\tau_A|$ . Ist  $g$  eine Fixgerade von  $\tau_A$ , so ist  $\eta(g)$  eine Fixgerade von  $\tau'$ .  
Ist  $\eta = \delta_{D,\alpha}$ , so ist  $\tau' = \tau_{e^{i\alpha} \cdot A}$ .
- (5) Es sei  $\eta \in \mathbb{B}$ . Ist  $\psi$  eine Gleitspiegelung mit dem Schub  $\tau$ , so ist  $\eta \circ \psi \circ \eta^{-1}$  eine Gleitspiegelung mit dem Schub  $\eta \circ \tau \circ \eta^{-1}$ , der Schublänge  $|\tau|$  und der Achse  $\eta(a_\psi)$ .

*Beweis:* (1) gilt gemäß (2.17)(6).

(2), (3): Es sei  $\eta \in \mathbb{B}$ . Nach (2.12) ist  $\eta \circ \delta_{D,\alpha} \circ \eta^{-1} = \delta_{\eta(D),\alpha'}$  mit  $\alpha' \in ]0, 2\pi[$ , und nach (2.20) gibt es  $a, b \in \mathbb{G}$  mit  $\delta_{D,\alpha} = \tilde{a} \circ \tilde{b}$ . Ist nun  $a' := \eta(a)$  und  $b' := \eta(b)$ , so ist  $\tilde{a}' \circ \tilde{b}' = \eta \circ \tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \eta^{-1} = \delta_{\eta(D),\alpha'}$ . Für  $\beta := \sphericalangle(a, b)$  führen (2.30) und (2.32)(5),(6) auf  $\alpha' \equiv_{2\pi} 2\beta = \alpha$  im Falle  $\eta \in \mathbb{B}^+$  und auf  $\alpha' \equiv_{2\pi} 2(\pi - \beta) = 2\pi - \alpha$  sonst.

(4): Nach (2.12) hat  $\tau'$  keinen Fixpunkt, und wegen  $\tau' \in \mathbb{B}^+$  gilt dann  $\tau' \in \mathcal{T}$ . Wegen  $\tau'(\eta(0)) - \eta(0) = \eta(A) - \eta(0)$  impliziert dies  $\tau' = \tau_{\eta(A)-\eta(0)}$ , und damit folgt  $|\tau'| = |\eta(A) - \eta(0)| = |A - 0| = |\tau_A|$ . Im Falle  $\eta(X) = e^{i\alpha} \cdot (X - D) + D \quad \forall X \in \mathbb{C}$  ist  $\eta(A) - \eta(0) = e^{i\alpha} \cdot A$ . Die verbleibende Behauptung folgt aus (2.12)(3).

(5): Es sei  $\psi = \tilde{g} \circ \tau$  mit  $\tau(g) = g$  gemäß (2.22). Ist  $g' := \eta(g)$  und  $\tau' := \eta \circ \tau \circ \eta^{-1}$ , so ist  $\psi' := \eta \circ \psi \circ \eta^{-1} = \tilde{g}' \circ \tau'$  nun wegen  $\tau'(g') = g'$  und nach (2.12) eine Gleitspiegelung mit der Achse  $g'$  und dem Schub  $\tau'$ . Nach (4) ist  $|\tau'| = |\tau|$ .  $\square$

Schließlich zeigen wir

### (2.36) Satz über das Verketteten von Bewegungen.

Es seien  $D, D' \in \mathbb{C}$  und  $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . Dann gilt:

- (1) Ist  $\gamma + \gamma' \notin 2\pi\mathbb{Z}$ , so gibt es ein  $D'' \in \mathbb{C}$  mit  $\delta_{D,\gamma} \circ \delta_{D',\gamma'} = \delta_{D'',\gamma+\gamma'}$ .
- (2) Ist  $\gamma + \gamma' \in 2\pi\mathbb{Z}$ , so ist  $\delta_{D,\gamma} \circ \delta_{D',\gamma'} \in \mathcal{T}$ .
- (3) Ist  $\tau \in \mathcal{T}$ , so gibt es  $D'', D''' \in \mathbb{C}$  mit  $\delta_{D,\gamma} \circ \tau = \delta_{D'',\gamma}$  und  $\tau \circ \delta_{D,\gamma} = \delta_{D''',\gamma}$ .
- (4) Sind  $\varphi, \psi \in \mathbb{B}^-$  mit  $a_\varphi \parallel a_\psi$ , so ist  $\varphi \circ \psi \in \mathcal{T}$ .
- (5) Sind  $\varphi, \psi \in \mathbb{B}^-$  mit  $\gamma := \sphericalangle(a_\varphi, a_\psi) \neq 0^\circ$ , so ist  $\varphi \circ \psi = \delta_{D'',2\gamma}$  für ein  $D'' \in \mathbb{C}$ .

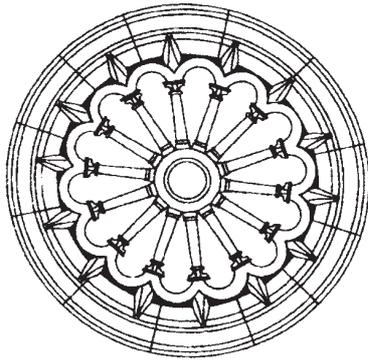
*Beweis:* Für  $\varphi = \alpha_{e^{i\gamma}, B}$  und  $\psi = \alpha_{e^{i\gamma'}, B'}$  mit  $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R} \wedge B, B' \in \mathbb{C}$  (vgl. (2.3)) gilt  $\varphi \circ \psi \stackrel{\text{Bew.v.(2.9)}}{=} \alpha_{e^{i(\gamma+\gamma')}, B''}$  mit  $B'' \in \mathbb{C}$ . Nach (2.19) impliziert dies (1), (2), (3).

(4), (5): Gemäß (2.22) sei  $\varphi = \tau \circ \tilde{a}_\varphi$  und  $\psi = \tilde{a}_\psi \circ \tau'$  mit  $\tau, \tau' \in \mathcal{T}$ . Dann ist  $\varphi \circ \psi = \tau \circ (\tilde{a}_\varphi \circ \tilde{a}_\psi) \circ \tau'$ , und mit (3), (2.13)(1), (2.21) und (2.30) folgt die Behauptung.  $\square$

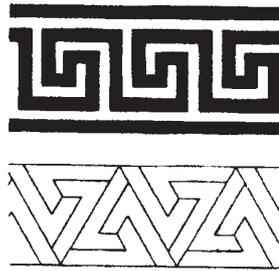
### 3. DISKRETE BEWEGUNGSGRUPPEN DER EBENE

(3.1) Eine Untergruppe  $\mathcal{U}$  der Bewegungsgruppe  $\mathbb{B}$  von  $\mathbb{C}$  heißt **diskret**, wenn sie endlich ist oder wenn sie eine echte Translation kleinster Länge enthält, d.h. wenn ein  $\tau \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}} := \mathcal{T} \cap \mathcal{U}$  existiert mit  $0 < |\tau| \leq |\tau'| \quad \forall \tau' \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ .

Wir werden sehen, daß diskrete Bewegungsgruppen geeignet sind, gewisse Muster zu unterscheiden und zu klassifizieren, wie man sie z.B. bei rosettenförmigen Kirchenfenstern oder bei regelmäßigen Wandmustern vorfindet:



Rosette

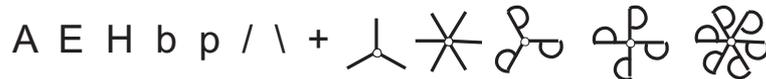


Friese



Ornament

Derartige Muster entstehen in der Regel durch systematisches Zusammensetzen von sog. **Motiven**, das sind gewisse beschränkte Teilmengen von  $\mathbb{C}$ . Bei dem Versuch, eine gute Übersicht zu gewinnen, werden die folgenden sehr einfachen Motive eine besondere Rolle spielen:



Dabei kann man sich die letzten drei Motive durch Rotation des Buchstabens P entstanden denken.

Den künstlerischen Wert eines Motivs und damit verbundener Muster können wir mathematisch nicht erfassen, wohl aber gewisse Symmetrieeigenschaften.

#### A. Symmetriegruppen

Vorbereitend stellen wir zunächst fest:

(3.2) **Satz.** Ist  $M$  eine Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , so ist  $\mathbb{B}_M := \{\alpha \in \mathbb{B} \mid \alpha(M) = M\}$  eine Untergruppe von  $\mathbb{B}$ , genannt **Symmetriegruppe** von  $M$ .

Ferner ist  $\mathbb{B}_M^+ := \{\alpha \in \mathbb{B}^+ \mid \alpha(M) = M\}$  eine Untergruppe von  $\mathbb{B}^+$ , genannt **gerade Symmetriegruppe** von  $M$ .

*Beweis:* Offenbar ist  $id_{\mathbb{C}} \in \mathbb{B}_M^+ \subseteq \mathbb{B}_M$ . Sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{B}_M$  (bzw.  $\in \mathbb{B}_M^+$ ), so gilt  $\alpha \circ \beta(M) = \alpha(\beta(M)) = \alpha(M) = M$ , also  $\alpha \circ \beta \in \mathbb{B}_M$  (bzw.  $\in \mathbb{B}_M^+$ ). Ist  $\alpha \in \mathbb{B}_M$  (bzw.  $\in \mathbb{B}_M^+$ ), so führt  $\alpha(M) = M$  auf  $M = \alpha^{-1}(\alpha(M)) = \alpha^{-1}(M)$ , d.h. es gilt  $\alpha^{-1} \in \mathbb{B}_M$  (bzw.  $\in \mathbb{B}_M^+$ ).  $\square$

Es wird sich herausstellen, daß es zwischen den Symmetriegruppen gewisser Teilmengen von  $\mathbb{C}$  und den diskreten Untergruppen von  $\mathbb{B}$  enge Beziehungen gibt. Um dies zu entwickeln, benötigen wir die folgenden Aussagen:

**(3.3) Satz.** Ist  $\mathfrak{M}$  eine Menge von Untergruppen einer (abstrakten)<sup>1)</sup> Gruppe  $\mathcal{G}(\cdot)$ , so ist auch  $\bigcap \mathfrak{M} := \{\alpha \in \mathcal{G} \mid \alpha \in \mathcal{U} \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{M}\}$  eine Untergruppe von  $\mathcal{G}(\cdot)$ .

*Beweis:* Offenbar ist  $id_{\mathcal{G}} \in \bigcap \mathfrak{M}$ , und sind  $\alpha, \beta \in \bigcap \mathfrak{M}$ , so führt  $(\alpha, \beta \in \mathcal{U} \Rightarrow \alpha \circ \beta \in \mathcal{U} \wedge \alpha^{-1} \in \mathcal{U} \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{M})$  auf  $\alpha \circ \beta \in \bigcap \mathfrak{M} \wedge \alpha^{-1} \in \bigcap \mathfrak{M}$ .  $\square$

**(3.4) Satz.** Ist  $\mathcal{M}$  eine nichtleere Teilmenge einer (abstrakten) Gruppe  $\mathcal{G}(\cdot)$ , so gibt es eine **kleinste** Untergruppe  $\langle \mathcal{M} \rangle$  von  $\mathcal{G}(\cdot)$ , die die Elemente von  $\mathcal{M}$  enthält.

Man nennt  $\langle \mathcal{M} \rangle$  die von  $\mathcal{M}$  **erzeugte Untergruppe**.

*Beweis:* Wir betrachten den Durchschnitt  $\mathcal{D}$  aller Untergruppen von  $\mathcal{G}(\cdot)$ , welche  $\mathcal{M}$  umfassen. Nach (3.3) ist  $\mathcal{D}$  eine Untergruppe von  $\mathcal{G}(\cdot)$ , die  $\mathcal{M}$  umfaßt, und dabei die kleinstmögliche, weil jede andere Untergruppe, die  $\mathcal{M}$  umfaßt, auch  $\mathcal{D}$  umfaßt.  $\square$

## B. Zyklische Gruppen und Diedergruppen

**(3.5)** Ist  $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$  und sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  Elemente einer (abstrakten) Gruppe  $\mathcal{G}(\cdot)$ , so schreiben wir auch  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  statt  $\langle \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \rangle$  und bezeichnen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  als **erzeugende Elemente** der Untergruppe  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  von  $\mathcal{G}(\cdot)$ .

Ist  $\alpha$  ein beliebiges Element von  $\mathcal{G}$ , so ist die von  $\alpha$  erzeugte Untergruppe  $\langle \alpha \rangle$  von  $\mathcal{G}(\cdot)$  darstellbar in der Form  $\langle \alpha \rangle = \{\alpha^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

Denn  $\alpha^0$  ist (definitionsgemäß) das neutrale Element von  $\mathcal{G}(\cdot)$ , und wegen

$$(*) \quad \alpha^1 = \alpha \wedge \alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n} = \alpha^n \cdot \alpha^m \wedge \alpha^{-m} = (\alpha^m)^{-1} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

ist  $\{\alpha^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  eine  $\alpha$  und damit auch  $\langle \alpha \rangle$  umfassende Untergruppe von  $\mathcal{G}(\cdot)$ , die wegen  $\langle \alpha \rangle \ni \alpha^0, \alpha, \alpha^{-1}, \alpha^2, \alpha^{-2}, \alpha^3, \alpha^{-3}, \dots$  nun mit  $\langle \alpha \rangle$  identisch ist.

Wenn die Untergruppe  $\langle \alpha \rangle$  endlich ist und aus genau  $n$  Elementen besteht, dann wird die natürliche Zahl  $n$  auch die **Ordnung von  $\alpha$**  genannt, in Zeichen:  $n = ord(\alpha)$ , und dann heißt  $\langle \alpha \rangle$  eine **zyklische Gruppe der Ordnung  $n$** . Wegen (\*) ist  $\langle \alpha \rangle$  eine *abelsche*, also *kommutative* Untergruppe von  $\mathcal{G}(\cdot)$ . Genauer zeigen wir

**(3.6) Satz.** Ist  $\mathcal{G}(\cdot)$  eine (abstrakte) Gruppe und ist  $\alpha \in \mathcal{G}$  ein Element der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ , so ist die Gruppe  $\mathbb{Z}_n(+_n) := \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}(+_n)$  mit der Addition

$$x +_n y := \begin{cases} x + y, & \text{falls } x + y < n \\ x + y - n & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}_n$$

vermittels der Zuordnung  $\varphi: \mathbb{Z}_n \rightarrow \langle \alpha \rangle: k \rightarrow \alpha^k$  isomorph zur Gruppe  $\langle \alpha \rangle(\cdot)$ .

*Kurz:* Ist  $|\langle \alpha \rangle| = n \in \mathbb{N}$ , so werden die Potenzen  $\alpha^k$  von  $\alpha$  verknüpft, indem man die Exponenten modulo  $n$  addiert. Insbesondere ist  $\beta^n = \beta^0 \ \forall \beta \in \langle \alpha \rangle$ .

*Beweis:* 1) Da  $|\langle \alpha \rangle| = n \in \mathbb{N}$  ist, können nicht alle Potenzen von  $\alpha$  verschieden sein, d.h. es gibt  $r, s \in \mathbb{Z}$  mit  $r < s$  und mit  $\alpha^r = \alpha^s$ , also mit  $\alpha^0 = \alpha^t$  für  $t := s - r \in \mathbb{N}$ . Nun sei  $m$  die **kleinste** Zahl aus  $\mathbb{N}$  mit (1)  $\alpha^m = \alpha^0$ . Ist  $k \in \mathbb{Z}$  mit (2)  $\alpha^k = \alpha^0$ , so ist  $k = q \cdot m + p$  mit  $q, p \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq p < m$  (Satz über die Division mit Rest), und es folgt  $\alpha^0 = \alpha^k = \alpha^{q \cdot m + p} = (\alpha^m)^q \cdot \alpha^p = (\alpha^0)^q \cdot \alpha^p = \alpha^p$ , also  $p = 0$  wegen  $0 \leq p < m$  und wegen der Minimaleigenschaft von  $m$ . Dies bedeutet  $k = q \cdot m$ , also (3)  $m \mid k$  ( $m$  teilt  $k$ ).

<sup>1)</sup> Hier ist „ $\cdot$ “ eine abstrakte(!) Verknüpfung wie „ $\ast$ “.

Sind jetzt  $r, s \in \{0, \dots, m-1\}$  mit  $r < s$ , so folgt (4)  $\boxed{\alpha^r \neq \alpha^s}$ , denn sonst wäre  $\alpha^{s-r} = \alpha^0$ , und dann wäre  $m$  nach (3) ein Teiler von  $s - r$  im Widerspruch zu  $0 < s - r < m$ .

Ist andererseits  $u \in \mathbb{Z}$  beliebig gewählt, so ist  $u = v \cdot m + w$  mit  $v, w \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq w < m$ , und es folgt  $\alpha^u = \alpha^{v \cdot m + w} = \alpha^w$  mit  $w \in \{0, \dots, m-1\}$ .

Damit ist gezeigt, daß  $\langle \alpha \rangle$  aus den paarweise verschiedenen Elementen  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{m-1}$  besteht, d.h. es ist  $\boxed{m = n}$ , und  $\varphi$  ist eine Bijektion.

2) Sind  $r, s \in \{0, \dots, n-1\}$  mit  $r+s < n$ , so ist  $\varphi(r+_n s) = \varphi(r+s) = \alpha^{r+s} = \alpha^r \cdot \alpha^s = \varphi(r) \cdot \varphi(s)$ . Sind  $r, s \in \{0, \dots, n-1\}$  mit  $r+s \geq n$ , so ist  $\varphi(r+_n s) = \varphi(r+s-n) = \alpha^{r+s-n} = \alpha^r \cdot \alpha^s \cdot \alpha^{-n} = \alpha^r \cdot \alpha^s \cdot \alpha^0 = \varphi(r) \cdot \varphi(s)$ . Mithin ist  $\varphi$  ein Isomorphismus.  $\square$

**(3.7)** Nach (3.6) sind alle zyklischen Gruppen der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  isomorph; von jeder solchen Gruppe sagt man, sie ist eine  $C_n$ , eine **zyklische Gruppe mit n Elementen**.

Ist  $n \in \mathbb{N}$  und  $D \in \mathbb{C}$ , so ist die Untergruppe  $\boxed{\langle \delta_{D, 2\pi/n} \rangle = \{ \delta_{D, k \cdot 2\pi/n} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \}}$  von  $\mathbb{B}^+(\circ)$  neben  $\boxed{\mathbb{Z}_n(+_n)}$  das wichtigste Beispiel einer zyklischen Gruppe der Ordnung  $n$ .

Weitere Beispiele sind  $\{0\}(+)$  und  $\{1\}(\cdot)$  für  $C_1$ , ferner  $\{1, -1\}(\cdot)$  und  $\{id_{\mathbb{C}}, \kappa\}(\circ)$  für  $C_2$  sowie  $\{1, i, -1, -i\}(\cdot)$  für  $C_4$ .

Man beachte, daß eine zyklische Gruppe mehrere Erzeugende haben kann; z.B. ist neben  $i$  auch  $-i$  ein erzeugendes Element von  $\{1, i, -1, -i\}(\cdot)$ .

**(3.8)** Eine (abstrakte) Gruppe  $\mathcal{G}(\cdot)$  heißt **Diedergruppe der Ordnung 2n**, wenn gilt:

(D1) Es ist  $|\mathcal{G}| = 2n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

(D2)  $\mathcal{G}(\cdot)$  besitzt eine zyklische Untergruppe  $\mathcal{U}$  der Ordnung  $n$

(D3) Es gibt ein  $\sigma \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{U}$  mit  $\boxed{\sigma^2 = \sigma^0 \wedge \sigma \circ \beta = \beta^{-1} \circ \sigma \quad \forall \beta \in \mathcal{U}}$ .

Ist  $\mathcal{G}(\cdot)$  mit (D1), (D2), (D3) vorgegeben und ist  $\mathcal{U} = \langle \delta \rangle$  mit  $ord(\delta) = n$ , so gilt

(1)  $\boxed{\mathcal{G} = \{ \delta^1, \dots, \delta^n, \sigma \circ \delta^1, \dots, \sigma \circ \delta^n \}}$ . Ist  $\boxed{\sigma_k := \sigma \circ \delta^k \text{ für } k = 1, \dots, n}$ , so folgt

(2)  $\boxed{\mathcal{G} = \{ \delta^1, \dots, \delta^n, \sigma_1, \dots, \sigma_n \} = \{ \sigma \circ \sigma_1, \dots, \sigma \circ \sigma_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n \}}$

mit  $\boxed{\sigma_1^2 = \dots = \sigma_n^2 = \sigma^0}$  und  $\boxed{\sigma_k \circ \beta = \beta^{-1} \circ \sigma_k} \quad \forall \beta \in \mathcal{U}, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,

denn  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  sind paarweise verschiedene Elemente von  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{U}$ , und für  $k = 1, \dots, n$  und  $\beta \in \mathcal{U}$  gilt  $\sigma \circ \sigma_k = \sigma \circ \sigma \circ \delta^k = \delta^k \wedge \sigma_k^2 = \sigma \circ \delta^k \circ \sigma \circ \delta^k = \sigma \circ \delta^k \circ \delta^{-k} \circ \sigma = \sigma^0$  sowie  $\sigma_k \circ \beta = \sigma \circ \delta^k \circ \beta = \sigma \circ \beta \circ \delta^k = \beta^{-1} \circ \sigma \circ \delta^k = \beta^{-1} \circ \sigma_k$ .

**(3.9)** Sind  $\mathcal{G}(\cdot)$  und  $\mathcal{G}'(\cdot)$  Diedergruppen der Ordnung  $2n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , so wird in beiden völlig analog gerechnet, und mithin sind sie isomorph. Von jeder solchen Gruppe sagen wir <sup>1)</sup>, sie ist eine  $D_n^n$ , eine **Diedergruppe mit 2n Elementen**.

**Beispiel.** Ist  $\sigma = \tilde{g}$  mit  $g \in \mathbb{G}$  und ist  $D \in g$ , so gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$ :

Die Untergruppe  $\boxed{\langle \delta_{D, 2\pi/n}, \sigma \rangle}$  von  $\mathbb{B}(\circ)$  ist eine  $D_n^n$ . Diese ist nichtabelsch für  $n \geq 3$ .

*Beweis:* Nach (3.7) ist  $\mathcal{U} := \langle \delta \rangle = \{ \delta^1, \dots, \delta^n \}$  für  $\delta := \delta_{D, 2\pi/n}$  eine zyklische Untergruppe der Ordnung  $n$  von  $\langle \delta, \sigma \rangle$ . Wegen  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{B}^+$  und  $\sigma \in \mathbb{B}^-$  ist  $\sigma \notin \mathcal{U}$ . Ist  $k \in \{1, \dots, n\}$  und ist  $\sigma_k := \sigma \circ \delta^k$ , so gilt  $\sigma_k \in \mathbb{S}$  und  $D \in a_{\sigma_k}$  (= Achse von  $\sigma_k$ ) gemäß (2.24). Damit folgt  $\sigma \circ \delta^k = \sigma_k = \sigma_k^{-1} = (\sigma \circ \delta^k)^{-1} = (\delta^k)^{-1} \circ \sigma$  für  $k = 1, \dots, n$ , d.h.  $\langle \delta_{D, 2\pi/n}, \sigma \rangle$  ist eine  $D_n^n$ . Ist  $n \geq 3$ , so ist  $\delta^{-1} = \delta^{n-1} \neq \delta^1$ , also  $\sigma \circ \delta^{-1} \neq \sigma \circ \delta^1 = \delta^{-1} \circ \sigma$ .  $\square$

<sup>1)</sup> Wir bevorzugen die Bezeichnung  $D_n^n$  anstelle von  $D_n$  wegen  $|D_n^n| = 2n$ .

### C. Rosettengruppen

Im weiteren bezeichne  $\mathbb{S}$  die **Menge der Spiegelungen** aus  $\mathbb{B}^-$ .

Die *endlichen* Untergruppen von  $\mathbb{B}(\circ)$  heißen auch **Rosettengruppen**.

Wir werden bald sehen, wie es zu dieser Benennung kommt. Zunächst zeigen wir

**(3.10) Satz.** *Ist  $\mathcal{U}$  eine endliche Untergruppe von  $\mathbb{B}(\circ)$ , so gilt:*

- (1) *Es ist  $\mathcal{T} \cap \mathcal{U} = \{id_{\mathbb{C}}\}$ .*
- (2) *Es gibt ein  $D \in \mathbb{C}$  mit  $\mathcal{U}^+ := \mathbb{B}^+ \cap \mathcal{U} \subseteq \text{Dreh}(D)$ .*
- (3) *Ist  $\mathcal{U}^- := \mathbb{B}^- \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ , so besteht  $\mathcal{U}^-$  aus Spiegelungen an Achsen durch  $D$ .*

*Beweis:* a) Gäbe es ein  $\tau \in \mathcal{T} \cap \mathcal{U}$  mit  $|\tau| \neq 0$ , so wäre  $\{\tau^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  eine unendliche Teilmenge von  $\mathcal{U}$ . Also gilt (1).

b) Gäbe es in  $\mathcal{U}^-$  eine Gleitspiegelung  $\psi$ , so wäre  $\psi \circ \psi \in (\mathcal{T} \cap \mathcal{U}) \setminus \{id_{\mathbb{C}}\}$  entgegen (1).

c) Es gebe ein  $\delta_{D,\alpha} \in \mathcal{U}$  mit  $0 < \alpha < 2\pi$ . Gäbe es nun eine echte Drehung  $\varphi$  mit Zentrum  $E \neq D$  in  $\mathcal{U}$ , so wäre  $\varphi \circ \delta_{D,-\alpha} \circ \varphi^{-1} \stackrel{(2.35)(2)}{=} \delta_{\varphi(D),-\alpha}$  eine Drehung um  $\varphi(D) \neq D$ , und nach (2.36)(2) wäre  $\delta_{\varphi(D),-\alpha} \circ \delta_{D,\alpha}$  dann wegen  $\delta_{\varphi(D),-\alpha} \neq \delta_{D,\alpha}^{-1}$  eine echte Translation entgegen (1). Mithin ist  $\mathcal{U}^+ \subseteq \text{Dreh}(D)$ . Gäbe es in  $\mathcal{U}^-$  eine Spiegelung  $\tilde{g}$  mit  $g \in \mathbb{G} \wedge g \not\equiv D$ , so wäre  $\delta_{D,\alpha} \circ \tilde{g}$  nach (2.24) eine Gleitspiegelung aus  $\mathcal{U}$  entgegen b). Also gelten (1), (2), (3).

d) Es sei  $\mathcal{U}^+ = \{id_{\mathbb{C}}\}$ . Gibt es  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{U}^-$ , so folgt  $\sigma \circ \sigma = id_{\mathbb{C}} = \sigma \circ \sigma'$ , also  $\sigma = \sigma' \in \mathbb{S}$  und  $\mathcal{U} = \{id_{\mathbb{C}}, \sigma\}$ , und dann sei  $D \in a_{\sigma}$ . Sonst sei  $D \in \mathbb{C}$  beliebig. Damit folgen (1), (2), (3).  $\square$

**(3.11) Satz.** *Ist  $\mathcal{U}$  eine endliche Untergruppe von  $\mathbb{B}^+(\circ)$ , so gibt es ein  $D \in \mathbb{C}$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\boxed{\mathcal{U} = \langle \delta_{D, 2\pi/n} \rangle}$ , d.h. dann ist  $\mathcal{U}(\circ)$  eine  $C_n$ .*

*Beweis:* Ist  $|\mathcal{U}| = 1$ , so ist  $\mathcal{U} = \{id_{\mathbb{C}}\} = \{\delta_{D, 2\pi}\} \quad \forall D \in \mathbb{C}$ . Ist  $|\mathcal{U}| \geq 2$ , so gibt es nach (3.10) ein  $D \in \mathbb{C}$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in ]0, 2\pi]$  mit  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$  derart, daß  $\mathcal{U} = \{\delta_{D, \alpha_1}, \delta_{D, \alpha_2}, \dots, \delta_{D, \alpha_n}\}$  ist. Sind  $r, s \in \{1, \dots, n\}$  mit  $r < s$ , so führt

$\mathcal{U} \ni \delta_{D, \alpha_s} \circ \delta_{D, \alpha_r}^{-1} \stackrel{(2.27)}{=} \delta_{D, \alpha_s - \alpha_r}$  mit  $0 < \alpha_s - \alpha_r < \alpha_s$  auf  $\alpha_s - \alpha_r \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}\}$ . Wegen  $0 < \alpha_s - \alpha_{s-1} < \alpha_s - \alpha_{s-2} < \dots < \alpha_s - \alpha_1 < \alpha_s$  folgt  $(\alpha_s - \alpha_{s-1}, \alpha_s - \alpha_{s-2}, \dots, \alpha_s - \alpha_1) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$ , also  $\alpha_s - \alpha_{s-1} = \alpha_1$  für  $s = 2, \dots, n$ . Dies impliziert  $\alpha_s = s \cdot \alpha_1$  für  $s = 2, \dots, n$ , und wegen  $id_{\mathbb{C}} \in \mathcal{U}$  ist dann  $2\pi = \alpha_n = n \cdot \alpha_1$ . Mit  $\delta := \delta_{D, 2\pi/n}$  folgt  $\delta_{D, \alpha_s} = \delta_{D, s \cdot 2\pi/n} = \delta^s$  für  $s = 1, \dots, n$ , und daraus ergeben sich mit (3.7) die angegebenen Aussagen.  $\square$

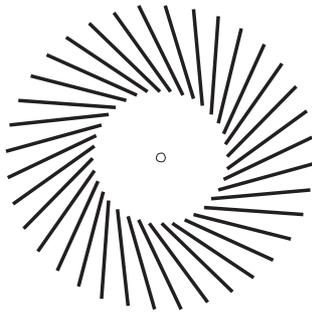
**(3.12) Satz.** *Ist  $\mathcal{U}$  eine endliche Untergruppe von  $\mathbb{B}(\circ)$  mit  $\mathcal{U} \not\subseteq \mathbb{B}^+$ , so gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , ein  $D \in \mathbb{C}$  und  $\sigma_0, \dots, \sigma_n \in \mathbb{S}$  mit*

- (1) *Es ist  $\sigma_0 = \sigma_n$  und  $D \in a_{\sigma_1} \cap \dots \cap a_{\sigma_n}$ .*
- (2) *Ist  $n \geq 2$ , so ist  $\boxed{\sphericalangle(a_{\sigma_{k-1}}, a_{\sigma_k}) = \pi/n}$  für  $k = 1, \dots, n$ .*
- (3) *Es ist  $\sigma_0 \circ \sigma_1 = \delta$  und  $\mathcal{U} \cap \mathbb{B}^+ = \langle \delta \rangle$  für  $\delta := \delta_{D, 2\pi/n}$ .*
- (4) *Es ist  $\mathcal{U} = \{\delta^1, \dots, \delta^n, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  mit  $\sigma_r \circ \delta^s = \delta^{-s} \circ \sigma_r \quad \forall r, s \in \{1, \dots, n\}$ .*
- (5) *Es ist  $\mathcal{U} = \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$  und  $\mathcal{U} = \langle \delta, \sigma_0 \rangle$ .*
- (6)  *$\boxed{\mathcal{U}^+ := \mathcal{U} \cap \mathbb{B}^+}$  ist eine  $C_n$ , und  $\boxed{\mathcal{U}$  ist eine  $D_n^n$ .*

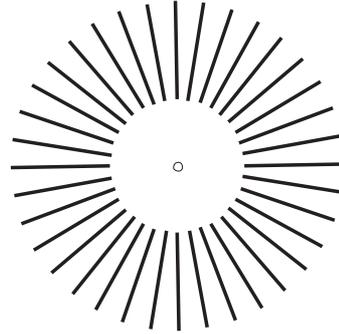
*Beweis:* Nach (3.10) besteht  $\mathcal{U}$  aus Drehungen und Spiegelungen, die alle einen Punkt  $D \in \mathbb{C}$  festlassen. Nach (3.11) gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\mathcal{U}^+ = \langle \delta \rangle$  für  $\delta := \delta_{D, 2\pi/n}$ , d.h.  $\mathcal{U}^+ = \{\delta^1, \dots, \delta^n\}$  ist eine  $C_n$ . Wir wählen ein  $\sigma_0 \in \mathcal{U} \cap \mathbb{B}^-$  und setzen  $\sigma_k := \sigma_0 \circ \delta^k$  für  $k = 1, \dots, n$ . Zu jedem  $\sigma \in \mathcal{U} \cap \mathbb{B}^-$  gibt es ein  $r \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\sigma_0 \circ \sigma = \delta^r$ , und

dann ist  $\sigma = \sigma_r$ . Damit ist  $\mathcal{U} = \{\delta^1, \dots, \delta^n, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  gezeigt. Wegen  $\sigma_r \circ \delta^s \in \mathcal{U} \cap \mathbb{S}$  ist  $\sigma_r \circ \delta^s = (\sigma_r \circ \delta^s)^{-1} = \delta^{-s} \circ \sigma_r \quad \forall r, s \in \{1, \dots, n\}$ , und folglich sind (1) und (3) – (6) gültig. Ist  $n \geq 2$  und ist  $\angle(a_{\sigma_{k-1}}, a_{\sigma_k}) = \beta_k$  für  $k \in \{1, \dots, n\}$ , so führt (2.30) wegen  $\sigma_{k-1} \circ \sigma_k = \sigma_0 \circ \delta^{k-1} \circ \sigma_0 \circ \delta^k = \delta^{1-k} \circ \sigma_0 \circ \sigma_0 \circ \delta^k = \delta = \delta_{D, 2\pi/n}$  auf  $2\beta_k = 2\pi/n$ , also auf  $\beta_k = \pi/n$  für  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Damit ist auch (2) bewiesen.  $\square$

Wir zeigen nun, daß die endlichen Untergruppen von  $\mathbb{B}(\circ)$  sich als Symmetriegruppen geeigneter Teilmengen von  $\mathbb{C}$  deuten lassen:



$\mathbb{M} = 36\text{-Rotor}$



$\mathbb{M} = 36\text{-Stern}$

**(3.13) Satz.** Es seien  $A, B, D \in \mathbb{C}$  mit  $D \notin s := [A, B]$  und mit  $|D-A| < |D-B|$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $\delta := \delta_{D, 2\pi/n}$  sei  $\mathbb{M} := \{D\} \cup \{\delta^k(s) \mid k \in \{1, \dots, n\}\}$ . Dann gilt:

- (1) Ist  $\angle(\langle D, A \rangle, \langle A, B \rangle) = \pi/4$ , so ist  $\mathbb{B}_{\mathbb{M}}$  eine  $C_n$ . (Hier heißt  $\mathbb{M}$  ein  $n$ -Rotor.)
- (2) Sind  $D, A, B$  kollinear, so ist  $\mathbb{B}_{\mathbb{M}}$  eine  $D_n^n$ . (Hier heißt  $\mathbb{M}$  ein  $n$ -Stern.)

*Beweis:* a) Da  $D$  als separater Punkt von jedem Element aus  $\mathbb{B}_{\mathbb{M}}$  festgehalten wird, besteht  $\mathbb{B}_{\mathbb{M}}$  aus Drehungen um  $D$  und ggf. aus Spiegelungen mit Achsen durch  $D$ .

b) Ist  $s_k := \delta^k(s)$  für  $k \in \{0, \dots, n\}$ , so ist  $\delta^r(\{s_1, \dots, s_n\}) = \{s_{1+n r}, \dots, s_{n+n r}\} = \{s_1, \dots, s_n\}$  für  $r = 1, \dots, n$ , d.h. es ist  $\langle \delta \rangle \subseteq \mathbb{B}_{\mathbb{M}}$ .

c) Liegt Fall (2) vor, so ist  $\sigma(s) = s$  für  $\sigma := \langle D, A \rangle^\sim$ , und nach (2.24) ist  $\sigma(s_k) = \sigma \circ \delta^k(s) = \delta^{n-k} \circ \sigma(s) = s_{n-k}$  für  $k = 1, \dots, n$ , also  $\sigma \in \mathbb{B}_{\mathbb{M}}$  und damit  $\langle \delta, \sigma \rangle \subseteq \mathbb{B}_{\mathbb{M}}$ . Für  $r = 1, \dots, n$  und  $\sigma_r := \delta^r \circ \sigma$  ist  $\sigma_r \in \mathbb{B}_{\mathbb{M}}$  mit  $\sigma_r(s) = s_r$ .

d) Es sei  $\alpha \in \mathbb{B}_{\mathbb{M}}$ . Dann gibt es ein  $r \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\alpha(s) = s_r$ , also mit  $\alpha(A) = \delta^r(A)$  und  $\alpha(B) = \delta^r(B)$ . Ist  $\alpha \in \mathbb{B}_{\mathbb{M}}^+$ , so führt (2.5) auf  $\alpha = \delta^r$ . Damit ist  $\mathbb{B}_{\mathbb{M}}^+ = \langle \delta \rangle$  gezeigt. Nun sei  $\alpha \notin \mathbb{B}_{\mathbb{M}}^+$ . Wegen (2.32)(5),(6) und  $\angle(\langle D, A \rangle, \langle A, B \rangle) = \angle(\delta^r(\langle D, A \rangle), \delta^r(\langle A, B \rangle)) = \angle(\alpha(\langle D, A \rangle), \alpha(\langle A, B \rangle))$  kann dann nicht der Fall (1) vorliegen, d.h. im Fall (1) ist  $\mathbb{B}_{\mathbb{M}} = \mathbb{B}_{\mathbb{M}}^+ = \langle \delta \rangle$ . Im Fall (2) führt c) mit (2.5) auf  $\alpha = \sigma_r$ , und folglich ist dann  $\mathbb{B}_{\mathbb{M}} = \langle \delta, \sigma \rangle$ . Damit ist alles gezeigt.  $\square$

**(3.14) Bemerkung.** Wenn eine Figur durch endlich viele Drehungen mit sich zur Deckung gebracht werden kann, aber nicht durch unendlich viele Drehungen, so ist die zugehörige Symmetriegruppe nach (3.13) genau dann eine  $C_n$ , wenn keine Symmetrieachse existiert.

## D. Die sieben Friesgruppen

**(3.15)** Im folgenden sei  $\mathcal{U}$  stets eine diskrete Untergruppe der Bewegungsgruppe  $\mathbb{B}(\circ)$ , und es sei  $\mathcal{T}_{\mathcal{U}} := \mathcal{T} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ . Definitionsgemäß gibt es in  $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  eine Translation  $\tau_A$  mit  $A \in \mathbb{C}^*$  und mit  $|\tau_A| \leq |\tau| \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}} \setminus \{id_{\mathbb{C}}\}$ . Wir setzen  $\mathcal{U}^+ := \mathcal{U} \cap \mathbb{B}^+$  und  $\mathcal{U}^- := \mathcal{U} \cap \mathbb{B}^-$ .

Ist  $g \in \mathbb{G}$ , so heißt  $g$  eine  $\mathcal{U}$ -Gerade, wenn es ein  $\tau \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}} \setminus \{id_{\mathbb{C}}\}$  mit  $\tau(g) = g$  gibt.

Ist  $g$  eine  $\mathcal{U}$ -Gerade, so wird eine Translation  $\tau_B \in \mathcal{T}_U$  mit  $B \in \mathbb{C}^* \wedge \tau_B(g) = g$  eine **kleinste Translation in Richtung  $g$**  genannt, wenn  $|\tau_B| \leq |\tau| \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_U \setminus \{id_{\mathbb{C}}\}$  mit  $\tau(g) = g$  ist. Ferner heißt  $g \in \mathbb{G}$  eine  **$\mathbb{S}$ -Achse**, wenn  $\tilde{g} \in \mathcal{U}^-$  ist, und eine  **$\mathbb{G}$ l-Achse**, wenn  $\tilde{g} \notin \mathcal{U}^- \wedge g = a_\psi$  für ein  $\psi \in \mathcal{U}^-$  ist.

Bevor wir auf Friesgruppen näher eingehen, beweisen wir zunächst die folgenden allgemeinen Aussagen:

**(3.16) Satz.** Für jedes  $r \in \mathbb{R}_+$  ist  $\mathcal{T}_{\leq r} := \{\tau \in \mathcal{T}_U \mid |\tau| \leq r\}$  eine endliche Teilmenge von  $\mathcal{T}_U$ .

*Beweis:* Es sei  $r \in \mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{M} := \{\tau(0) \mid \tau \in \mathcal{T}_{\leq r}\}$ . Dann ist  $|\mathbb{M}| = |\mathcal{T}_{\leq r}|$ . Angenommen, es ist  $|\mathbb{M}| = \infty$ . Dann gibt es eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $A_n \in \mathbb{M} \wedge A_n \neq A_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$ , und wegen  $|A_n| \leq r \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Diese besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $B_n \in \mathbb{M} \wedge B_n \neq B_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$ , und dann gibt es  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $0 < |B_n - B_m| = |B_n - B_m| < |\tau_A|$ . Wegen  $\tau_{B_n - B_m} = \tau_{B_n} \circ \tau_{B_m}^{-1} \in \mathcal{T}_U$  widerspricht dies der Minimalität von  $|\tau_A|$ . Deshalb sind  $\mathbb{M}$  und  $\mathcal{T}_{\leq r}$  endlich.  $\square$

**(3.17) Corollar.** Ist  $g$  eine  $\mathcal{U}$ -Gerade, so existiert eine kleinste Translation  $\tau_B$  in Richtung  $g$ , und dann ist  $\boxed{\mathcal{T}_U(g) := \langle \tau_B \rangle = \{\tau_{mB} \mid m \in \mathbb{Z}\}}$  die Menge aller Translationen in Richtung  $g$ . Neben  $\tau_B$  ist nur noch  $\tau_{-B}$  eine kleinste Translation in Richtung  $g$ .

*Beweis:* Die Existenz von  $\tau_B$  folgt aus (3.16), und offenbar ist  $\tau_{mB} \in \{\tau \in \mathcal{T}_U \mid \tau(g) = g\} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ . Ist andererseits  $\tau_C \in \mathcal{T}_U$  mit  $\tau_C(g) = g$ , so gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $C = \lambda B$  und weiter dann ein  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $|n - \lambda| < 1$ . Es folgt  $\tau_{nB - C} = \tau_{nB} \circ \tau_C^{-1} \in \mathcal{T}_U \wedge \tau_{nB - C}(g) = g \wedge |\tau_{nB - C}| = |nB - C| = |n - \lambda| \cdot |B| < |\tau_B|$ . Mit der Minimalität von  $|\tau_B|$  erhalten wir  $|\tau_{nB - C}| = 0$ , also  $\tau_C = \tau_{nB}$ .  $\square$

Ist  $\sigma \in \mathcal{U}^- \cap \mathbb{S}$ , so werde  $\tau_\sigma := id_{\mathbb{C}}$  der **Schub von  $\sigma$**  genannt. Damit folgt

**(3.18) Satz.** Ist  $\tau_B$  eine kleinste Translation in Richtung einer  $\mathcal{U}$ -Geraden  $g$ , so gilt:

- (1) Gibt es ein  $D \in g$  mit  $\tilde{D} \in \mathcal{U}$ , so ist  $\mathcal{P}_U(g) := \{\tilde{X} \mid X = D + \frac{m}{2}B \wedge m \in \mathbb{Z}\}$  die Menge aller Punktspiegelungen aus  $\mathcal{U}$ , die  $g$  festlassen. Für  $\tau \in \mathcal{T}_U(g)$  und  $\tilde{X} \in \mathcal{P}_U(g)$  ist  $\tau \circ \tilde{X} = \tilde{X} \circ \tau^{-1}$ . Es ist  $\langle \tau_B, \tilde{D} \rangle = \mathcal{T}_U(g) \cup \mathcal{P}_U(g)$ .
- (2) Ist  $g$  eine  $\mathbb{S}$ -Achse, so ist  $\mathcal{U}^-(g) := \{\tau_{mB} \circ \tilde{g} \mid m \in \mathbb{Z}\}$  die Menge aller Elemente aus  $\mathcal{U}^-$  mit der Achse  $g$ . Für  $\tau \in \mathcal{T}_U(g)$  und  $\psi \in \mathcal{U}^-(g)$  ist  $\tau \circ \psi = \psi \circ \tau$ . Ferner ist  $\langle \tau_B, \tilde{g} \rangle = \mathcal{T}_U(g) \cup \mathcal{U}^-(g)$ .
- (3) Ist  $g$  eine  $\mathbb{G}$ l-Achse, so ist  $\mathcal{U}^-(g) := \{\tau_{mB/2} \circ \tilde{g} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge m/2 \notin \mathbb{Z}\}$  die Menge aller Elemente aus  $\mathcal{U}^-$  mit der Achse  $g$ . Für  $\tau \in \mathcal{T}_U(g)$  und  $\psi \in \mathcal{U}^-(g)$  ist  $\tau \circ \psi = \psi \circ \tau$ . Ferner ist  $\langle \tau_{B/2}, \tilde{g} \rangle = \mathcal{T}_U(g) \cup \mathcal{U}^-(g)$ .
- (4) Ist  $\psi = \tilde{a} \circ \tau = \tau \circ \tilde{a} \in \mathcal{U}^-$  mit  $a_\psi = a \perp g \wedge \tau_\psi = \tau$ , so ist  $\{\tau_{mB} \circ \psi \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{\tilde{h} \circ \tau \mid h = \tau_{mB/2}(a) \wedge m \in \mathbb{Z}\}$  die Menge aller Elemente aus  $\mathcal{U}^-$  mit dem Schub  $\tau$  und einer zu  $g$  orthogonalen Achse. Überdies gilt
  - (i)  $\tau_{mB} \circ \psi = \tau_{mB/2} \circ \psi \circ \tau_{mB/2}^{-1} = \psi \circ \tau_{-mB}$ ,
  - (ii)  $a_{\tau_{mB} \circ \psi} = \tau_{mB/2}(a_\psi) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis:* (1) Nach (2.15) und (2.35)(4) ist  $\tau_{mB} \circ \tilde{D} = \tilde{D} \circ \tau_{-mB}$  für jedes  $m \in \mathbb{Z}$  eine Punktspiegelung aus  $\mathcal{U}$  mit dem Fixpunkt  $\frac{1}{2}(D + \tau_{mB}(\tilde{D}(D))) = \frac{1}{2}(D + mB + D) = D + \frac{m}{2}B \in g$ . Ist  $E \in g$  mit  $\tilde{E} \in \mathcal{U}$ , so ist  $\tilde{E} \circ \tilde{D} \stackrel{(2.15)}{=} \tau_{2(E-D)} \stackrel{(3.17)}{=} \tau_{nB} \in \mathcal{T}_U(g)$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ , also  $E = D + nB/2$ . Mit (2.15) impliziert dies die Behauptung.

(2) Nach (2.22) ist  $\tau_{mB} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tau_{mB}$  für jedes  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  eine Gleitspiegelung mit der Achse  $g$ . Ist  $\psi \in \mathcal{U}^-$  mit  $a_\psi = g$ , so ist  $\psi \circ \tilde{g} = \tau_\psi \stackrel{(3.17)}{=} \tau_{nB} \in \mathcal{T}_\mathcal{U}(g)$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ , also  $\psi = \tau_{nB} \circ \tilde{g}$ . Mit (2.22) impliziert dies die Behauptung.

(3) Es sei  $\tilde{g} \notin \mathcal{U}$ , und es sei  $\psi \in \mathcal{U}^-$  mit  $g = a_\psi$ . Wegen  $\mathcal{T}_\mathcal{U}(g) \ni \psi \circ \psi = \tau_\psi \circ \tau_\psi$  ist  $\tau_\psi \circ \tau_\psi \stackrel{(3.17)}{=} \tau_{mB}$  mit  $m \in \mathbb{Z}$ , also  $\tau_\psi = \tau_{mB/2}$  und  $\psi = \tau_{mB/2} \circ \tilde{g}$ . Wäre  $m/2 \in \mathbb{Z}$ , so wäre  $\tau_\psi \in \mathcal{T}_\mathcal{U}(g)$ , also  $\tilde{g} = (\tilde{g} \circ \tau_\psi) \circ \tau_\psi^{-1} = \psi \circ \tau_\psi^{-1} \in \mathcal{U}$  entgegen der Voraussetzung. Deshalb ist  $m/2 \notin \mathbb{Z}$ . Für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $\tau_{(n+m/2)B} \circ \tilde{g} = \tau_{nB} \circ \tau_{mB/2} \circ \tilde{g} = \tau_{nB} \circ \psi = \psi \circ \tau_{nB} \in \mathcal{U}$ . Deshalb ist auch  $\tau_{B/2} \circ \tilde{g} \in \mathcal{U}$ , und damit folgt die Behauptung.

(4) Ist  $m \in \mathbb{Z}$ , so gibt es nach (2.21)  $h, k \in \mathbb{G}$  mit

$$h \parallel k \parallel a \wedge \tau_{mB} = \tilde{h} \circ \tilde{a} \wedge \tau_{mB/2} = \tilde{h} \circ \tilde{k} = \tilde{k} \circ \tilde{a}.$$

Nach (2.21) ist  $\tau_{mB/2}(a) = h$ , und mit (2.22) erhalten wir

$$(\tilde{h} \circ \tilde{a}) \circ (\tilde{a} \circ \tau) = \tilde{h} \circ \tau = (\tilde{h} \circ \tilde{k}) \circ (\tilde{a} \circ \tau) \circ (\tilde{a} \circ \tilde{k}) = (\tilde{a} \circ \tau) \circ (\tilde{a} \circ \tilde{h}),$$

d.h. es folgt (i) und die Gleichheit der aufgeführten Mengen. Mit (2.35)(5) führt (i) auf (ii).

Ist nun  $l = \tau_{\lambda B}(a)$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  und mit  $\tilde{l} \circ \tau \in \mathcal{U}$ , so ist  $\mathcal{U} \ni (\tilde{l} \circ \tau) \circ \psi^{-1} = (\tilde{l} \circ \tau) \circ (\tau^{-1} \circ \tilde{a}) = \tilde{l} \circ \tilde{a} \stackrel{2.21}{=} \tau_{2\lambda B} \stackrel{3.17}{=} \tau_{nB}$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ , also  $\lambda = n/2$ . Damit ist alles gezeigt.  $\square$

**(3.19)** Wir bezeichnen eine Gleitspiegelung als **wesentlich**, wenn ihr Schub *nicht* in  $\mathcal{T}_\mathcal{U}$  liegt, sonst als **unwesentlich**. Die in (3.18)(3) erfaßten Gleitspiegelungen sind wesentlich, nicht dagegen die aus (3.18)(2). Im weiteren sei  $\mathcal{U}_w^-$  stets die Menge aller wesentlichen Gleitspiegelungen aus  $\mathcal{U}^-$ .

Eine diskrete Untergruppe  $\mathcal{U}$  von  $\mathbb{B}(\circ)$  heißt **Friesgruppe**, wenn sie echte Translationen enthält und wenn diese sämtlich die gleiche Richtung haben.

Im folgenden sei  $\mathcal{U}$  stets eine Friesgruppe.

Nach (3.17) gibt es ein  $A \in \mathbb{C}^*$  mit  $\boxed{\mathcal{T}_\mathcal{U} = \{\tau_{mA} \mid m \in \mathbb{Z}\} = \langle \tau_A \rangle}$ .

Die zu  $\mathbb{R}A$  parallelen Geraden sind jetzt die  $\mathcal{U}$ -Geraden im Sinne von (3.15). Da  $\tau_A$  und  $\tau_{-A}$  die einzigen Translationen kleinster Länge in  $\mathcal{T}_\mathcal{U}$  sind, führt (2.35)(4) auf

(1) Für jedes  $\varphi \in \mathcal{U}$  ist  $\varphi \circ \tau_A \circ \varphi^{-1} \in \{\tau_A, \tau_{-A}\}$ .

Ist  $\delta_{D,\alpha} \in \mathcal{U}$  mit  $D \in \mathbb{C} \wedge \alpha \in [0, 2\pi[$ , so ist dann  $e^{i\alpha} \cdot A \in \{A, -A\}$  gemäß (2.35)(4), also  $\alpha \in \{0, \pi\}$ . Demnach gilt

(2) Jede echte in  $\mathcal{U}$  enthaltene Drehung ist eine Punktspiegelung.

Mit (2.34)(4) folgt außerdem

(3) Ist  $\eta \in \mathcal{U}^-$ , so ist  $\eta(\mathbb{R}A) \parallel \mathbb{R}A$ .

(4) Ist  $\eta \in \mathcal{U}^- \cap \mathbb{S}$ , so ist  $a_\eta \parallel \mathbb{R}A \vee a_\eta \perp \mathbb{R}A$ .

(5) Ist  $\eta \in \mathcal{U}^- \setminus \mathbb{S}$ , so ist  $a_\eta \parallel \mathbb{R}A$ .

Denn es ist  $\eta \circ \eta \in \mathcal{T}_\mathcal{U} \setminus \{id_{\mathbb{C}}\}$ , also  $\tau_\eta = \tau_{mA/2}$  mit  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Weiter folgt

(6) Sind  $\varphi, \psi \in \mathcal{U}^-$  mit  $a_\varphi \parallel a_\psi \parallel \mathbb{R}A$ , so ist  $a_\varphi = a_\psi$ .

Denn sonst wäre  $\varphi \circ \psi \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_\mathcal{U}$  gemäß (2.24).

(7) Ist  $D \in \mathbb{C}$  mit  $\tilde{D} \in \mathcal{U}$  und ist  $\varphi \in \mathcal{U}^-$  mit  $a_\varphi \parallel \mathbb{R}A$ , so ist  $D \in a_\varphi$ .

Denn nach (2.24) wäre sonst  $\psi := \tilde{D} \circ \varphi \in \mathcal{U}^- \setminus \mathbb{S}$  mit  $a_\psi \perp \mathbb{R}A$ . Mit (7) und (3.18)(1) folgt

(8) Gibt es ein  $D \in \mathbb{C}$  mit  $\tilde{D} \in \mathcal{U}$ , so ist  $\mathcal{U}^+ = \langle \tau, \tilde{D} \rangle = \mathcal{T}_\mathcal{U} \cup \{\tilde{X} \mid X = D + \frac{m}{2}A \wedge m \in \mathbb{Z}\}$ .

**(3.20)** Unter Verwendung von (3.18) und (3.19) können wir nun die sieben Friesgruppen angeben. Welche Abbildungen „im wesentlichen“ vorhanden sind, geben wir *links* jeweils für eine Strecke  $[X, \tau_A(X)] = [X, X + A]$  mit einem  $X \in \mathbb{C}$  an, die auch „Hauptabschnitt“ genannt wird, denn was hier an Abbildungen aufgeführt ist, findet sich – durch Transformieren mit  $\tau_{mA}$  – bei jeder der Strecken  $[X+mA, X+(m+1)A]$  mit  $m \in \mathbb{Z}$  wieder. Ein Punkt (gezeichnet als kleiner Kreis) steht hier für eine Punktspiegelung, eine „kräftige“ durchgezogene Linie für eine  $\mathbb{S}$ -Achse und eine gestrichelte Linie für eine  $\mathcal{G}l$ -Achse. Nach (3.18)(2),(3),(4) und (3.19) sind mit diesen Achsentypen die sämtlichen Elemente von  $\mathcal{U}^-$  beschrieben.

In der Mitte führen wir eine Bezeichnung und ein oder zwei Erzeugendensysteme für die Friesgruppe  $\mathcal{U}$  auf, und *rechts* geben wir eine Menge  $M$  an, deren Symmetriegruppe isomorph zu  $\mathcal{U}$  ist. Bei den Bezeichnungen steht „F“ für Friesgruppe, „1“ für  $id_{\mathbb{C}}$ , „2“ für Drehung der Ordnung 2, „m“ für „mirror“ (Spiegel) und „g“ für wesentliche Gleitspiegelung.

Die sieben Friesgruppen

$\xrightarrow{\tau_A}$	<b>F1</b> $\mathcal{U} = \mathcal{U}^+ = \langle \tau_A \rangle$	... p p p p p p p ...
- - - $\eta$ - - -	<b>F1g</b> $\mathcal{U} = \langle \eta \rangle, \eta \circ \eta = \tau_A$	... p b p b p b p ...
$\xrightarrow{h}$	<b>F1m  </b> $\mathcal{U} = \langle \tau_A, \tilde{h} \rangle, h \parallel \mathbb{R}A$	... E E E E E E ...
k	<b>F1m⊥</b> $\mathcal{U} = \langle \tau_A, \tilde{k} \rangle, k \perp \mathbb{R}A$	... A A A A A A ...
$\overset{\circ}{x} \quad \overset{\circ}{y} \quad \overset{\circ}{x+A}$	<b>F2</b> $\mathcal{U} = \mathcal{U}^+ = \langle \tau_A, \tilde{X} \rangle = \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle$	... / / / / / / ...
$\overset{\circ}{x} \xrightarrow{h} \overset{\circ}{x+A}$	<b>F2m  </b> $\mathcal{U} = \langle \tau_A, \tilde{X}, \tilde{h} \rangle, h \parallel \mathbb{R}A$	... H H H H H ...
- $\overset{\circ}{x}$ -   $\overset{\circ}{k}$ -   - $\overset{\circ}{x+A}$ -	<b>F2m⊥</b> $\mathcal{U} = \langle \tau_A, \tilde{X}, \tilde{k} \rangle, k \perp \mathbb{R}A$	... $\wedge \wedge \wedge \wedge \wedge \wedge$ ...

Es ist ersichtlich, daß es sich hier um Friesgruppen handelt, die sich z.B. als Symmetriegruppen der rechts angegebenen Muster ergeben.

Zu klären bleibt nun aber, ob es nicht noch weitere Friesgruppen gibt. Dies können wir wie folgt ausschließen:

**F1, F2**: Es sei  $\mathcal{U}^- = \emptyset$ . Dann liegt der Fall F1 vor, wenn es keine Punktspiegelung gibt, sonst der Fall F2 (vgl. (3.19)(8)).

**F1g, F1m||, F1m⊥**: Wenn  $\mathcal{U}^- \neq \emptyset$  und  $\mathcal{U}^+ = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  ist, dann sind alle Achsen der Elemente von  $\mathcal{U}^-$  parallel, denn sonst wäre  $\mathcal{U}^+ \neq \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  gemäß (2.21). Nach (3.18) und (3.19) liegt dann notwendig einer der angegebenen Fälle vor.

**F2m||**: Es gebe ein  $X \in \mathbb{C}$  mit  $\tilde{X} \in \mathcal{U}^+$  und ein  $h \in \mathbb{G}$  mit  $\tilde{h} \in \mathcal{U}^-$  und mit  $h \parallel \mathbb{R}A$ . Nach (3.19)(8) ist  $\mathcal{U}^+ = \langle \tau_A, \tilde{X} \rangle$ . Nach (3.19)(7) ist  $X \in h$ , und nach (2.24) ist  $\tilde{X} \circ \tilde{h} = \tilde{k}$  für  $k := (X \perp h)$ . Nach (3.18)(2),(3),(4) und (3.19) gibt es in  $\mathcal{U}^-$  nur die aufgeführten Spiegelungen und die zur  $\mathbb{S}$ -Achse  $h$  gehörigen Gleitspiegelungen.

**F2m $\perp$** : Es gebe ein  $\psi \in \mathcal{U}^-$  und ein  $X \in \mathbb{C}$  mit  $\tilde{X} \in \mathcal{U}^+$ , aber es liege nicht der Fall F2m $\parallel$  vor. a) Ist  $a_\psi \parallel \mathbb{R}A$ , so ist  $X \in a_\psi$  gemäß (3.19)(7). Überdies führen (2.24) und (3.19)(5) auf  $\tilde{X} \circ \psi = \tilde{k}$  mit  $k \in \mathbb{G} \wedge k \perp \mathbb{R}A$ . b) Ist  $a_\psi \perp \mathbb{R}A$ , so führt (3.19)(5) auf  $\psi = \tilde{k}$  mit  $k := a_\psi$ , und nach (2.24) ist  $\eta := \tilde{X} \circ \tilde{k} \in \mathcal{U}^-$  mit  $a_\eta \parallel \mathbb{R}A$ . c) Nach a), b) und (3.18)(2),(3) ist  $g := (X \parallel \mathbb{R}A)$  im vorliegenden Fall eine  $\mathcal{G}l$ -Achse, und die Elemente von  $\mathcal{U}^-$  sind gemäß (3.18)(3),(4) zu beschreiben. d) Ist  $(Y, h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{G}$  mit  $\tilde{Y}, \tilde{h} \in \mathcal{U}$ , so führt (2.24) auf  $Y \notin h$ , und wegen  $(\tilde{h}(Y)) \sim \stackrel{(2.35)(3)}{=} \tilde{h} \circ \tilde{Y} \circ \tilde{h} \in \mathcal{U}$  und  $h \stackrel{(2.17)(3)}{=} s_{Y, \tilde{h}(Y)}$  trifft dann jede Spiegelachse die Mitte zwischen zwei Zentren von Punktspiegelungen aus  $\mathcal{U}$ . Das ist der durch F2m $\perp$  beschriebene Fall.

**(3.21)** Die Frage, wie man die Friesgruppe eines möglicherweise komplizierten Musters erkennt, ist nicht immer leicht zu beantworten.

Wir empfehlen folgendes Vorgehen:

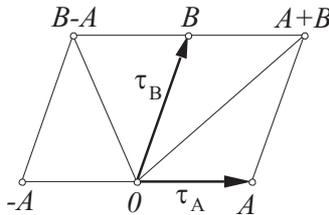
1. Man bestimmt eine Translation kleinster Länge.
2. Man prüft, ob es Punktspiegelungen gibt.
3. Man prüft, ob es Geradenspiegelungen gibt.

Je nachdem, ob vorhandene Achsen parallel oder senkrecht zur Translationsrichtung sind, ergeben sich dann die entsprechenden Fälle.

### E. Die siebzehn Ornamentgruppen

**(3.22)** Eine diskrete ebene Bewegungsgruppe heißt **Ornamentgruppe**, wenn sie echte Translationen in verschiedener Richtung enthält.

Im folgenden sei  $\mathcal{U}$  stets eine Ornamentgruppe, und wieder sei  $\mathcal{T}_\mathcal{U} := \mathcal{T} \cap \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U}^+ := \mathcal{U} \cap \mathbb{B}^+$ ,  $\mathcal{U}^- := \mathcal{U} \cap \mathbb{B}^-$ , und  $\mathcal{U}_w^-$  sei die Menge aller wesentlichen Gleitspiegelungen (vgl. (3.19)).



Nach (3.16) gibt es  $A, B \in \mathbb{C}^*$  mit  $\mathbb{R}A \neq \mathbb{R}B \wedge \tau_A, \tau_B \in \mathcal{T}_\mathcal{U}$ ,

so daß  $\boxed{|\tau_A| \leq |\tau| \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_\mathcal{U} \setminus \{id_{\mathbb{C}}\}}$  ist

und daß  $\boxed{|\tau_B| \leq |\tau_C| \quad \forall \tau_C \in \mathcal{T}_\mathcal{U} \text{ mit } C \notin \mathbb{R}A}$  gilt.

Die Möglichkeit  $|\tau_A| = |\tau_B|$  ist hierbei nicht ausgeschlossen. Indem wir ggf.  $A$  gegen  $-A$  austauschen, können wir o.B.d.A.

von  $\boxed{\angle(\tau_A, \tau_B) := \angle(A, B) \leq 90^\circ}$  ausgehen.

Für alles weitere bleiben  $A$  und  $B$  fest gewählt. Wir bezeichnen  $\mathbb{R}A$  und  $\mathbb{R}B$  als **erste** und **zweite Hauptrichtung** von  $\mathcal{T}_\mathcal{U}$ , ferner  $\mathbb{R}(B-A)$  und  $\mathbb{R}(A+B)$  als **erste** und **zweite Diagonalrichtung** von  $\mathcal{T}_\mathcal{U}$ .

Wegen der Minimaleigenschaften von  $\tau_A$  und  $\tau_B$  ist  $|\tau_B| \leq |\tau_{B-A}|$ , d.h. im Dreieck  $\{0, A, B\}$  ist  $|A| \leq |B| \leq |B-A|$ , und nach (2.33)(9) ist dann  $60^\circ \leq \angle(A, B)$ . Folglich gilt

(1)  $\boxed{60^\circ \leq \angle(A, B) \leq 90^\circ}$ . Aus  $\angle(A, B) \leq 90^\circ$  folgt  $0 \leq A \circ B$  gemäß (2.33)(6), also  $-2A \circ B \leq 2A \circ B$  und damit  $|B-A|^2 \leq |A+B|^2$ . Dies impliziert

(2)  $\boxed{|\tau_A| \leq |\tau_B| \leq |\tau_{B-A}| \leq |\tau_{A+B}|}$ .

Als für alles weitere wesentliche Aussage zeigen wir nun

**(3.23) Hauptsatz 1.** *Es ist  $\mathcal{T}_\mathcal{U} = \{\tau_{mA+nB} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ .*

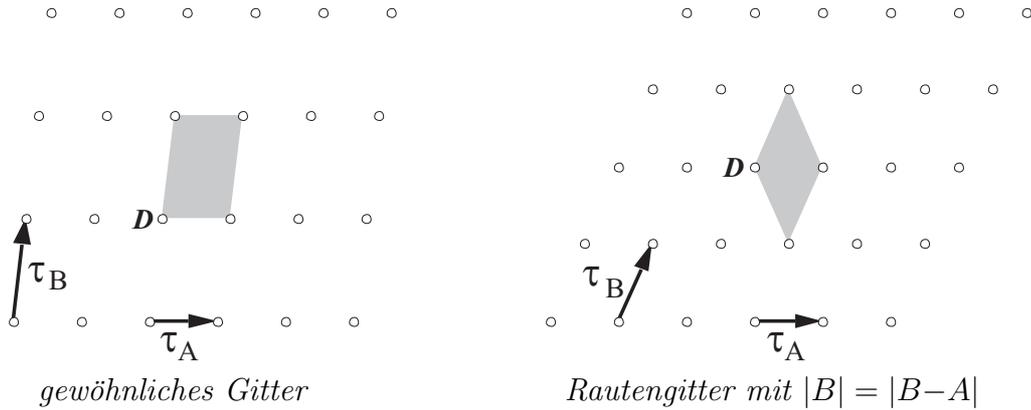
*Beweis:* 1) Es ist  $\tau_{mA+nB} = \tau_A^m \circ \tau_B^n \in \mathcal{T}_U \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$ .

2) Ist  $C \in \mathbb{C}^*$  mit  $\tau_C \in \mathcal{T}_U$ , so gibt es, da  $\{A, B\}$  eine Basis von  $\mathbb{C}$  ist, Elemente  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $C = xA + yB$ . Weiter existieren dann  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $|x-m| \leq 1/2 \wedge |y-n| \leq 1/2$ . Für  $D := mA + nB$  ist  $\tau_{C-D} = \tau_C \circ \tau_D^{-1} \in \mathcal{T}_U$ , und mit (1.4) folgt

$$|\tau_{C-D}| = |(x-m)A + (y-n)B| < |x-m| \cdot |A| + |y-n| \cdot |B| \leq \frac{1}{2}(|A| + |B|) \leq \frac{1}{2}(|B| + |B|) = |\tau_B|.$$

Nach der Definition von  $B$  führt dies auf  $\tau_{C-D} \in \mathcal{T}_U(\mathbb{R}A)$ , und gemäß (3.17) existiert dann ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $\tau_{C-D} = \tau_{kA}$ . Dies impliziert aber  $\tau_C = \tau_{kA} \circ \tau_D = \tau_{(m+k)A+nB}$ .  $\square$

**(3.24)** Es sei  $D \in \mathbb{C}$ . Dann wird die Punktmenge  $\{\tau_{mA+nB}(D) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$  **das zu  $U$  gehörige Gitter mit dem Ursprung  $D$**  genannt.



Sind  $X, Y \in \mathbb{C}^*$  mit  $\mathbb{R}X \neq \mathbb{R}Y$  und gilt  $\tau_X, \tau_Y \in \mathcal{T}_U$  sowie  $|\tau_X|, |\tau_Y| \leq |\tau_B|$ , so heißt das Parallelogramm  $(D, D+X, D+X+Y, D+Y)$  eine **Hauptzelle** dieses Gitters, und jedes daraus durch Verschieben mit  $\tau_{mA+nB}$  für  $m, n \in \mathbb{Z}$  entstehende Parallelogramm heißt **Zelle** dieses Gitters. Offenbar liegt jeder Punkt von  $\mathbb{C}$  auf dem Rand oder im Inneren einer solchen Zelle.

Sind bestimmte Eigenschaften einer Zelle erkannt, so gelten diese auch für jede andere Zelle, wie man entweder durch Anwenden oder durch Transformieren mit einer geeigneten Translation aus  $\mathcal{T}_U$  erkennt. Deshalb kann man sich bei vielen Untersuchungen auf eine Hauptzelle beschränken.

Ist  $C \in \mathbb{C}^*$  mit  $\tau_C \in \mathcal{T}_U$  und mit  $|\tau_C| = |\tau_A|$ , so wird die Gerade  $\mathbb{R}C$  eine **Minimalrichtung von  $U$**  genannt. Hierzu zeigen wir

**(3.25) Satz.** Die Gruppe  $U$  hat entweder eine oder zwei oder drei Minimalrichtungen. Wenn es drei verschiedene Minimalrichtungen gibt, dann bilden je zwei davon einen  $\mathbb{G}$ -Winkel der Größe  $0^\circ, 60^\circ$  oder  $120^\circ$ .

*Beweis:* Wenn  $U$  (wenigstens) zwei verschiedene Minimalrichtungen hat, so lassen sich diese darstellen als  $\mathbb{R}e^{i\alpha} \cdot A$  und als  $\mathbb{R}e^{i\beta} \cdot A$  mit  $\tau_{e^{i\alpha} \cdot A}, \tau_{e^{i\beta} \cdot A} \in \mathcal{T}_U$ , wobei  $\alpha, \beta \in [0^\circ, 180^\circ]$  sind mit  $0^\circ < \gamma := \beta - \alpha < 180^\circ$ . Weiter sind dann auch  $\tau_{e^{i\alpha}(e^{i\gamma}-1) \cdot A} = \tau_{e^{i\beta} \cdot A} \circ \tau_{-e^{i\alpha} \cdot A} \in \mathcal{T}_U$  und  $\tau_{e^{i\alpha}(e^{i\gamma}+1) \cdot A} = \tau_{e^{i\beta} \cdot A} \circ \tau_{e^{i\alpha} \cdot A} \in \mathcal{T}_U$ .

Wegen der Minimalität von  $|\tau_A|$  folgt  $2-2 \cos \gamma = |e^{i\gamma}-1|^2 \geq 1 \wedge 2+2 \cos \gamma = |e^{i\gamma}+1|^2 \geq 1$ , also  $1/2 \geq \cos \gamma \wedge \cos \gamma \geq -1/2$  und damit (1)  $\boxed{60^\circ \leq \beta - \alpha \leq 120^\circ}$ .

Für den Fall  $\alpha = 0^\circ$  impliziert dies (2)  $\boxed{60^\circ \leq \beta \leq 120^\circ}$ , und für den Fall  $\beta = 180^\circ$

ergibt sich (3)  $\boxed{60^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ}$ . Gilt nun aber  $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ , so führen (1), (2),

(3) auf  $\alpha = 60^\circ$  und  $\beta = 120^\circ$ .  $\square$

**(3.26) Corollar 1.** *In  $\mathcal{T}_U$  gibt es entweder zwei (nämlich  $\tau_A$  und  $\tau_{-A}$ ) oder vier oder sechs Translationen minimaler Länge. Im letzten Fall bilden je zwei dieser Translationen einen Winkel, dessen Größe ein ganzzahliges Vielfaches von  $60^\circ$  ist.*

*Beweis:* Zu jeder Minimalrichtung  $\mathbb{R}C$  mit  $|C| = |A|$  gibt es in  $\mathcal{T}_U(\mathbb{R}C)$  genau zwei Translationen minimaler Länge, nämlich  $\tau_C$  und  $\tau_{-C}$ . Mit (3.25) folgt die Behauptung.  $\square$

**(3.27) Corollar 2.** *Ist  $\mathbb{R}C$  eine Minimalrichtung von  $\mathcal{U}$  mit  $|C| = |A|$ , so ist auch  $\mathbb{R}(\eta(C) - \eta(0)) = (0 \parallel \eta(\mathbb{R}C))$  für jedes  $\eta \in \mathcal{U}$  eine Minimalrichtung von  $\mathcal{U}$ .*

*Beweis:* Nach (2.35)(4) ist  $\eta \circ \tau_C \circ \eta^{-1} = \tau_{\eta(C) - \eta(0)}$  eine Translation aus  $\mathcal{T}_U$  mit minimaler Länge und mit  $\eta(\mathbb{R}C)$  als Fixgerade.  $\square$

Als weiteres wesentliches Resultat erhalten wir die sog. *kristallographische Beschränkung*:

**(3.28) Hauptsatz 2.** *Ist  $\delta$  eine Drehung aus  $\mathcal{U}$ , so hat  $\delta$  die Ordnung 1, 2, 3, 4 oder 6.*

*Beweis:* Sind  $\varphi, \psi \notin \langle \delta \rangle$ , so führt (2.35)(4) auf  $\varphi \circ \tau_A \circ \varphi^{-1}, \psi \circ \tau_A \circ \psi^{-1} \notin \mathcal{T}_U$  mit  $|\varphi \circ \tau_A \circ \varphi^{-1}| = |\psi \circ \tau_A \circ \psi^{-1}| = |\tau_A|$ . Nach (3.26) ist dann  $|\langle \delta \rangle| \leq 6$ . Die Möglichkeit  $|\langle \delta \rangle| = 5$  scheidet aus wegen der Winkelbedingung aus (3.26).  $\square$

**(3.29) Corollar.** *Es liegt genau einer der folgenden Fälle vor<sup>1)</sup>:*

**[D1]** *Es ist  $\mathcal{U}^+ = \mathcal{T}_U$ . Je zwei Achsen von Elementen aus  $\mathcal{U}^-$  sind parallel (falls vorhanden). Es gilt  $|\tau_A| \leq |\tau_B|$  und  $60^\circ \leq \angle(\tau_A, \tau_B) \leq 90^\circ$ .*

**[D2]** *Es gibt Punktspiegelungen in  $\mathcal{U}$ , aber keine Drehungen höherer Ordnung. Je zwei nichtparallele Achsen von Elementen aus  $\mathcal{U}^-$  sind orthogonal (falls vorhanden). Es gilt  $|\tau_A| \leq |\tau_B|$  und  $60^\circ \leq \angle(\tau_A, \tau_B) \leq 90^\circ$ .*

**[D4]** *Es gibt  $\pm 90^\circ$ -Drehungen in  $\mathcal{U}$ , aber weder  $\pm 60^\circ$ - noch  $\pm 120^\circ$ -Drehungen. Je zwei nichtparallele Achsen von Elementen aus  $\mathcal{U}^-$  schneiden sich unter  $45^\circ$  oder  $90^\circ$  oder  $135^\circ$  (falls vorhanden). Es gilt  $|\tau_A| = |\tau_B|$  und  $\angle(\tau_A, \tau_B) = 90^\circ$ .*

**[D3]** *Es gibt  $\pm 120^\circ$ -Drehungen in  $\mathcal{U}$ , aber weder  $\pm 60^\circ$ - noch  $\pm 90^\circ$ - noch  $\pm 180^\circ$ -Drehungen. Je zwei nichtparallele Achsen von Elementen aus  $\mathcal{U}^-$  schneiden sich unter  $60^\circ$  oder  $120^\circ$  (falls vorhanden). Es gilt  $|\tau_A| = |\tau_B|$  und  $\angle(\tau_A, \tau_B) = 60^\circ$ .*

**[D6]** *Es gibt  $\pm 60^\circ$ -Drehungen in  $\mathcal{U}$ , aber keine  $\pm 90^\circ$ -Drehungen. Je zwei nichtparallele Achsen von Elementen aus  $\mathcal{U}^-$  schneiden sich unter  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  oder  $150^\circ$  (falls vorhanden). Es gilt  $|\tau_A| = |\tau_B|$  und  $\angle(\tau_A, \tau_B) = 60^\circ$ .*

*Beweis:* a) Nach (3.28) gibt es nur die aufgelisteten Fälle. Würden die dort ausgeschlossenen Möglichkeiten für Drehungen existieren, so gäbe es nach (2.27)  $30^\circ$ -Drehungen bei **[D4]**, **[D6]** und  $30^\circ$ - oder  $60^\circ$ -Drehungen bei **[D3]**. b) In den Fällen **[D4]**, **[D3]** und **[D6]** kann man  $\tau_A$  mit einer der vorhandenen Drehungen so transformieren, daß eine Translation  $\tau_C \in \mathcal{U}$  mit  $C \notin \mathbb{R}A$  entsteht (vgl. (2.35)). Indem man  $B$  geeignet in  $\{C, -C\}$  wählt, erhält man  $\tau_B \in \mathcal{U}$  mit  $|\tau_B| = |\tau_A|$  und  $\angle(\tau_A, \tau_B) = 90^\circ$  im Falle **[D4]** sowie mit  $\angle(\tau_A, \tau_B) = 60^\circ$  sonst. c) Die Angaben über die Achsen von Elementen aus  $\mathcal{U}^-$  ergeben sich unmittelbar aus (2.36),(5).  $\square$

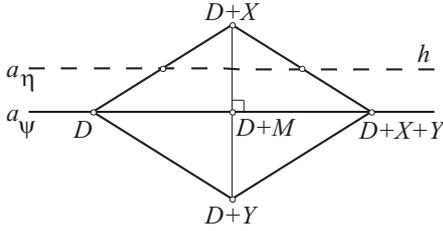
**(3.30)** Mit (3.29) haben wir eine erste grobe Einteilung der verschiedenen Möglichkeiten für  $\mathcal{U}$ . Wenn man ein Ornament mathematisch analysieren möchte, wird man zuerst versuchen, Translationen kürzester Länge zu bestimmen und wird dann prüfen, welcher

<sup>1)</sup> „Dx“ bedeutet:  $\mathcal{U}$  enthält Drehungen der Ordnung  $x$ , aber keine Drehungen höherer Ordnung.

der Fälle aus (3.29) vorliegt. Danach kann man dann anhand der weiter unten aufgeführten zugehörigen Tableaus eine Detailanalyse vornehmen. Bevor wir hierzu kommen, zeigen wir

**(3.31) Satz.** Sind  $\psi \in \mathcal{U}^-$  und  $X \in \mathbb{C}^*$  mit  $\tau_X \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}} \wedge \psi(\mathbb{R}X) \not\parallel \mathbb{R}X$ , so gilt für  $D \in a_\psi$  und für  $Y \in \mathbb{C}$  mit  $\tau_Y = \psi \circ \tau_X \circ \psi^{-1}$ :

- (1) Es ist  $|X|=|\tau_X|=|\tau_Y|=|Y| \wedge \mathbb{R}X \neq \mathbb{R}Y \wedge X+Y \perp X-Y$  mit  $X+Y, X-Y \in \mathbb{C}^*$ .
- (2)  $(D, D+X, D+X+Y, D+Y)$  ist eine Raute mit  $\langle D+X, D+Y \rangle \perp a_\psi$ .
- (3) Es ist  $a_\psi = \langle D, D+X+Y \rangle$  und  $\tau_{X+Y}(a_\psi) = a_\psi$ .
- (4) Für  $\eta := \tau_X \circ \psi$  gilt  $\eta \in \mathcal{U}^- \wedge a_\eta = \tau_{X/2}(a_\psi) \wedge \tau_\eta = \tau_\psi \circ \tau_{(X+Y)/2}$ .
- (5) Es sei  $|\tau_X| \leq |\tau_B|$ . Dann sind  $\tau_{X+Y}$  und  $\tau_{X-Y}$  kleinste Translationen in ihren Richtungen, und  $a_\eta$  ist genau dann eine  $\mathcal{G}l$ -Achse, wenn  $a_\psi$  eine  $\mathbb{S}$ -Achse ist.



*Beweis:* (1): Nach (2.35)(4) ist  $|X|=|\tau_X|=|\tau_Y|=|Y|$  und  $\mathbb{R}X \not\parallel \psi(\mathbb{R}X) \parallel \mathbb{R}Y$ . Dann ist  $X \neq Y \wedge X \neq -Y$ , d.h. es sind  $X+Y, X-Y \in \mathbb{C}^*$  mit  $0 = |X|^2 - |Y|^2 = (X+Y) \circ (X-Y)$ .

(2), (3):  $(D, D+X, D+X+Y, D+Y)$  ist ein Parallelogramm mit  $|(D+X) - D| = |(D+Y) - D|$ , also

eine Raute. Weiter ist  $\psi = \tilde{a}_\psi \circ \tau_\psi$  und  $\tau_Y = \tilde{a}_\psi \circ \tau_\psi \circ \tau_X \circ \tau_\psi^{-1} \circ \tilde{a}_\psi = \tilde{a}_\psi \circ \tau_X \circ \tilde{a}_\psi$ . Damit folgt  $\tilde{a}_\psi(D+X+Y) = \tilde{a}_\psi \circ \tau_X \circ \tau_Y(D) = \tilde{a}_\psi \circ \tau_X \circ \tilde{a}_\psi \circ \tau_X \circ \tilde{a}_\psi(D) = \tau_Y \circ \tau_X(D) = D+X+Y$ , also  $D+X+Y \in a_\psi$  sowie  $\langle D+X, D+Y \rangle \parallel \mathbb{R}(X-Y) \perp \mathbb{R}(X+Y) \parallel a_\psi$ .

(4) Ist  $M := (X+Y)/2$  und  $h := s_{D+M, D+X}$ , so ist  $\tilde{h} \circ \tilde{a}_\psi \stackrel{(2.21)}{=} \tau_{X-M}$ , also  $\tau_X = \tau_M \circ \tau_{X-M} = \tau_M \circ \tilde{h} \circ \tilde{a}_\psi$  und  $\mathcal{U}^- \ni \eta = \tau_X \circ \tau_\psi \circ \tilde{a}_\psi = \tau_\psi \circ \tau_X \circ \tilde{a}_\psi = \tau_\psi \circ \tau_M \circ \tilde{h}$  mit  $a_\eta = h = \tau_{M/2}(h) = \tau_{M/2} \circ \tau_{(X-M)/2}(a_\psi) = \tau_{X/2}(a_\psi)$  und  $\tau_\eta = \tau_\psi \circ \tau_M$ .

(5): Gäbe es ein  $\lambda \in ]0, 1[$  mit  $\tau_Z \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  für  $Z := \lambda(X+Y)$ , so wäre für  $Z' := (X+Y) - Z$  auch  $\tau_{Z'} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ . Wegen  $|Z| + |Z'| = 2 \cdot |M|$  dürfen wir dann o.B.d.A. von  $|Z| \leq |M|$  ausgehen. Mit dem Satz von Pythagoras ergäbe sich nun  $|\tau_Z| < |\tau_B| \wedge |\tau_{X-Z}| < |\tau_B|$  mit  $\tau_{X-Z} \in \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ , also  $|\tau_Z| = |\tau_A| = |\tau_{X-Z}| < |\tau_B|$ . Damit hätte  $\mathcal{U}$  wenigstens zwei Minimalrichtungen, und  $B$  wäre falsch gewählt. Demnach ist  $\tau_{X+Y}$  eine kleinste Translation in Richtung  $\mathbb{R}(X+Y)$ . Entsprechend ergibt sich die Behauptung für  $\tau_{X-Y}$ .

Ist  $\psi = \tilde{a}_\psi$ , so hat  $\eta$  nach (4) den Schub  $\tau_M$ , und nach (3.18)(2),(3) ist  $a_\eta$  dann eine  $\mathcal{G}l$ -Achse. Ist dagegen  $\tilde{a}_\psi \notin \mathcal{U}$ , so ist  $\tau_{-M} \circ \tilde{a}_\psi \in \mathcal{U}$  gemäß (3.18)(3), und es folgt  $\mathcal{U} \ni \tau_X \circ \tau_{-M} \circ \tilde{a}_\psi = \tau_{X-M} \circ \tilde{a}_\psi \stackrel{(3.18)(4)}{=} \tilde{a}_\eta$ , d.h.  $a_\eta$  ist dann eine  $\mathbb{S}$ -Achse.  $\square$

**(3.32) Corollar.** Ist  $\psi \in \mathcal{U}^-$ , so ist  $a_\psi$  eine  $\mathcal{U}$ -Gerade und entweder eine  $\mathbb{S}$ -Achse oder eine  $\mathcal{G}l$ -Achse. Die Elemente von  $\mathcal{U}^-$  sind bekannt, wenn die  $\mathbb{S}$ -Achsen und die  $\mathcal{G}l$ -Achsen bekannt sind.

*Beweis:* Es gibt ein  $X \in \{A, B\}$  mit  $\mathbb{R}X \not\parallel a_\psi$ . Im Falle  $\mathbb{R}X \parallel a_\psi$  ist  $\tau_X(a_\psi) = a_\psi$ , und andernfalls ist  $a_\psi$  nach (3.31)(3) eine  $\mathcal{U}$ -Gerade. Die verbleibenden Aussagen ergeben sich dann aus (3.18).  $\square$

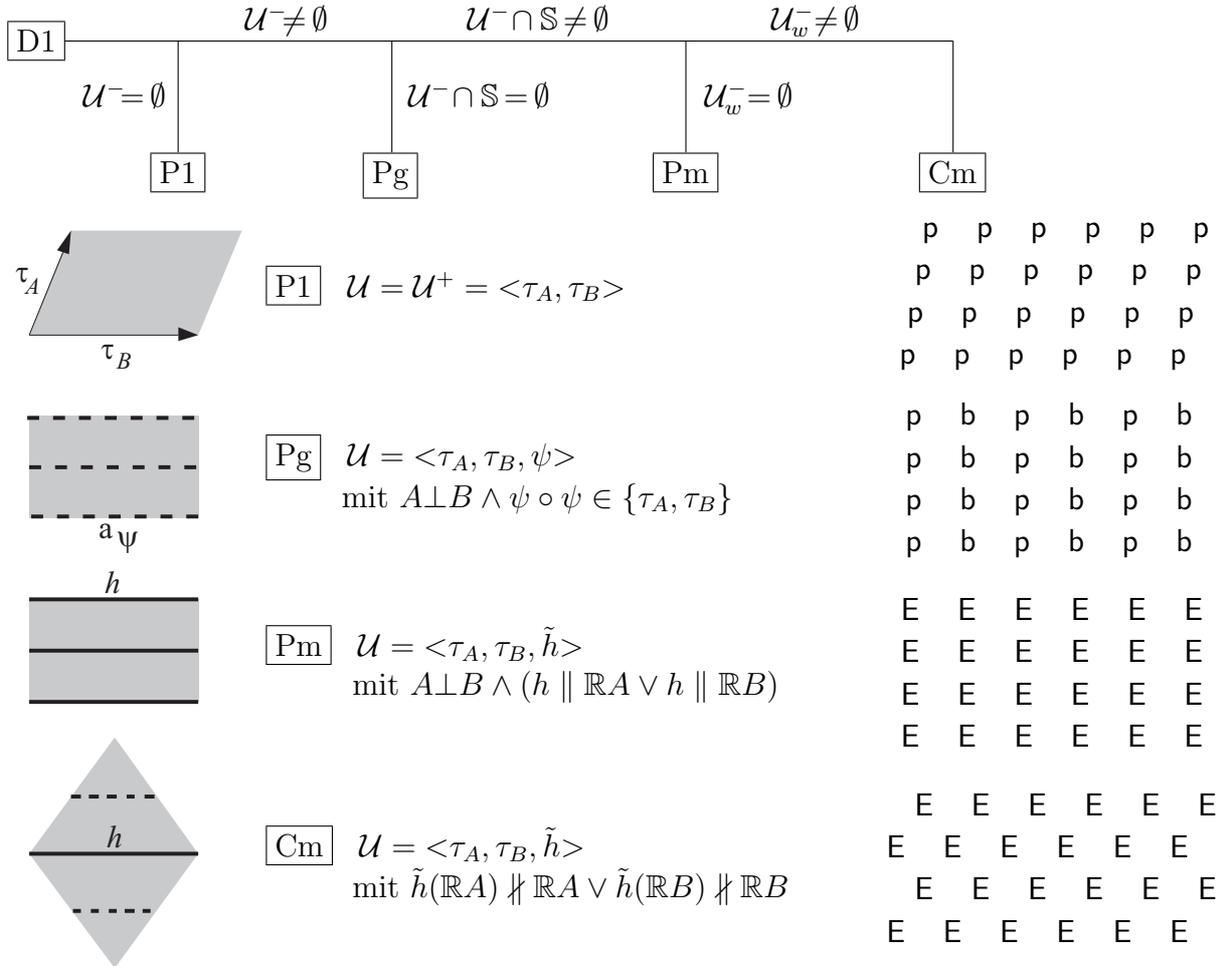
Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun eine genaue Analyse der Ornamentgruppen vornehmen:

**(3.33) Der Fall  $\boxed{D1}$ :**

Wie bei den Friesgruppen geben wir zunächst eine Übersicht an und begründen dann, warum damit alle Möglichkeiten erfaßt sind. An die Stelle des Hauptabschnittes bei den Friesgruppen tritt jetzt die Hauptzelle. Die Angaben zur Hauptzelle sind die gleichen wie

bei jeder gewöhnlichen Zelle. Bei den Bezeichnungen steht „P“ für „Pattern“ (Muster), „C“ für „centered“ (zentriert – das ist der Rautenfall), „m“ für „mirror“ (Spiegel – es gibt Spiegelungen) und „g“ für „wesentliche Gleitspiegelung“. Wir zeichnen  $\mathbb{S}$ -Achsen als kräftige durchgezogene Linien und  $\mathcal{G}$ -Achsen als gestrichelte Linien. Damit beschreiben wir gemäß (3.32) und (3.18) die Elemente von  $\mathcal{U}^-$ .

Analyseschema:



Kommentar:

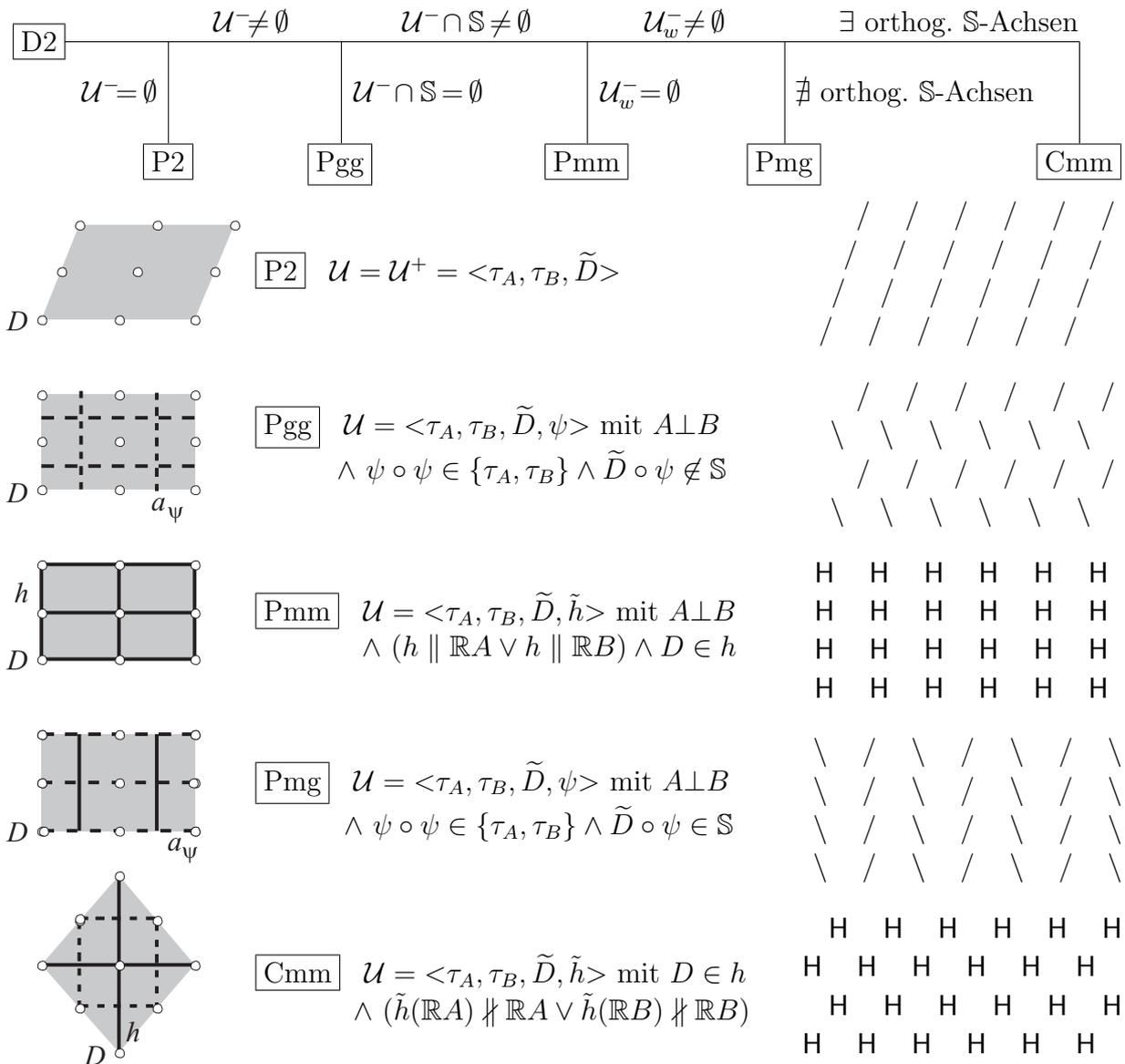
Aus den angegebenen Mustern erkennen wir, daß die aufgeführten vier Fälle unter der Voraussetzung  $\overline{\text{D1}}$  als Ornamentgruppen und als Symmetriegruppen in Erscheinung treten. Es bleibt zu zeigen, daß es keine weiteren Möglichkeiten gibt:

- a) Ist  $\mathcal{U}^- = \emptyset$ , so ergibt sich mit (3.23) der Fall  $\overline{\text{P1}}$ .
- b) Ist  $\psi \in \mathcal{U}^-$  mit  $(\psi(\mathbb{R}A) \not\parallel \mathbb{R}A) \vee (\psi(\mathbb{R}B) \not\parallel \mathbb{R}B)$ , so liegt die in (3.31) erfaßte Situation vor, und insbesondere ist dann  $\mathcal{U}^- \cap \mathbb{S} \neq \emptyset \wedge \mathcal{U}_w^- \neq \emptyset$ . Dies ist der Fall  $\overline{\text{Cm}}$ , dessen Details hinsichtlich der Lage der Achsen durch (3.27), (3.31) und (3.18) erfaßt sind.
- c) Ist  $\psi \in \mathcal{U}^-$  mit  $(\psi(\mathbb{R}A) \parallel \mathbb{R}A) \wedge (\psi(\mathbb{R}B) \parallel \mathbb{R}B)$ , so führen (2.17) und (2.22) auf  $(a_\psi \parallel \mathbb{R}A \wedge a_\psi \perp \mathbb{R}B) \vee (a_\psi \parallel \mathbb{R}B \wedge a_\psi \perp \mathbb{R}A)$ , und insbesondere ist dann  $A \perp B$ . Ist jetzt  $\mathcal{U}^- \cap \mathbb{S} = \emptyset$ , so haben wir den Fall  $\overline{\text{Pg}}$ , sonst den Fall  $\overline{\text{Pm}}$ . Die Details hinsichtlich der Lage der Achsen ergeben sich aus (3.18).

**(3.34) Der Fall  $\boxed{\text{D2}}$ :**

Im weiteren sei der Gitterursprung stets Zentrum einer Drehung größtmöglicher Ordnung  $x$  mit  $x \in \{2, 3, 4, 6\}$ . Durch Transformieren mit den Elementen von  $\mathcal{T}_U$  sind dann alle Gitterpunkte Zentren der Ordnung  $x$ . Wir sprechen kurz von  $x$ -**Zentren** und zeichnen 2-Zentren als kleine Kreise sowie die übrigen Zentren als entsprechende  $x$ -Ecke. Ist  $E$  ein  $x$ -Zentrum, so ist  $\{\varphi \in U \mid \varphi(E) = E\}$  entweder vom Typ  $C_x$  oder vom Typ  $D_x^x$ . Ist  $x \in \{3, 4, 6\}$ , so lassen wir das zu  $E$  gehörige  $x$ -Eck im ersten Fall ungefärbt und füllen es im zweiten schwarz aus.

*Analyseschema:*



*Kommentar:*

Wie bei  $\boxed{\text{D1}}$  bleibt zu zeigen, daß es nur die aufgeführten Möglichkeiten gibt:

a) Nach (3.18)(1) sind neben den Ecken einer Zelle auch die Mitten zwischen diesen Ecken stets Zentren von Punktspiegelungen. Wegen der Minimaleigenschaften von  $\tau_A$  und  $\tau_B$  kann es gemäß (2.15)(3) keine weiteren Punktspiegelungen geben. Damit kennen wir  $U^+$ , und der Fall  $\boxed{\text{P2}}$  ist geklärt.

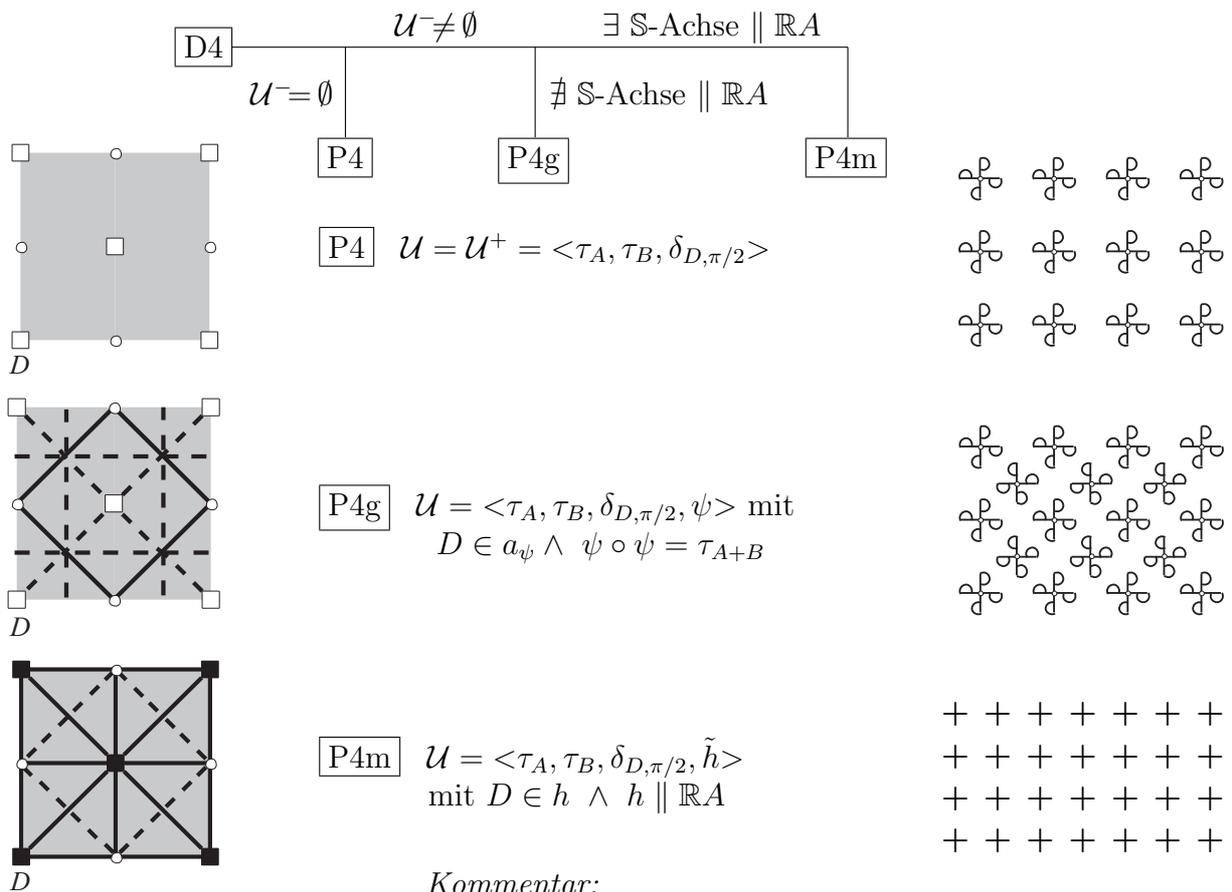
b) Sind  $\tau \in \mathcal{T}_U$ ,  $\varphi \in \mathcal{U}$  und  $X \in \mathbb{C}$  mit  $\tilde{X} \in \mathcal{U}$ , so ist  $\varphi \circ \tau(\tilde{X}) \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \tau) \circ \tilde{X} \circ (\tau^{-1} \circ \varphi^{-1})$  Element von  $\mathcal{U}$  und Punktspiegelung an  $\varphi(\tau(X))$  (vgl. (2.35)). Deshalb permutiert  $\varphi$  die 2-Zentren, und im Fall  $\varphi \in \mathcal{U}^-$  ist  $\frac{1}{2}[(\tau(X) + \varphi(\tau(X)))] \in a_\varphi$ .

c) Ist  $\psi \in \mathcal{U}^-$  und ist  $D \in \mathbb{C}$  mit  $\tilde{D} \in \mathcal{U}$ , so so gilt  $a_\psi \perp a_\eta$  für  $\eta \in \{\tilde{D} \circ \psi, \psi \circ \tilde{D}\}$  gemäß (2.36)(5). Hierbei führt (2.24) auf (1)  $\psi \in \mathbb{S} \wedge D \in a_\psi \Rightarrow \eta \in \mathbb{S} \wedge a_\eta = (D \perp a_\psi)$  und auf (2)  $D \in a_\psi \Leftrightarrow \eta \in \mathbb{S}$ . Im Falle  $(\psi(\mathbb{R}A) \nparallel \mathbb{R}A) \vee (\psi(\mathbb{R}B) \nparallel \mathbb{R}B)$  gilt dann auch  $(\eta(\mathbb{R}A) \nparallel \mathbb{R}A) \vee (\eta(\mathbb{R}B) \nparallel \mathbb{R}B)$ , d.h. jetzt liegt der Fall  $\text{Cm}$  in zwei zueinander orthogonalen Richtungen vor – das ist der Fall  $\text{Cmm}$ .

d) Wie bei  $\text{D1}$  ergibt sich  $A \perp B$ , wenn nicht die Fälle  $\text{P2}$ ,  $\text{Cmm}$  vorliegen. Deshalb sind dann nur noch Fälle möglich, die durch „orthogonale Überlagerung“ von  $\text{Pm}$  und  $\text{Pg}$  entstehen können. Wegen c), (3.18), (3.20), (3.27) und (3.31) sind dies aber genau die Fälle  $\text{Pgg}$ ,  $\text{Pmm}$  und  $\text{Pmg}$ .

**(3.35) Der Fall  $\text{D4}$ :**

*Analyseschema:*



Es ist  $|\tau_A| = |\tau_B| \wedge \angle(\tau_A, \tau_B) = 90^\circ$ . Indem wir ggf.  $A$  mit  $B$  vertauschen, dürfen wir  $B = e^{i\pi/2} \cdot A$  voraussetzen. Über die Informationen der Tabelle hinausgehend bleibt zu zeigen, daß es keine weiteren Möglichkeiten gibt:

a) Es sei  $\delta := \delta_{D, \pi/2}$ . Gemäß der Wahl des Gitterursprungs sind alle Gitterpunkte 4-Zentren und damit zugleich auch 2-Zentren. Die Verteilung der 2-Zentren für eine Zelle ergibt sich aus  $\text{P2}$ . Da  $\tau_A \circ \delta$  einen Zellenmittelpunkt als Fixpunkt hat, wie man durch

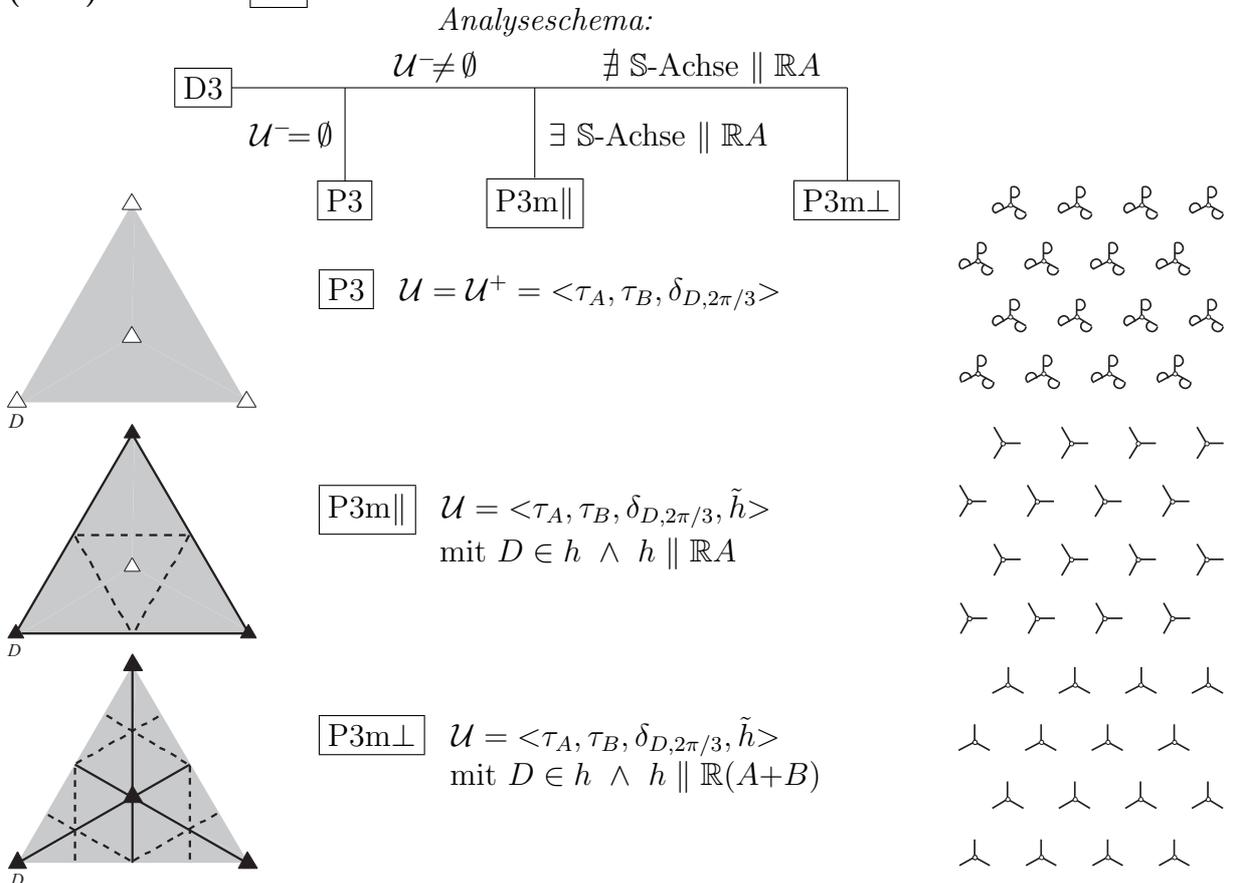
Anwendung auf  $D$  und  $D+A$  bestätigt, ist jeder Zellenmittelpunkt nach (2.36)(3) und (3.24) ein 4-Zentrum. Die Zellenrandmitten sind 2-Zentren, aber keine 4-Zentren wegen der Minimalität von  $\tau_A$  und  $\tau_B$ . Damit folgt der Fall  $\boxed{\text{P4}}$ .

b) Es sei  $\psi \in \mathcal{U}^-$ . Ist  $\eta := \psi \circ \delta^k$  mit  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , so ist  $\angle(a_\psi, a_\eta) = k \cdot \pi/4$  (vgl. (2.36)(5)). Außerdem gilt  $\eta(\mathbb{R}A) \parallel \mathbb{R}A \vee \eta(\mathbb{R}A) \parallel \mathbb{R}B$ , da wir nur die Minimalrichtungen  $\mathbb{R}A$  und  $\mathbb{R}B$  haben. Deshalb ist jede Achse eines Elementes aus  $\mathcal{U}^-$  parallel zu  $\mathbb{R}A$ ,  $\mathbb{R}B$ ,  $\mathbb{R}(A-B)$  oder  $\mathbb{R}(A+B)$ , und jede dieser Geraden tritt als Achsenrichtung auf. Mit (3.31) folgt nun, daß es  $\mathbb{S}$ -Achsen und  $\mathcal{G}$ l-Achsen parallel zu  $\mathbb{R}(A-B)$  und auch parallel zu  $\mathbb{R}(A+B)$  gibt, und aus (3.20) erkennt man, wie die  $\mathbb{S}$ -Achsen relativ zu den 2-Zentren liegen können. Ist  $a_\psi$  Randgerade einer Zelle, so folgt  $\tau_\psi \in \langle \tau_A \rangle \cup \langle \tau_B \rangle$ , d.h. dann ist  $a_\psi$  eine  $\mathbb{S}$ -Achse.

c) Wenn irgendeine  $\mathbb{S}$ -Achse irgend ein 4-Zentrum  $E$  trifft, dann ist nach b) und nach (3.9) jede Achse durch  $E$  und durch  $E + X$  für  $X \in \{A, B, (A+B)/2, (A-B)/2\}$  eine  $\mathbb{S}$ -Achse. Mit  $\mathcal{T}_\mathcal{U}$  überträgt sich dies auf alle 4-Zentren, und in Verbindung mit  $\boxed{\text{Cmm}}$  ergibt sich dann der Fall  $\boxed{\text{P4m}}$ .

d) Liegt nicht der Fall c) vor, so liegen die  $\mathbb{S}$ -Achsen, die ja stets Mittelsenkrechten gewisser 4-Zentren und auch gewisser 2-Zentren sind, notwendig wie in  $\boxed{\text{P4g}}$  angegeben, und nach (3.31) sind die Zelldiagonalen dann  $\mathcal{G}$ l-Achsen. Für die zu  $\mathbb{R}A$  oder  $\mathbb{R}B$  parallelen Achsen besteht jetzt nach (3.34) nur die in  $\boxed{\text{Pgg}}$  beschriebene Möglichkeit, und damit erhalten wir den Fall  $\boxed{\text{P4g}}$ .

**(3.36) Der Fall  $\boxed{\text{D3}}$ :**



*Kommentar:*

Es ist  $|\tau_A| = |\tau_B| = |\tau_{A-B}| \wedge \sphericalangle(\tau_A, \tau_B) = 60^\circ$ . Indem wir ggf.  $A$  mit  $B$  vertauschen, dürfen wir  $B = e^{i\pi/3} \cdot A$  voraussetzen. Über die Informationen der Tabelle hinausgehend bleibt zu zeigen, daß es keine weiteren Möglichkeiten gibt:

a) Offenbar sind  $\{D, D+A, D+B\}$  und  $\{D+A, D+B, D+A+B\}$  gleichseitige Dreiecke mit  $|A| = |B| = |A-B| = |A+B|/\sqrt{3}$ . Demnach besteht jede Zelle aus zwei gleichseitigen Dreiecken, die auch **Halbzellen** genannt werden. Was für eine Halbzelle gezeigt ist, gilt entsprechend für jede andere Halbzelle, wie wir sehen werden.

b) Jede Halbzelle hat einen Schwerpunkt, der auch **Mitte** der Halbzelle genannt wird. Für das Dreieck  $\{D, D+A, D+B\}$  ist dies der Punkt  $M := D+(A+B)/3$ . Mit (2.36)(3) erkennt man durch Anwenden auf  $D$  und  $D+A$ , daß  $\tau_A \circ \delta_{D,2\pi/3} = \delta_{M,2\pi/3}$  ist. Entsprechendes gilt für die zweite Halbzelle mit dem Mittelpunkt  $D+2M$ . Demnach treten neben den Gitterecken auch alle Halbzellmitten als 3-Zentren in Erscheinung. Der minimale Abstand für zwei verschiedene der aufgeführten 3-Zentren ist  $|\tau_A|/\sqrt{3}$ .

c) Nach (3.35) werden die 3-Zentren durch jedes Element von  $\mathcal{U}$  permutiert. Nach (3.29)D3 besteht  $\mathcal{U}^+$  nur aus Translationen und aus Drehungen der Ordnung 3. Gäbe es noch andere als die bereits erwähnten 3-Zentren, so hätte man Elemente  $\delta_{E,2\pi/3}, \delta_{F,4\pi/3} \in \mathcal{U}^+ \setminus \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  mit  $0 < |E-F| < |\tau_A|/\sqrt{3}$ , und dann wäre  $\tau := \delta_{E,2\pi/3} \circ \delta_{F,4\pi/3}$  nach (2.36)(2) ein Element von  $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  mit  $0 < |\tau| < |\tau_A|$ , wie man durch Anwenden von  $\delta_{E,2\pi/3} \circ \delta_{F,4\pi/3}$  auf  $F$  erkennt. Wegen der Minimalität von  $|\tau_A|$  scheidet diese Möglichkeit aus. Damit ist der auf  $\mathcal{U}^- = \emptyset$  bezogene Fall  $\boxed{P3}$  vollständig beschrieben.

d) Es sei  $\psi \in \mathcal{U}^-$ . Ist  $\eta = \psi \circ \delta_{D,2\pi/3}^k$  mit  $k \in \{0, 1, 2\}$ , so ist  $\sphericalangle(a_\psi, a_\eta) = k \cdot \pi/3$  (vgl. (2.36)). Da  $\eta$  die drei Minimalrichtungen  $\mathbb{R}A\|, \mathbb{R}B\|, \mathbb{R}(A-B)\|$  permutiert und da diese sich unter  $0^\circ$  oder  $60^\circ$  oder  $120^\circ$  schneiden, ist  $\sphericalangle(\mathbb{R}A, a_\eta) \in \{0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ\}$  (vgl. (2.36)(5)), und mit (3.29)D3 folgt

$$\text{entweder } \sphericalangle(\mathbb{R}A, a_\eta) \in \{0^\circ, 60^\circ, 120^\circ\} \quad \forall k \in \{0, 1, 2\} \text{ - das ist der Fall } \boxed{P3m\|} \text{ -,}$$

$$\text{oder } \sphericalangle(\mathbb{R}A, a_\eta) \in \{30^\circ, 90^\circ, 150^\circ\} \quad \forall k \in \{0, 1, 2\} \text{ - das ist der Fall } \boxed{P3m\perp} \text{ .}$$

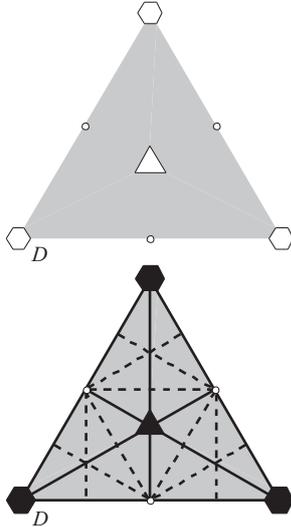
In beiden Fällen kommt wegen  $k \in \{0, 1, 2\}$  jede der Gradzahlen als Winkelgröße vor. Da es stets ein  $X \in \{A, B, A-B\}$  mit  $\eta(\mathbb{R}X) \nparallel \mathbb{R}X$  gibt, existieren nach (3.31) parallel zu  $a_\eta$  sowohl  $\mathbb{S}$ -Achsen als auch  $\mathcal{G}l$ -Achsen.

e) Zu jeder  $\mathbb{S}$ -Achse  $h$  gibt es ein  $X \in \{A, B, A-B\}$  mit  $h \nparallel D+\mathbb{R}X$ , und dann gibt es auf  $D+\mathbb{R}X$  zwei 3-Zentren  $E, F$  mit  $\emptyset \neq [E, F] \cap h =: \{G\}$  so, daß  $|E-F| = |\tau_A|$  und  $|G-E| \leq |\tau_A|/2$  ist. Dann ist das 3-Zentrum  $\tilde{h}(E)$  eine Ecke oder die Mitte einer Halbzelle mit Eckpunkt  $E$ , und dies hat wegen  $h = s_{E, \tilde{h}(E)} \wedge |E - \tilde{h}(E)| \leq |\tau_A|$  zur Folge, daß  $h$  ein 3-Zentrum (evtl. in einer Nachbarhalbzelle) trifft. Damit ist gezeigt, daß jede  $\mathbb{S}$ -Achse ein 3-Zentrum trifft.

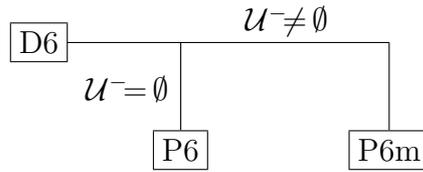
f) Es sei  $\mathcal{U}^- \neq \emptyset$ . Bisher war der Gitterursprung  $D$  ein beliebiges 3-Zentrum. Wegen e) dürfen wir uns  $D$  derart gewählt denken, daß es ein  $h \in \mathbb{G}$  mit  $\boxed{\tilde{h} \in \mathcal{U}^- \wedge D \in h}$  gibt. Nach (3.9) ist dann jeder Gitterpunkt das Zentrum einer in  $\mathcal{U}$  enthaltenen  $D_3^3$ .

Die in d) für den Fall  $\boxed{P3m\|}$  bzw.  $\boxed{P3m\perp}$  angegebene Winkelaussage gilt nach (3.29)D3 für alle  $\eta \in \mathcal{U}^-$ . Verbinden wir dies mit (3.18) und (3.31), so haben wir eine vollständige Beschreibung dieser Fälle.

(3.37) Der Fall  $\boxed{D6}$ :

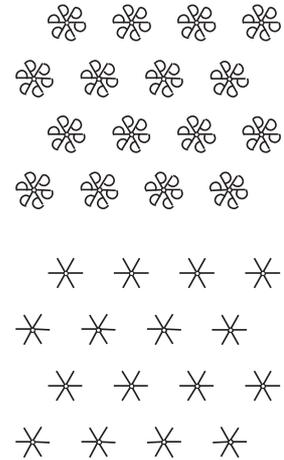


Analyseschema:



$$\boxed{P6} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}^+ = \langle \tau_A, \tau_B, \delta_{D, \pi/3} \rangle$$

$$\boxed{P6m} \quad \mathcal{U} = \langle \tau_A, \tau_B, \delta_{D, \pi/3}, \tilde{h} \rangle \text{ mit } D \in h$$



Kommentar:

a) Da jedes 6-Zentrum zugleich auch 3-Zentrum und 2-Zentrum ist und da  $|\tau_A| = |\tau_B| = |\tau_{A-B}|$  mit  $\angle(\tau_A, \tau_B) = 60^\circ$  ist, lassen sich einige Ergebnisse aus (3.34) und (3.36) auf die vorliegende Situation übertragen.

Zunächst bemerken wir, daß jedes Element aus  $\mathcal{U}$  separat die 2-Zentren, die 3-Zentren und die 6-Zentren permutiert, daß jeder Gitterpunkt ein 6-Zentrum ist und daß es wie in (3.36) genügt, Halbzellen zu betrachten. Nach (3.36)b) und (3.34)a) ist jede Halbzellenmitte (wenigstens) ein 3-Zentrum und jede Seitenmitte eines Halbzellenrandes (wenigstens) ein 2-Zentrum. Die Existenz weiterer 2-Zentren bzw. weiterer 3-Zentren widerspräche den Erörterungen zu  $\boxed{P2}$  bzw.  $\boxed{P3}$ . Damit haben wir eine vollständige Beschreibung des Falles  $\boxed{P6}$ .

b) Es gebe ein  $\psi \in \mathcal{U}^-$ . Da ein  $X \in \{A, B, A-B\}$  mit  $\psi(\mathbb{R}X) \not\parallel \mathbb{R}X$  existiert, findet man nach (3.31) parallel zu  $a_\psi$  sowohl  $\mathbb{S}$ -Achsen als auch  $\mathcal{G}l$ -Achsen.

Die in (3.36)e) für 3-Zentren durchgeführte Überlegung gilt ganz analog auch für 6-Zentren, und damit ist klar, daß jede  $\mathbb{S}$ -Achse ein 6-Zentrum trifft. Ist  $E$  ein solches 6-Zentrum, so ist  $\{\varphi \in \mathcal{U} \mid \varphi(E) = E\}$  gemäß (3.9) eine  $D_6^6$ . Da alle 6-Zentren durch Elemente von  $\mathcal{T}_\mathcal{U}$  ineinander transformierbar sind, bestimmt jeder Gitterpunkt eine Untergruppe des Typs  $D_6^6$  von  $\mathcal{U}$ .

Offenbar lassen sich auch die Winkelerörterungen für Achsen aus (3.36) übernehmen, mit dem Unterschied nur, daß die Disjunktion in e) zwischen  $\boxed{P3m\parallel}$  und  $\boxed{P3m\perp}$  nun durch die Konjunktion dieser Fälle zu ersetzen ist. In diesem Sinne entsteht die Figur zu  $\boxed{P6m}$  durch Überlagerung der Figuren zu  $\boxed{P3m\parallel}$  und  $\boxed{P3m\perp}$ . Damit ist der Fall  $\boxed{P6m}$  vollständig beschrieben.

## 4. ISOMETRIEN DES ANSCHAUUNGSRAUMES

### A. Grundeigenschaften des $\mathbb{R}^3$

Nach R. DESCARTES (1596-1650) lassen sich die Punkte des Anschauungsraumes durch Zahlentripel beschreiben. Durch diesen Ansatz wird es möglich, geometrische Fragen mit algebraischen Methoden zu behandeln.

(4.1) Die Menge  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$  aller Tripel aus reellen Zahlen wird durch die komponentenweise Addition

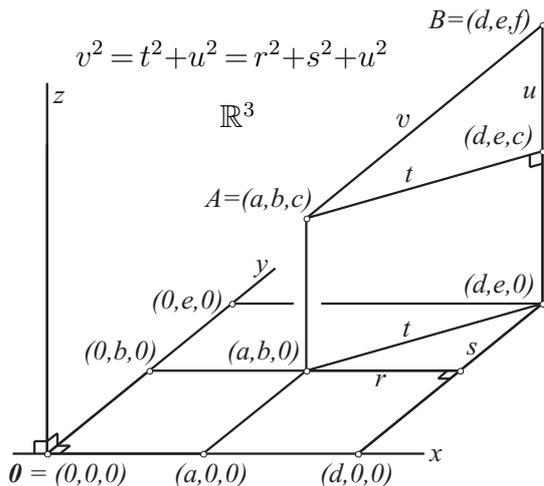
$$(1) \quad \boxed{(x, y, z) + (u, v, w) := (x + u, y + v, z + w)} \quad \forall x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$$

zu einer *abelschen Gruppe*  $\mathbb{R}^3(+)$  mit dem neutralen Element  $(0, 0, 0)$  und mit

$$(2) \quad (x, y, z) - (u, v, w) = (x - u, y - v, z - w) \quad \forall x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R},$$

$$(3) \quad -(x, y, z) = (-x, -y, -z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(4.2) Analog zum ebenen Fall deuten wir jedes Tripel  $A = (a, b, c)$  reeller Zahlen  $a, b, c$  einerseits als **Punkt** des Anschauungsraumes und andererseits als **Vektor** (= Ortsvektor), nämlich als (geradlinigen) Pfeil, der vom sog. **Ursprung**  $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$  zum Punkt A zeigt.



Ist  $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , so wird die Zahl

$$(1) \quad \boxed{|A| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \in \mathbb{R}_+}$$

die **Länge** oder der **Absolutbetrag des Vektors** A genannt. Ferner wird die Zahl

$$(2) \quad \boxed{|A - B| = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}}$$

als der **Abstand** oder als die **Distanz** der Punkte  $A = (a, b, c)$  und  $B = (d, e, f)$  des  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet. Dies basiert entsprechend der nebenstehenden Figur auf dem Satz des PYTHAGORAS.

(4.3) Zwischen den Elementen von  $\mathbb{R}$ , die jetzt auch **Skalare** genannt werden, und den Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  wird eine sog. **skalare Multiplikation** eingeführt durch

$$(1) \quad \boxed{\lambda \cdot (x, y, z) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z) =: (x, y, z) \cdot \lambda} \quad \forall \lambda, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $X, Y \in \mathbb{R}^3$  gelten nach den Grundvorlesungen die Regeln

$$(2) \quad 1 \cdot X = X \quad \wedge \quad (-1) \cdot X = -X,$$

$$(3) \quad \lambda \cdot X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee X = \mathbf{0},$$

$$(4) \quad (-\lambda) \cdot X = \lambda \cdot (-X) = -(\lambda \cdot X) \quad \wedge \quad (-\lambda) \cdot (-X) = \lambda \cdot X,$$

$$(5) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot X) = (\lambda \cdot \mu) \cdot X,$$

$$(6) \quad \lambda \cdot (X + Y) = \lambda \cdot X + \lambda \cdot Y \quad \wedge \quad \lambda \cdot (X - Y) = \lambda \cdot X - \lambda \cdot Y,$$

$$(7) \quad (\lambda + \mu) \cdot X = \lambda \cdot X + \mu \cdot X \quad \wedge \quad (\lambda - \mu) \cdot X = \lambda \cdot X - \mu \cdot X.$$

Die abelsche Gruppe  $\mathbb{R}^3(+)$  zusammen mit der gerade eingeführten skalaren Multiplikation wird der **Vektorraum**  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  genannt, und der Ursprung  $\mathbf{0}$  heißt auch **Nullvektor**.

(4.4) Für  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  setzt man

$$(1) \quad \boxed{(a, b, c) \circ (d, e, f) := ad + be + cf \in \mathbb{R}}.$$

Durch (1) ist je zwei Vektoren  $A, B \in \mathbb{R}^3$  eine reelle Zahl  $A \circ B \in \mathbb{R}$  zugeordnet; diese Zahl wird das **Skalarprodukt von  $A$  und  $B$**  genannt.

Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $A, B, C \in \mathbb{R}^3$  ergeben sich nach den Grundvorlesungen die Regeln

$$(2) \quad A \circ B = B \circ A,$$

$$(3) \quad A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C,$$

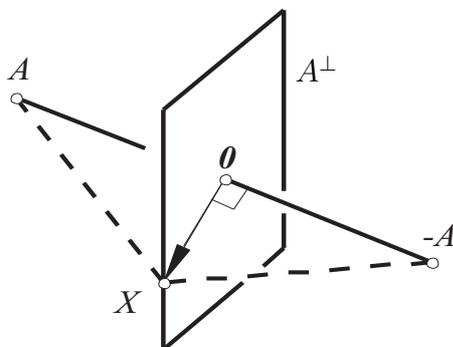
$$(4) \quad (\lambda \cdot A) \circ B = \lambda \cdot (A \circ B) = A \circ (\lambda \cdot B),$$

$$(5) \quad \boxed{A^2 := A \circ A = |A|^2},$$

$$(6) \quad |\lambda \cdot A| = |\lambda| \cdot |A| \wedge (|A| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}),$$

$$(7) \quad A \circ (-B) = -(A \circ B) \text{ und } |A - B|^2 = |A|^2 - 2 \cdot A \circ B + |B|^2,$$

$$(8) \quad A \circ B = \frac{1}{2}(|A|^2 + |B|^2 - |A - B|^2).$$



(4.5) Ist  $A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ , so bezeichnet man die Menge

$$(1) \quad \boxed{A^\perp := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid |X - (-A)| = |X - A|\}}$$

als die **Mittelsenkrechte von  $-A, A$**  oder auch als die **Symmetrieebene von  $-A, A$** . Die Elemente von  $A^\perp$  heißen die zu  $A$  **senkrechten** oder **orthogonalen** Vektoren. Da stets  $\boxed{\mathbf{0} \in A^\perp}$  ist, nennt man

$$(2) \quad \boxed{\mathfrak{E}_0 := \{A^\perp \mid A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\}}$$

die Menge der mit  $\mathbf{0}$  inzidierenden **Ebenen** des  $\mathbb{R}^3$ .

Für  $A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  und  $X \in \mathbb{R}^3$  folgt  $[X \in A^\perp \Leftrightarrow |X + A| = |X - A| \Leftrightarrow (X + A)^2 = (X - A)^2 \Leftrightarrow 2X \circ A = -2X \circ A \Leftrightarrow X \circ A = 0]$  sowie  $A \circ A = |A|^2 \neq 0$ , also

$$(3) \quad \boxed{X \in A^\perp \Leftrightarrow X \circ A = 0} \wedge \boxed{A \notin A^\perp} \quad \forall A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \forall X \in \mathbb{R}^3.$$

Wegen (3) werden Vektoren  $X, Y \in \mathbb{R}^3$  genau dann **senkrecht** oder **orthogonal** genannt, in Zeichen:  $X \perp Y$ , wenn  $X \circ Y = 0$  ist. Hierbei gilt

$$(4) \quad \boxed{X \perp Y \Leftrightarrow Y \perp X} \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3$$

In diesem Zusammenhang ergänzt man (1) durch die Festsetzung  $\boxed{\mathbf{0}^\perp := \mathbb{R}^3}$ .

(4.6) Für  $A, B, C \in \mathbb{R}^3$  setzen wir

$$(1) \quad \boxed{\mathbb{R}A := \{\alpha A \mid \alpha \in \mathbb{R}\}},$$

$$(2) \quad \boxed{\mathbb{R}A + \mathbb{R}B := \{\alpha A + \beta B \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}} \text{ und}$$

$$(3) \quad \boxed{\mathbb{R}A + \mathbb{R}B + \mathbb{R}C := \{\alpha A + \beta B + \gamma C \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}}.$$

Ist hierbei  $A \neq \mathbf{0}$ , so wird  $\mathbb{R}A$  als ein **eindimensionaler Untervektorraum** bezeichnet. Wegen  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}A \quad \forall A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  nennen wir

$$(4) \quad \boxed{\mathfrak{G}_0 := \{\mathbb{R}A \mid A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\}}$$

die Menge der mit  $\mathbf{0}$  inzidierenden **Geraden**.

Vektoren  $A, B \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  heißen **linear unabhängig** genau im Falle  $\mathbb{R}A \neq \mathbb{R}B$ , wobei

$$(5) \quad \boxed{\mathbb{R}A \neq \mathbb{R}B \Leftrightarrow A \notin \mathbb{R}B \Leftrightarrow B \notin \mathbb{R}A} \text{ gilt.}$$

Vektoren  $A, B, C \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  werden genau im Falle  $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B + \mathbb{R}C = \mathbb{R}^3$  als **linear unabhängig** oder auch als **Basis des  $\mathbb{R}^3$**  bezeichnet.

Nach den in den Grundvorlesungen vorgestellten Regeln der linearen Algebra gelten für die eingeführten Begriffe die folgenden Aussagen:

(4.7) Ist  $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  und ist  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , so führt (4.5)(3) auf

$$(1) \quad \boxed{X \in A^\perp \Leftrightarrow ax + by + cz = 0}.$$

Die Gleichung in (1) wird **homogene lineare Gleichung** in 3 Variablen genannt; sie heißt *nichttrivial* wegen  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . Jedes Tripel  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  mit  $ax + by + cz = 0$  wird als eine Lösung dieser Gleichung bezeichnet.

Als Lösungsmenge einer nichttrivialen homogenen linearen Gleichung in 3 Variablen ist  $A^\perp$  ein sog. *zweidimensionaler Untervektorraum* des  $\mathbb{R}^3$ , d.h. es gibt eine Darstellung

$$(2) \quad \boxed{A^\perp = \mathbb{R}B + \mathbb{R}C} \quad \text{mit} \quad \boxed{B, C \in A^\perp \setminus \{\mathbf{0}\}} \quad \text{und} \quad \boxed{\mathbb{R}B \neq \mathbb{R}C}.$$

Sind andererseits  $B, C \in A^\perp \setminus \{\mathbf{0}\}$  beliebig gewählt und gilt  $\mathbb{R}B \neq \mathbb{R}C$ , so ergibt sich (2), und wegen  $A \notin A^\perp$  folgt außerdem

$$(3) \quad \boxed{\mathbb{R}A + \mathbb{R}B + \mathbb{R}C = \mathbb{R}^3}.$$

Hierbei ist die Darstellung der Punkte des  $\mathbb{R}^3$  eindeutig gemäß

$$(4) \quad \boxed{xA + yB + zC = uA + vB + wC \Leftrightarrow (x, y, z) = (u, v, w)} \quad \forall (x, y, z), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3.$$

(4.8) Wir setzen (1)  $\boxed{(\mathbb{R}A)^\perp := A^\perp} \quad \forall A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Dies ist sinnvoll wegen

$$(2) \quad \boxed{A^\perp = D^\perp \Leftrightarrow \mathbb{R}A = \mathbb{R}D} \quad \forall A, D \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

*Beweis von (2):* Ist  $\mathbb{R}A \neq \mathbb{R}D$ , so ist  $A^\perp \cap D^\perp$  als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems  $[X \circ A = 0 \wedge X \circ D = 0]$  eine Gerade durch  $\mathbf{0}$ . Ist dagegen  $D = \lambda A$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , so ist  $[X \circ A = 0 \Leftrightarrow X \circ \lambda A = 0 \Leftrightarrow X \circ D = 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^3]$ , also  $A^\perp = D^\perp$ .  $\square$

(4.9) Ist  $D \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  und ist  $A := |D|^{-1} \cdot D$ , so führt (4.8) auf

$$(1) \quad \boxed{|A| = 1 \wedge D = |D| \cdot A \wedge D^\perp = A^\perp}.$$

Wenn man in der vorliegenden Situation  $D$  durch  $A$  ersetzt, so wird  $D$  durch einen Vektor gleicher Richtung mit der Länge 1 ersetzt, und man sagt,  $D$  wird zu  $A$  **normiert**. Hierbei ändert sich die Menge der zu  $D$  orthogonalen Vektoren nicht.

In  $A^\perp$  kann man offenbar einen Vektor  $B$  der Länge 1 finden. Da  $A$  und  $B$  in diesem Falle linear unabhängig sind, ist  $A^\perp \cap B^\perp$  nach dem Beweis von (4.8) eine Gerade durch  $\mathbf{0}$ , d.h. es gibt einen Vektor  $C$  der Länge 1 mit

$$(2) \quad \boxed{A^\perp \cap B^\perp = \mathbb{R}C \wedge |A| = |B| = |C| = 1 \wedge A \perp B \wedge B \perp C \wedge C \perp A}.$$

Wegen (2) und wegen  $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B + \mathbb{R}C = \mathbb{R}^3$  wird  $\{A, B, C\}$  eine **Orthonormalbasis** oder kurz eine **ON-Basis** des  $\mathbb{R}^3$  genannt.

In der angegebenen Weise können wir ausgehend von einem beliebigen Vektor  $D \neq 0$  viele ON-Basen finden. Unter all diesen ON-Basen wird die Basis

$$(3) \quad \boxed{\{E_1, E_2, E_3\} \quad \text{mit} \quad E_1 := (1, 0, 0) \wedge E_2 := (0, 1, 0) \wedge E_3 := (0, 0, 1)}$$

besonders hervorgehoben und als die **Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$**  bezeichnet. Offenbar gilt

$$(4) \quad \boxed{x E_1 + y E_2 + z E_3 = (x, y, z)} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

**B. Isometrien des  $\mathbb{R}^3$** 

(4.10) Eine Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt **Isometrie** des  $\mathbb{R}^3$ , wenn

$$(1) \quad \boxed{\varphi(0) = 0} \wedge \boxed{|\varphi(X) - \varphi(Y)| = |X - Y| \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3}$$

gilt. Die Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  sind also diejenigen distanztreuen Abbildungen des  $\mathbb{R}^3$  in sich, die den Ursprung festlassen. Ihre Gesamtheit wird mit  $\mathcal{O}_3$  bezeichnet.

Ist  $\varphi \in \mathcal{O}_3$ , so führt (1) mit  $Y = 0$  auf

$$(2) \quad \boxed{|\varphi(X)| = |X|} \quad \forall X \in \mathbb{R}^3,$$

und weiter folgt

$$(3) \quad \boxed{\varphi(X) \circ \varphi(Y) = X \circ Y} \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3,$$

denn wegen (2) ist  $(\varphi(X))^2 = X^2 \quad \forall X \in \mathbb{R}^3$ , und für  $X, Y \in \mathbb{R}^3$  gilt dann

$$(4) \quad |\varphi(X) - \varphi(Y)| = |X - Y| \Leftrightarrow (\varphi(X) - \varphi(Y))^2 = (X - Y)^2 \Leftrightarrow \varphi(X) \circ \varphi(Y) = X \circ Y.$$

Aus (3) ergibt sich

$$(5) \quad \boxed{X \perp Y \Leftrightarrow \varphi(X) \perp \varphi(Y)} \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3,$$

d.h. jede Isometrie ist orthogonalitätstreu.

Mit Blick auf (2) und (4) erhalten wir

$$(6) \quad \text{Ist } \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ eine Abbildung mit (3), so ist } \varphi \in \mathcal{O}_3.$$

Für das Verketteten „ $\circ$ “ von Isometrien gilt

$$(7) \quad \boxed{\varphi \circ \psi \in \mathcal{O}_3} \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{O}_3,$$

denn sind  $\varphi, \psi \in \mathcal{O}_3$ , so ist  $|\varphi \circ \psi(X) - \varphi \circ \psi(Y)| = |\psi(X) - \psi(Y)| = |X - Y| \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3$ , und es gilt  $\varphi \circ \psi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Als weitere wichtige Eigenschaften der Isometrien notieren wir

(4.11) **Satz.** Ist  $\varphi \in \mathcal{O}_3$  und existiert eine Basis  $\{A, B, C\}$  des  $\mathbb{R}^3$  mit

$$\varphi(A) = A \wedge \varphi(B) = B \wedge \varphi(C) = C, \text{ so ist } \varphi = id_{\mathbb{R}^3}.$$

*Beweis:* Für  $X \in \mathbb{R}^3$  und  $D \in \{A, B, C\}$  gilt  $\varphi(X) \circ D = \varphi(X) \circ \varphi(D) \stackrel{(4.10)(3)}{=} X \circ D$ , also  $(\varphi(X) - X) \circ D = 0$ , d.h. es sind  $A, B, C \in (\varphi(X) - X)^\perp$ . Dann ist  $\varphi(X) - X \notin \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , und es folgt  $\varphi(X) = X$ . Dies bedeutet  $\varphi = id_{\mathbb{R}^3}$ .  $\square$

(4.12) **Satz.** Sind  $B, C$  unabhängige Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ , so gibt es genau ein  $\varphi \in \mathcal{O}_3 \setminus \{id_{\mathbb{R}^3}\}$  mit  $\varphi(B) = B \wedge \varphi(C) = C$ . Die Fixpunktmenge von  $\varphi$  ist  $\varepsilon := \mathbb{R}B + \mathbb{R}C$ , und  $\varphi$  ist eine lineare Bijektion mit (1)  $\boxed{\varphi = \varphi^{-1}}$ , die in der Form

$$(2) \quad \boxed{\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : xA + yB + zC \rightarrow -xA + yB + zC} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

mit  $A \in (B^\perp \cap C^\perp) \setminus \{0\}$  darstellbar ist.

Wir bezeichnen  $\varphi$  als die **Spiegelung**  $\tilde{\varepsilon}$  an der Ebene  $\varepsilon \in \mathfrak{E}_0$ .

*Beweis:* Es sei  $A \in B^\perp \cap C^\perp$  mit  $A \neq 0$ . Nach (4.7) ist  $\{A, B, C\}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  mit  $A^\perp = \mathbb{R}B + \mathbb{R}C =: \varepsilon$ .

1) Ist  $\varphi$  gemäß (2) definiert, so ist  $\varphi$  eine lineare Bijektion mit (1), wie man sofort bestätigt, und für  $X = xA + yB + zC$  und  $Y = uA + vB + wC$  mit  $(x, y, z), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  führt die Beziehung  $B, C \in A^\perp$  auf  $\varphi(X) \circ \varphi(Y) = (-xA + yB + zC) \circ (-uA + vB + wC) = X \circ Y$ , d.h. gemäß (4.10)(6) ist  $\varphi$  eine Isometrie mit  $\varphi(B) = B \wedge \varphi(C) = C$ .

(2) Ist  $\psi$  eine beliebige Isometrie des  $\mathbb{R}^3$  mit  $\psi(B) = B \wedge \psi(C) = C$ , so führen (4.10)(5),(2) auf  $\psi(A) \in B^\perp \cap C^\perp = \mathbb{R}A$  mit  $|\psi(A)| = |A|$ , also auf  $\psi(A) = A \vee \psi(A) = -A$ . Im ersten Fall wäre  $\psi = id_{\mathbb{R}^3}$  gemäß (4.11), und folglich ist  $\psi(A) = -A$ . Nach (4.10)(7) ist  $\varphi^{-1} \circ \psi = \varphi \circ \psi$  nun eine Isometrie mit den Fixpunkten  $A, B, C$ , und mit (4.11) folgt dann  $\varphi^{-1} \circ \psi = id_{\mathbb{R}^3}$ , also  $\psi = \varphi$ .  $\square$

**(4.13) Satz.** Sind  $S, T \in \mathbb{R}^3$  mit  $|S| = |T|$ , so gibt es genau ein  $\varepsilon \in \mathfrak{E}_0$  mit  $\tilde{\varepsilon}(S) = T$ . Hierbei ist  $\varepsilon = (S-T)^\perp$  und  $\frac{1}{2}(S+T) \in \varepsilon$ .

*Beweis:* Es seien  $A := S-T$  und  $B, C \in A^\perp \setminus \{0\}$  mit  $\mathbb{R}B \neq \mathbb{R}C$ . Ist  $D := \frac{1}{2}(S+T)$ , so führt  $S^2 = T^2$  auf  $A \circ D = \frac{1}{2}(S-T) \circ (S+T) = 0$ , d.h. es ist  $D \in A^\perp$ , und es gibt  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$  mit  $D = \beta B + \gamma C$ . Nun ist  $S = \frac{1}{2}A + D = \frac{1}{2}A + \beta B + \gamma C$  und  $T = -\frac{1}{2}A + D = -\frac{1}{2}A + \beta B + \gamma C$ , und mit (4.12)(2) folgt dann  $\tilde{\varepsilon}(S) = T$  für  $\varepsilon := A^\perp$ . Ist  $\delta \in \mathfrak{E}_0$  mit  $\tilde{\delta}(S) = T$ , so ist  $T \circ X = \tilde{\delta}(S) \circ \tilde{\delta}(X) \stackrel{(4.10)(3)}{=} S \circ X \quad \forall X \in \delta$ , also  $X \in (S-T)^\perp = \varepsilon \quad \forall X \in \delta$  und damit  $\delta = \varepsilon$ .  $\square$

**(4.14) Satz.** Jede Isometrie des  $\mathbb{R}^3$  ist ein Produkt von zwei oder drei Spiegelungen an Ebenen aus  $\mathfrak{E}_0$ .

*Beweis:* Es sei  $\varphi \in \mathcal{O}_3$ . 1) Ist  $\varphi = id_{\mathbb{R}^3}$ , so ist  $\varphi = \tilde{\varepsilon} \circ \tilde{\varepsilon}$  für jedes  $\varepsilon \in \mathfrak{E}_0$ . Ist  $\varphi \neq id_{\mathbb{R}^3}$  und ist  $A \in \mathbb{R}^3$  mit  $\varphi(A) \neq A$ , so ist  $|\varphi(A)| = |A| \neq 0$ , und nach (4.13) gilt  $\boxed{\psi(A) = A}$  für  $\psi := \tilde{\varepsilon}_1 \circ \varphi \in \mathcal{O}_3$  mit  $\varepsilon_1 := (\varphi(A) - A)^\perp$ .

2) Ist  $\psi = id_{\mathbb{R}^3}$ , so ist  $\varphi = \tilde{\varepsilon}_1^{-1} = \tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_1$ . Ist  $\psi \neq id_{\mathbb{R}^3}$  und ist  $B \in \mathbb{R}^3$  mit  $\psi(B) \neq B$ , so ist  $|\psi(B)| = |B| \neq 0$ , und für  $\varepsilon_2 := (\psi(B) - B)^\perp$  und  $\eta := \tilde{\varepsilon}_2 \circ \psi \in \mathcal{O}_3$  folgt  $\boxed{\eta(B) = B}$  gemäß (4.13). Wegen  $A \circ \psi(B) = \psi(A) \circ \psi(B) \stackrel{(4.10)(3)}{=} A \circ B$  ist  $A \in (\psi(B) - B)^\perp = \varepsilon_2$ . Dies impliziert  $\boxed{\mathbb{R}A \neq \mathbb{R}B}$  wegen  $B \notin \varepsilon_2$  und auch  $\tilde{\varepsilon}_2(A) = A$ , also  $\boxed{\eta(A) = A}$ .

3) Nach (4.12) gilt nun entweder  $\eta = id_{\mathbb{R}^3}$ , also  $\tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_1 \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^3}$  und damit  $\varphi = \tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2$ , oder es ist  $\eta = \tilde{\varepsilon}_3$  für  $\varepsilon_3 := \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ , also  $\tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_1 \circ \varphi = \tilde{\varepsilon}_3$  und damit  $\varphi = \tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3$ .  $\square$

**(4.15) Corollar 1.** Jede Isometrie ist eine lineare Bijektion. Ist  $\varphi \in \mathcal{O}_3$ , so ist auch  $\varphi^{-1} \in \mathcal{O}_3$ . Mit dem Verketteten „ $\circ$ “ als Verknüpfung ist  $\mathcal{O}_3(\circ)$  eine Gruppe, genannt **orthogonale Gruppe des  $\mathbb{R}^3$** .

*Beweis:* Beim Verketteten linearer Bijektionen entsteht eine lineare Bijektion. Deshalb folgt die Behauptung aus (4.14), (4.12), (4.10)(7) und aus  $(\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2)^{-1} = \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_1 \wedge (\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3)^{-1} = \tilde{\varepsilon}_3 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_1$  für  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathfrak{E}_0$ .  $\square$

**(4.16) Corollar 2.** Die Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  sind die Abbildungen des Typs

$$\boxed{\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \rightarrow xA + yB + zC},$$

wobei  $\{A, B, C\}$  eine ON-Basis des  $\mathbb{R}^3$  ist.

*Beweis:* 1) Ist  $\varphi$  wie angegeben dargestellt, so folgt  $\varphi(X) \circ \varphi(Y) = X \circ Y \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3$ , und nach (4.10)(6) gilt dann  $\varphi \in \mathcal{O}_3$ . 2) Ist  $\varphi \in \mathcal{O}_3$  beliebig vorgegeben, so ist  $\{A, B, C\}$  für  $A := \varphi(E_1), B := \varphi(E_2), C := \varphi(E_3)$  nach (4.10)(2),(5) eine ON-Basis des  $\mathbb{R}^3$ , und mit der Linearität von  $\varphi$  gemäß (4.15) folgt die angegebene Darstellung.  $\square$

Über die Fixpunktmenge von Isometrien zeigen wir

**(4.17) Satz.** Sind  $\delta, \varepsilon \in \mathfrak{E}_0$  mit  $\delta \neq \varepsilon$ , so ist die Gerade  $\delta \cap \varepsilon \in \mathfrak{E}_0$  die Menge der Fixpunkte von  $\tilde{\delta} \circ \tilde{\varepsilon}$ . Man bezeichnet  $\delta \cap \varepsilon$  auch als die **Achse** von  $\tilde{\delta} \circ \tilde{\varepsilon}$ .

*Beweis:* Offenbar gilt  $\tilde{\delta} \circ \tilde{\varepsilon}(X) = X \quad \forall X \in \delta \cap \varepsilon$ . Nun sei  $A \in \delta \cap \varepsilon$  mit  $A \neq \mathbf{0}$ . Gäbe es ein  $B \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}A$  mit  $\tilde{\delta} \circ \tilde{\varepsilon}(B) = B$ , so wäre  $\tilde{\varepsilon}(B) = \tilde{\delta}(B)$ . Im Falle  $\tilde{\varepsilon}(B) = \tilde{\delta}(B) = B$  hätten wir dann  $\varepsilon = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B = \delta$ , und im Falle  $\tilde{\varepsilon}(B) = \tilde{\delta}(B) \neq B$  ergäbe sich  $\varepsilon = (\tilde{\varepsilon}(B) - B)^\perp = (\tilde{\delta}(B) - B)^\perp = \delta$  gemäß (4.13).  $\square$

**(4.18) Satz.** *Sind  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathfrak{E}_0$  mit  $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 \in \mathfrak{G}_0$ , so gibt es ein  $\varepsilon_4 \in \mathfrak{E}_0$  mit  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3 = \tilde{\varepsilon}_4$ .*

*Beweis:* Ist  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ , so ist  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3 = \tilde{\varepsilon}_1$ . Im weiteren sei  $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$  und  $\varphi := \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3$ . Dann gibt es ein  $A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit  $\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = \mathbb{R}A \subseteq \varepsilon_1$ , und nach (4.17) ist  $\mathbb{R}A$  die Menge der Fixpunkte von  $\varphi$ . Weiter gibt es ein  $B \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit  $\varepsilon_1 = B^\perp$ , und wegen  $A \in \varepsilon_1$  ist  $B \in A^\perp$ . Nun seien  $C, D \in A^\perp \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit  $A^\perp = \mathbb{R}C + \mathbb{R}D$ . Wegen  $\varphi(A) = A$  und wegen  $C, D \perp A$  sind  $\varphi(C), \varphi(D) \in A^\perp$  gemäß (4.10)(5). Wegen  $C, D \notin \mathbb{R}A$  ist  $\varphi(C) \neq C \wedge \varphi(D) \neq D$ . Gäbe es ein  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  mit  $\varphi(C) - C = \lambda(\varphi(D) - D)$ , so wäre  $\varphi(C - \lambda D) = C - \lambda D$ , also  $C - \lambda D \in \mathbb{R}A \cap A^\perp = \{\mathbf{0}\}$  und damit  $\mathbb{R}C = \mathbb{R}D$ .

Demnach ist  $\mathbb{R}(\varphi(C) - C) + \mathbb{R}(\varphi(D) - D) = A^\perp$ , und es gibt  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $B = \alpha(\varphi(C) - C) + \beta(\varphi(D) - D)$ . Setzen wir nun  $P := \alpha C + \beta D$ , so folgt  $\boxed{P \in A^\perp}$  und  $\varphi(P) - P = \alpha(\varphi(C) - C) + \beta(\varphi(D) - D) = B \neq \mathbf{0}$ , also  $\boxed{P \notin \mathbb{R}A}$ . Wegen  $|\varphi(P)| = |P|$  und  $(\varphi(P) - P)^\perp = B^\perp = \varepsilon_1$  führt (4.13) auf  $\tilde{\varepsilon}_1(P) = \varphi(P)$ , also auf  $\boxed{P = \tilde{\varepsilon}_1 \circ \varphi(P)}$ .

Wegen  $A = \tilde{\varepsilon}_1 \circ \varphi(A)$  und (4.12) gilt nun entweder  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^3}$  oder  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \varphi = \tilde{\varepsilon}_4$  mit  $\varepsilon_4 := \mathbb{R}A + \mathbb{R}P$ . Im ersten Fall wäre  $\varphi = \tilde{\varepsilon}_1$ , und dann wäre die Fixpunktmenge von  $\varphi$  eine Ebene. Folglich ist  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3 = \tilde{\varepsilon}_4$ .  $\square$

**(4.19) Satz.** *Sind  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathfrak{E}_0$  mit  $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = \{\mathbf{0}\}$ , so ist  $\mathbf{0}$  der einzige Fixpunkt von  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3$ .*

*Beweis:* Wegen  $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = \{\mathbf{0}\}$  ist  $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ , d.h. es gibt ein  $A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit  $\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 = \mathbb{R}A$ , und nach (4.17) ist  $\mathbb{R}A$  die Menge der Fixpunkte von  $\varphi := \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3$ .

Angenommen, es gibt ein  $B \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \varphi(B) = B$ . Dann ist  $\varphi(B) = \tilde{\varepsilon}_1(B)$ . Im Falle  $\varphi(B) = \tilde{\varepsilon}_1(B) = B$  wäre  $B \in \mathbb{R}A \cap \varepsilon_1 = \{\mathbf{0}\}$ . Im Falle  $\varphi(B) = \tilde{\varepsilon}_1(B) \neq B$  wäre  $\varphi(B) \circ A = \varphi(B) \circ \varphi(A) \stackrel{(4.10)(3)}{=} B \circ A$ , also  $A \in (\varphi(B) - B)^\perp$ , und mit (4.13) ergäbe sich  $\varepsilon_1 = (\varphi(B) - B)^\perp$  wegen  $|\varphi(B)| = |B|$ , also  $A \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Als Folgerungen aus den bewiesenen Sätzen notieren wir

**(4.20) Dreispiegelungssatz für Isometrien.** *Sind  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathfrak{E}_0$ , so ist  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3$  genau dann eine Spiegelung an einer Ebene aus  $\mathfrak{E}_0$ , wenn  $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 \in \mathfrak{G}_0$  ist.*

*Beweis:* (4.18), (4.19).  $\square$

**(4.21) Klassifizierung der Isometrien.**

- (1) *Sind  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{E}_0$ , so heißt  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2$  eine **Drehung** oder eine **gerade Isometrie**. Die Fixpunktmenge von  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2$  ist entweder der  $\mathbb{R}^3$  oder eine Gerade durch  $\mathbf{0}$ .*
- (2) *Sind  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathfrak{E}_0$ , so heißt  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3$  eine **ungerade Isometrie**. Die Fixpunktmenge von  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3$  ist entweder eine Ebene durch  $\mathbf{0}$  oder die Menge  $\{\mathbf{0}\}$ . Im zweiten Fall wird  $\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3$  eine **Drehspiegelung** genannt.*
- (3) *Bezeichnet  $\mathcal{O}_3^+$  bzw.  $\mathcal{O}_3^-$  die Menge der geraden bzw. der ungeraden Isometrien, so ist  $\mathcal{O}_3^+ \cap \mathcal{O}_3^- = \emptyset$ .*

*Beweis:* (1) folgt aus (4.17) und (2) aus (4.18), (4.19). Die Verschiedenheit der Fixpunktmenge impliziert (3).  $\square$

Als wichtige Aussagen über Drehungen zeigen wir

**(4.22) Satz.**  $\mathcal{O}_3^+$  ist eine Untergruppe von  $\mathcal{O}_3(\circ)$ . Für  $\varphi \in \mathcal{O}_3^+$  und  $\psi, \eta \in \mathcal{O}_3^-$  gilt  $\varphi \circ \psi, \psi \circ \varphi \in \mathcal{O}_3^-$ ,  $\psi \circ \eta \in \mathcal{O}_3^+$  und  $\psi \circ \mathcal{O}_3^+ := \{\psi \circ \delta \mid \delta \in \mathcal{O}_3^+\} = \mathcal{O}_3^-$ .

*Beweis:* 1) Sind  $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{O}_3^+$ , so gibt es  $A, B \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit  $\delta_1(A) = A \wedge \delta_2(B) = B$ . Weiter gibt es dann ein  $\varepsilon \in \mathfrak{E}_0$  mit  $\varepsilon \ni A, B$ , und nach (4.18) gibt es  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{E}_0$  mit  $\delta_1 \circ \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_1 \wedge \tilde{\varepsilon} \circ \delta_2 = \tilde{\varepsilon}_2$ . Es folgt  $\delta_1 \circ \delta_2 = (\delta_1 \circ \tilde{\varepsilon}) \circ (\tilde{\varepsilon} \circ \delta_2) = \tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \in \mathcal{O}_3^+$ . Wegen  $(\tilde{\varepsilon}_3 \circ \tilde{\varepsilon}_4)^{-1} = \tilde{\varepsilon}_4 \circ \tilde{\varepsilon}_3 \in \mathcal{O}_3^+ \quad \forall \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \mathfrak{E}_0$  ist  $\mathcal{O}_3^+$  dann eine Untergruppe von  $\mathcal{O}_3(\circ)$ .

2) Nach 1) liegt jedes Produkt von 5 bzw. 6 Spiegelungen an Ebenen aus  $\mathfrak{E}_0$  in  $\mathcal{O}_3^-$  bzw.  $\mathcal{O}_3^+$ . Insbesondere gibt es zu  $\psi, \eta \in \mathcal{O}_3^-$  ein  $\delta \in \mathcal{O}_3^+$  mit  $\psi^{-1} \circ \eta = \delta$ , und damit ist  $\eta = \psi \circ \delta \in \psi \circ \mathcal{O}_3^+$  gezeigt. Dies impliziert  $\mathcal{O}_3^- = \psi \circ \mathcal{O}_3^+$ .  $\square$

**(4.23) Satz.** Ist  $g \in \mathfrak{G}_0$ , so ist  $\mathcal{O}_3^+(g) := \{\varphi \in \mathcal{O}_3^+ \mid \varphi(X) = X \quad \forall X \in g\}$  eine abelsche Untergruppe von  $\mathcal{O}_3^+(\circ)$ . Die Elemente von  $\mathcal{O}_3^+(g)$  werden die **Drehungen um die Achse  $g$**  genannt.

*Beweis:* Es ist  $id_{\mathbb{R}^3} \in \mathcal{O}_3^+(g)$ . Sind  $\varphi, \psi \in \mathcal{O}_3^+(g)$ , so folgt  $\varphi \circ \psi(X) = \varphi(X) = X$  sowie  $X = \varphi^{-1}(X) \quad \forall X \in g$ , also  $\varphi \circ \psi, \varphi^{-1} \in \mathcal{O}_3^+(g)$ . Deshalb ist  $\mathcal{O}_3^+(g)$  eine Untergruppe von  $\mathcal{O}_3^+$ . Sind  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4 \in \mathfrak{E}_0$  mit  $g \subseteq \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3 \cap \varepsilon_4$  und gilt  $\varphi := \tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2$  sowie  $\psi := \tilde{\varepsilon}_3 \circ \tilde{\varepsilon}_4$  (vgl. (4.17), (4.21)), so folgt  $\varphi \circ \psi = (\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2) \circ (\tilde{\varepsilon}_3 \circ \tilde{\varepsilon}_4) = (\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_3) \circ \tilde{\varepsilon}_4 \stackrel{(4.18)}{=} (\tilde{\varepsilon}_3 \circ \tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_1) \circ \tilde{\varepsilon}_4 = \tilde{\varepsilon}_3 \circ (\tilde{\varepsilon}_2 \circ \tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_4) \stackrel{(4.18)}{=} \tilde{\varepsilon}_3 \circ (\tilde{\varepsilon}_4 \circ \tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2) = (\tilde{\varepsilon}_3 \circ \tilde{\varepsilon}_4) \circ (\tilde{\varepsilon}_1 \circ \tilde{\varepsilon}_2) = \psi \circ \varphi. \quad \square$

**(4.24) Satz.** Sind  $A, B$  unabhängige Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  und sind  $\varphi, \psi \in \mathcal{O}_3^+$  mit  $\varphi(A) = \psi(A) \wedge \varphi(B) = \psi(B)$ , so ist  $\varphi = \psi$ .

*Beweis:* Es ist  $\psi^{-1} \circ \varphi \in \mathcal{O}_3^+$  mit  $\psi^{-1} \circ \varphi(A) = A \wedge \psi^{-1} \circ \varphi(B) = B$ . Da  $\mathbf{0}, A, B$  nichtkollinear sind, führt (4.21)(1) auf  $\psi^{-1} \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^3}$ , d.h. es ist  $\varphi = \psi$ .  $\square$

Schließlich beweisen wir über Drehspiegelungen die Aussagen

**(4.25) Satz.** Die lineare Bijektion  $\check{\mathbf{0}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : X \rightarrow -X$  ist eine Drehspiegelung mit  $\check{\mathbf{0}} = \check{\mathbf{0}}^{-1}$  und mit  $\check{\mathbf{0}}(g) = g \quad \forall g \in \mathfrak{G}_0$ . Es gilt  $\check{\mathbf{0}} \circ \varphi = \varphi \circ \check{\mathbf{0}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}_3$ . Man nennt  $\check{\mathbf{0}}$  die **Punktspiegelung am Ursprung**.

*Beweis:* Offenbar ist  $\check{\mathbf{0}}$  eine lineare Bijektion mit  $\check{\mathbf{0}} = \check{\mathbf{0}}^{-1}$ , und nach (4.10)(6) ist  $\check{\mathbf{0}}$  wegen  $(-X) \circ (-Y) = X \circ Y \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^3$  eine Isometrie. Aus  $-X = X$  folgt  $X = \mathbf{0}$  für  $X \in \mathbb{R}^3$ , und folglich ist  $\mathbf{0}$  der einzige Fixpunkt von  $\check{\mathbf{0}}$ . Offenbar gilt auch  $\check{\mathbf{0}}(g) = g \quad \forall g \in \mathfrak{G}_0$  und  $\check{\mathbf{0}} \circ \varphi(X) = -\varphi(X) = \varphi(-X) = \varphi \circ \check{\mathbf{0}}(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}_3$  (vgl. (4.15)).  $\square$

**(4.26) Satz.** Ist  $\psi$  eine Drehspiegelung, so gibt es eine Drehung  $\delta$  um eine Achse  $g \in \mathfrak{G}_0$  derart, daß  $\boxed{\psi(g) = g \wedge \psi = \tilde{\varepsilon} \circ \delta = \delta \circ \tilde{\varepsilon}}$  für  $\boxed{\varepsilon := g^\perp}$  ist.

Dies erklärt die Bezeichnung „Drehspiegelung“.

*Beweis:* Da  $\check{\mathbf{0}} \circ \psi \in \mathcal{O}_3^+$  ist, gibt es ein  $g \in \mathfrak{G}_0$  mit  $\check{\mathbf{0}} \circ \psi(X) = X \quad \forall X \in g$ , also mit  $\psi(g) = g$ . Ist nun  $\varepsilon := g^\perp$ , so führt (4.12)(2) auf  $\tilde{\varepsilon}(X) = -X \quad \forall X \in g$ , und für  $\delta := \tilde{\varepsilon} \circ \psi \in \mathcal{O}_3^+$  folgt  $\delta(X) = (\tilde{\varepsilon} \circ \check{\mathbf{0}}) \circ (\check{\mathbf{0}} \circ \psi)(X) = X \quad \forall X \in g$ , d.h.  $\delta$  ist eine Drehung um  $g$  mit  $\tilde{\varepsilon} \circ \delta = \psi$ . Wegen

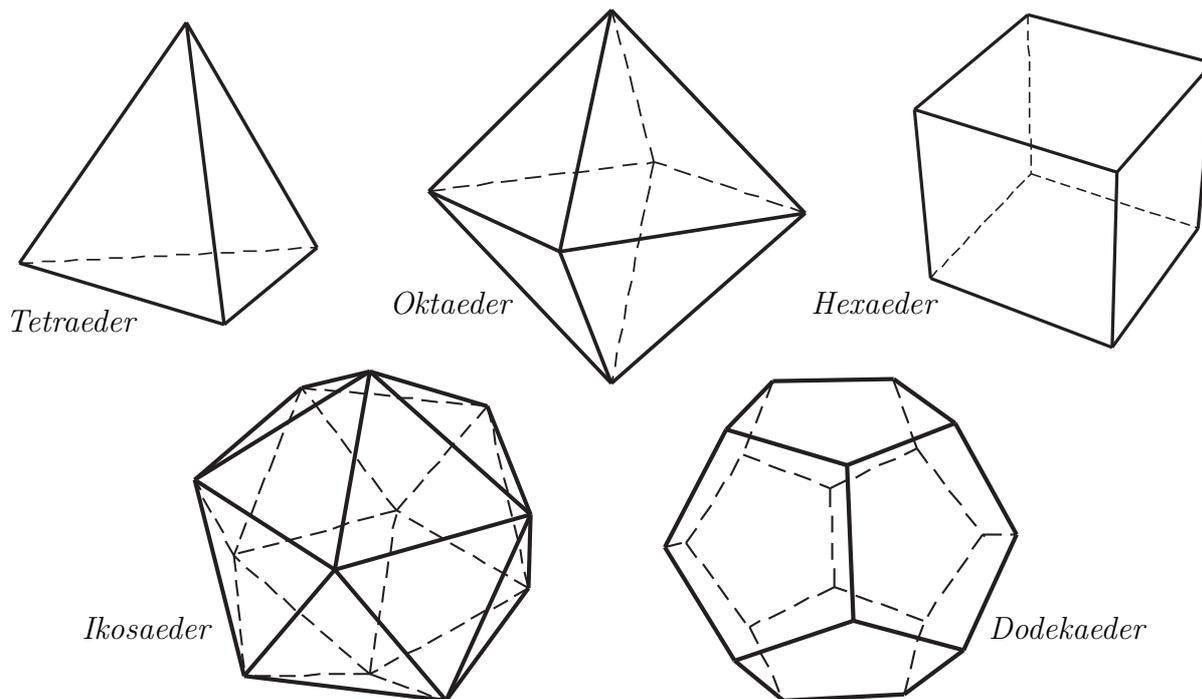
$X \xrightarrow{\delta} X \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} -X \xrightarrow{\delta^{-1}} -X \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} X \quad \forall X \in g$  und  $Y \xrightarrow{\delta} \delta(Y) \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \delta(Y) \xrightarrow{\delta^{-1}} Y \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} Y \quad \forall Y \in \varepsilon$  ist  $\tilde{\varepsilon} \circ \delta^{-1} \circ \tilde{\varepsilon} \circ \delta \stackrel{(4.11)}{=} id_{\mathbb{R}^3}$ , also  $\psi = \tilde{\varepsilon} \circ \delta = \delta \circ \tilde{\varepsilon}$ .  $\square$

**(4.27) Satz.** Zu jedem  $\varphi \in \mathcal{O}_3$  gibt es ein  $A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  mit  $\varphi(\mathbb{R}A) = \mathbb{R}A \wedge \varphi(A^\perp) = A^\perp$ .

*Beweis:* (4.10)(5), (4.21), (4.26).  $\square$

## 5. DIE SYMMETRIEN DER PLATONISCHEN KÖRPER

Unter allen regelmäßigen Körpern sind die *platonischen Körper* die einfachsten. Sie wurden von PLATON (ca. 429 – ca. 348 v. Chr.) in seinem Werk „*Timaios*“ in Kapitel 20 – 22 aus philosophischer Sicht und von EUKLID (ca. 360 – ca. 290 v. Chr.) in seinem Werk „*Die Elemente*“ im 13. Buch aus mathematischer Sicht untersucht.



Jeder dieser Körper besitzt erstaunlich viele Symmetrien. Hierbei wird eine distanztreue Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  genau dann als **Symmetrie des Körpers** bezeichnet, wenn sie dessen Ecken permutiert.

Die Symmetrien eines jeden platonischen Körpers bilden mit dem Verketteten als Verknüpfung eine Gruppe, die im folgenden bestimmt werden soll.

### A. Würfel, Oktaeder und Tetraeder

(5.1) a) Am vertrautesten unter den platonischen Körpern ist uns der **Würfel**, der auch als *Hexaeder* (6-Flächner) bezeichnet wird.

Um dessen Symmetrien als Isometrien des  $\mathbb{R}^3$  zu erfassen, denken wir uns die Ecken eines Würfels  $\mathcal{W}$  in der Form  $P_1, \dots, P_4, -P_1, \dots, -P_4$  mit

$$P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (-1, 1, -1), P_3 = (1, -1, -1), P_4 = (-1, -1, 1)$$

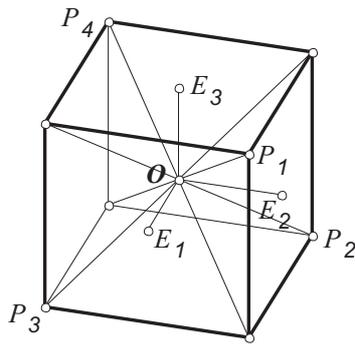
gegeben.

b) Eine Verbindungsstrecke zwischen zwei Ecken  $X, Y$  des Würfels  $\mathcal{W}$  heißt

**Kante** von  $\mathcal{W}$ , wenn sie die Länge 2 hat,

**Flächendiagonale** von  $\mathcal{W}$ , wenn sie die Länge  $2\sqrt{2}$  hat,

**Raumdiagonale** von  $\mathcal{W}$ , wenn sie die Länge  $2\sqrt{3}$  hat.



Die **Seitenmitten** von  $\mathcal{W}$  sind die Mittelpunkte der Flächendiagonalen, also die Punkte  $\pm E_1, \pm E_2, \pm E_3$ , wie man nachprüfen kann. Der Ursprung  $\mathbf{0}$  ist die Mitte der Raumdiagonalen  $d_k := [P_k, -P_k]$  für  $k = 1, \dots, 4$  und wird die **Mitte** des Würfels  $\mathcal{W}$  genannt.

c) Es sei  $\mathfrak{S}_{\mathcal{W}}$  die Menge der Symmetrien von  $\mathcal{W}$ . Ist  $\varphi \in \mathfrak{S}_{\mathcal{W}}$ , so folgt aus der Distanztreue von  $\varphi$ , daß  $\varphi$  die Kanten, die Flächendiagonalen und die Raumdiagonalen mittentreu permutiert, d.h.  $\varphi$  läßt den Ursprung fest und ist deshalb eine Isometrie des  $\mathbb{R}^3$ .

d) Wir betrachten die Isometrien

- (1)  $\alpha_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \rightarrow xE_1 + yE_3 - zE_2 = (x, -z, y)$ ,
- (2)  $\alpha_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \rightarrow xE_2 + yE_3 + zE_1 = (z, x, y)$ ,
- (3)  $\alpha_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \rightarrow -xE_3 - yE_2 - zE_1 = (-z, -y, -x)$ .

Diese permutieren die Würfecken, da jede dieser Ecken von der Form  $(x, y, z)$  mit  $x, y, z \in \{1, -1\}$  ist.

Die Isometrien  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_2$  bzw.  $\alpha_3$  haben die Fixpunkt mengen  $\mathbb{R}E_1$  bzw.  $\mathbb{R}(1, 1, 1)$  bzw.  $\mathbb{R}(1, 0, -1)$ , wie man nachrechnen kann, d.h. es handelt sich hier um Drehungen.

e) Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $m \in \{1, 2, 3\}$  induziert  $\alpha_m^k$  eine Permutation der Raumdiagonalen  $d_1, \dots, d_4$  von  $\mathcal{W}$ , die wir als Permutationen  $p_m^k$  der Indizes  $1, \dots, 4$  notieren können, wobei wir jeweils das Bild unter das Urbild stellen. Aus den Vorgaben erhalten wir dann

$$(4) \quad \alpha_1 \text{ ::: } p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 \text{ ::: } p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 \text{ ::: } p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

wie man nachprüfen kann, wobei ::: jeweils für „bewirkt“ steht. Da das Verketteten der  $\alpha_m$  dem der  $p_m$  entspricht, folgt

$$(5) \quad \alpha_1^2 \text{ ::: } p_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1^3 \text{ ::: } p_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1^4 \text{ ::: } p_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$(6) \quad \alpha_2^2 \text{ ::: } p_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2^3 \text{ ::: } p_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3^2 \text{ ::: } p_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

f) Ist  $q$  eine beliebige Permutation von  $\{1, 2, 3, 4\}$ , so gibt es gemäß (4), (5), (6)

- ein  $r \in \{1, 2, 3, 4\}$  mit  $p_1^r \circ q : 1 \rightarrow 1$ ,
- ein  $s \in \{1, 2, 3\}$  mit  $p_2^s \circ p_1^r \circ q : 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2$ ,
- ein  $t \in \{1, 2\}$  mit  $p_3^t \circ p_2^s \circ p_1^r \circ q : 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3$ ,

d.h. es gilt  $p_3^t \circ p_2^s \circ p_1^r \circ q = id_{\{1,2,3,4\}}$  und damit

$$(7) \quad \boxed{q = p_1^{4-r} \circ p_2^{3-s} \circ p_3^{2-t}}.$$

Demnach ist  $\{p_1, p_2, p_3\}$  ein Erzeugendensystem der Gruppe  $Per\{1, 2, 3, 4\}(\circ)$  aller Permutationen von  $\{1, 2, 3, 4\}$ , die bekanntlich aus genau  $24 = 4!$  Elementen besteht. Dies bedeutet, daß die Drehungen aus  $\mathfrak{S}_{\mathcal{W}}$  alle 24 Permutationen der Raumdiagonalen von  $\mathcal{W}$  ermöglichen, und mithin enthält  $\mathfrak{S}_{\mathcal{W}}$  wenigstens 24 verschiedene Drehungen.

g) Wird die Kante  $[P_1, -P_2]$  von  $\mathcal{W}$  durch eine Drehung  $\varphi \in \mathfrak{S}_{\mathcal{W}}$  auf die Kante  $[X, Y]$  von  $\mathcal{W}$  abgebildet, so gilt entweder  $\varphi(P_1) = X \wedge \varphi(-P_2) = Y$  oder  $\varphi(P_1) = Y \wedge \varphi(-P_2) = X$ . Nach (4.24) gibt es dann aber in  $\mathfrak{S}_{\mathcal{W}}$  nicht mehr als zwei Drehungen, die  $[P_1, -P_2]$  auf  $[X, Y]$  abbilden. Da  $\mathcal{W}$  genau 12 Kanten besitzt, enthält  $\mathfrak{S}_{\mathcal{W}}$  demnach höchstens 24 Drehungen.

Mit f) ist nun klar, daß es in  $\mathfrak{S}_W$  genau 24 Drehungen gibt. Jeder Verkettung von zwei dieser Drehungen entspricht eine Verkettung der zugehörigen Permutationen der Raumdiagonalen von  $W$ . Damit ist gezeigt:

**(5.2) Satz.** Die Gruppe  $\mathfrak{D}_W(\circ)$  aller Drehungen, die den Würfel  $W$  auf sich abbilden, ist isomorph zur Gruppe  $\text{Per}\{1, 2, 3, 4\}(\circ)$ .  $\mathfrak{D}_W$  operiert auf den Raumdiagonalen von  $W$  genau so wie  $\text{Per}\{1, 2, 3, 4\}$  auf den Zahlen 1, 2, 3, 4.

**(5.3) Bemerkung.** Die Anzahl der Drehungen eines Würfels läßt sich direkt am Modell ermitteln, indem man die echten Drehungen um die Raumdiagonalen und um die Verbindungen sich gegenüberliegender Kantenmitten bzw. Flächenmitten zählt.

Über die damit gewonnene Zahl 24 geht die Aussage von (5.2) weit hinaus, denn hier wird die *Struktur* der Gruppe der Drehungen von  $W$  beschrieben. Immerhin gibt es genau 15 nichtisomorphe Gruppen der Ordnung 24, und wir wissen nun mit (5.2), um welche dieser Gruppen es sich handelt.

**(5.4)** Offenbar ist die Punktspiegelung  $\check{\mathbf{0}}$  am Ursprung ein Element von  $\mathfrak{S}_W$ , welches alle Raumdiagonalen von  $W$  festläßt, welches aber keine Ecke von  $W$  festläßt.

Ist  $\psi \in \mathcal{O}_3^- \cap \mathfrak{S}_W$ , so ist  $\varphi := \check{\mathbf{0}} \circ \psi \stackrel{(4.21)}{\in} \mathcal{O}_3^+ \cap \mathfrak{S}_W = \mathfrak{D}_W$ , und mit  $\check{\mathbf{0}} = \check{\mathbf{0}}^{-1}$  folgt

$\psi = \check{\mathbf{0}} \circ \varphi$ . Ist  $\varphi' \in \mathfrak{D}_W$ , so ist  $\check{\mathbf{0}} \circ \varphi' \in \mathcal{O}_3^- \cap \mathfrak{S}_W$ , und überdies gilt

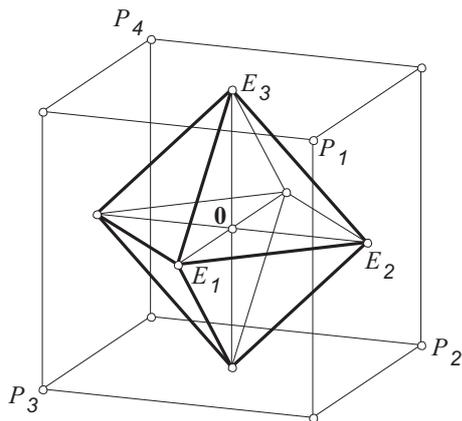
$\check{\mathbf{0}} \circ \varphi = \check{\mathbf{0}} \circ \varphi' \Leftrightarrow \varphi = \varphi' \quad \forall \varphi, \varphi' \in \mathfrak{D}_W$ . Damit ist wegen (4.25) gezeigt:

**(5.5) Hauptsatz 1.** Die Gruppe  $\mathfrak{S}_W(\circ)$  aller Symmetrien des Würfels  $W$  besteht aus genau 48 Elementen. Es gilt

$$(1) \quad \check{\mathbf{0}} \in \mathfrak{S}_W \wedge \check{\mathbf{0}} = \check{\mathbf{0}}^{-1} \wedge \check{\mathbf{0}} \circ \varphi = \varphi \circ \check{\mathbf{0}} \quad \forall \varphi \in \mathfrak{S}_W,$$

$$(2) \quad \mathfrak{S}_W = \mathfrak{D}_W \dot{\cup} \{ \check{\mathbf{0}} \circ \varphi \mid \varphi \in \mathfrak{D}_W \}. \quad (\text{„}\dot{\cup}\text{“ bedeutet „disjunkte Vereinigung“.)}$$

Wegen (1) und (2) wird  $\mathfrak{S}_W$  als das **direkte Produkt** der Gruppen  $\mathfrak{D}_W(\circ)$  und  $\{id_{\mathbb{R}^3}, \check{\mathbf{0}}\}(\circ)$  bezeichnet. Hiermit ist insbesondere bekannt, um welche der 52 Gruppen der Ordnung 48 es sich bei  $\mathfrak{S}_W(\circ)$  handelt.



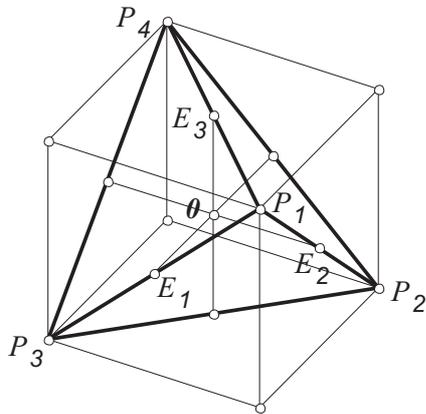
**(5.6)** Die Seitenmitten des Würfels  $W$  bilden die 6 Ecken  $\{E_1, E_2, E_3, -E_1, -E_2, -E_3\}$  eines **Oktaeders** ( $8$ -Flächners)  $\mathbb{O}$ . Das Oktaeder  $\mathbb{O}$  hat 12 **Kanten** der Länge  $\sqrt{2}$ , ferner 3 **Diagonalen** der Länge 2, deren Mitten der Ursprung  $\mathbf{0}$  ist. Die 8 Seitenflächen von  $\mathbb{O}$  sind die aus Kanten gebildeten gleichseitigen Dreiecke. Ist  $\varphi$  eine Symmetrie von  $\mathbb{O}$ , so permutiert  $\varphi$  die Ecken von  $\mathbb{O}$  und damit auch die Diagonalenmitten von  $\mathbb{O}$ , d.h.  $\varphi$  läßt den Ursprung  $\mathbf{0}$  fest und ist somit eine Isometrie des  $\mathbb{R}^3$ . Nach (4.16) gibt es zu  $\varphi$  genau eine Permutation  $(r, s, t)$  von  $(1, 2, 3)$  mit

$\varphi(E_1) \in \{E_r, -E_r\}$ ,  $\varphi(E_2) \in \{E_s, -E_s\}$ ,  $\varphi(E_3) \in \{E_t, -E_t\}$ , wobei jedes der Vorzeichen  $\pm$  in Frage kommt, d.h. gemäß (4.16) gibt es insgesamt genau  $3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$  Isometrien, die die Ecken von  $\mathbb{O}$  permutieren.

Da diese Isometrien linear sind und da jede Ecke von  $W$  in der Form  $xE_1 + yE_2 + zE_3$  mit  $x, y, z \in \{1, -1\}$  darstellbar ist, permutieren diese Isometrien zugleich auch die Ecken von  $W$ . In Verbindung mit (5.5) führt dies auf

(5.7) **Satz.** Die Symmetrien von  $\mathbb{O}$  sind identisch mit den Symmetrien von  $\mathcal{W}$ .

(5.8) **Bemerkung.** Die Seitenmitten eines Würfels bilden ein Oktaeder, und die Seitenmitten eines Oktaeders bilden einen Würfel. Beide Körper haben 12 Kanten, und ihre Symmetriegruppen sind identisch. Deshalb werden Würfel und Oktaeder als **zueinander duale Körper** bezeichnet.



(5.9) die vier Ecken  $P_1, P_2, P_3, P_4$  des Würfels  $\mathcal{W}$  bilden die Ecken eines **Tetraeders** (*4-Flächners*)  $\mathcal{T}$  mit sechs Seitendiagonalen des Würfels  $\mathcal{W}$  als **Kanten**. Die Kantenmitten dieses Tetraeders sind die Punkte  $E_1, E_2, E_3, -E_1, -E_2, -E_3$ , d.h. sie sind die Ecken des Oktaeders  $\mathbb{O}$ , dessen Diagonalen den Ursprung als Mitte haben. Neben  $\mathcal{T}$  ist dem Würfel  $\mathcal{W}$  ein zweites Tetraeder  $\mathcal{T}'$  mit den Ecken  $-P_1, -P_2, -P_3, -P_4$  eingeschrieben;  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  sind kongruent vermittelt der Isometrie  $\check{\mathbf{O}}$ .

Um die Symmetrien von  $\mathcal{T}$  zu bestimmen, betrachten wir die Isometrien  $\beta_1 := \check{\mathbf{O}} \circ \alpha_1, \beta_2 := \alpha_2$  und  $\beta_3 := \check{\mathbf{O}} \circ \alpha_3$ , wobei  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  wie in (5.1)d) definiert seien.

Mit (5.1)(1),(2),(3) bestätigt man, daß  $\beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$  die Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  permutieren. Da  $\check{\mathbf{O}}$  jede der Raumdiagonalen  $d_1, d_2, d_3, d_4$  von  $\mathcal{W}$  festläßt, permutiert  $\beta_k$  für  $k = 1, 2, 3$  die Raumdiagonalen von  $\mathcal{W}$  genau so wie  $\alpha_k$ .

Da nun jede Raumdiagonale  $d_m$  für  $m = 1, 2, 3, 4$  durch die Punkte  $\check{\mathbf{O}}$  und  $P_m$  festgelegt ist, permutiert  $\beta_k$  für  $k = 1, 2, 3$  die Punkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  hinsichtlich der Indizes genau so wie die Raumdiagonalen  $d_1, d_2, d_3, d_4$ . Nach (5.1)e) haben wir dann die Entsprechung  $\beta_1 ::: p_1, \beta_2 ::: p_2, \beta_3 ::: p_3$ , wobei wir die Zahlen 1, 2, 3, 4 jetzt als Indizes von  $P_1, P_2, P_3, P_4$  deuten können.

Gerade so, wie wir nach (5.1)g) mit  $p_1, p_2, p_3$  alle Permutationen von  $\{1, 2, 3, 4\}$  erzeugen konnten, können wir nun mit  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  alle Permutationen von  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  erzeugen. Demnach wird jede Permutationen von  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  durch eine Isometrie aus  $\mathcal{O}_3$  induziert. Da eine Isometrie als lineare Bijektion durch die Bilder der unabhängigen Vektoren  $P_1, P_2, P_3$  festgelegt ist, folgt

(5.10) **Satz.** Die Gruppe  $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}(\circ)}$  aller Symmetrien des Tetraeders  $\mathcal{T}$  ist isomorph zur Gruppe  $\text{Per}\{1, 2, 3, 4\}(\circ)$  und besteht aus 24 Elementen.

(5.11) **Bemerkung.** Aus (5.9) ist zusätzlich zu erkennen, daß jede Symmetrie von  $\mathcal{T}$  zugleich eine Symmetrie von  $\mathcal{W}$  und damit auch von  $\mathcal{T}'$  ist, d.h. die Hälfte der Symmetrien von  $\mathcal{W}$  läßt  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  jeweils als Ganzes fest. Dagegen werden  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  durch die übrigen Symmetrien von  $\mathcal{W}$  vertauscht, wie man durch Vorschalten von  $\check{\mathbf{O}}$  erkennt.

### B. Gerade und ungerade Permutationen

In Verbindung mit der Untersuchung der Symmetriegruppen von Ikosaeder und Dodekaeder benötigen wir die folgenden Begriffsbildungen:

(5.12) Gegeben sei die Menge  $\mathbb{M} := \{1, 2, \dots, n\}$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Ist  $p$  eine Permutation von  $\mathbb{M}$ , so wird

$$(1) \quad \text{sign}(p) := \prod_{\{r,s\} \in \mathbb{M}_2} \frac{s-r}{p(s)-p(r)}$$

das **Signum** oder **Vorzeichen** von  $p$  genannt. Hierbei ist  $\mathbb{M}_2$  die Gesamtheit der

2-elementigen Teilmengen von  $\mathbb{M}$ , und für jede dieser 2-elementigen Teilmengen ist der angegebene Quotient genau einmal als Faktor bei der Produktbildung aufzuführen.

Demnach besteht das gesamte Produkt aus  $\binom{n}{2}$  Faktoren, denn  $\binom{n}{2} = n \cdot (n-1)/2$  ist die Anzahl der 2-elementigen Teilmengen von  $\mathbb{M}$ .

Da jede Permutation  $p$  von  $\mathbb{M}$  zugleich auch alle zweielementigen Teilmengen von  $\mathbb{M}$  permutiert, kommen – abgesehen vom Vorzeichen – im Zähler des gesamten Produktes die gleichen Zahlen vor wie im Nenner, d.h. es gilt

$$(2) \quad \boxed{\text{sign}(p) \in \{1, -1\}}.$$

**(5.13) Beispiel.** Die Permutation  $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  aus (5.1)(4) hat das Signum  $-1$  wegen  $\frac{(2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3)}{(3-2)(4-2)(4-3)(1-2)(1-3)(1-4)} = (-1)^3$ . Da  $\frac{s-r}{p(s)-p(r)} = \frac{r-s}{p(r)-p(s)} \quad \forall \{r, s\} \in \mathbb{M}_2$

gilt, notiert man zuerst alle Zähler (etwa systematisch nach Art eines Telefonbuches) mit positiven Differenzen und schreibt dann in den Nenner unter jedes Urbild das entsprechende Bild. Jetzt reicht es, die Anzahl der negativen Faktoren im Nenner zu bestimmen und diese Zahl als Exponenten für  $-1$  zu nehmen.

Diese Anzahl ist zugleich die Anzahl der Nachbarvertauschungen erst für 1, dann für 2, dann für 3, usw., die man benötigt, um die Sequenz der Bilder in die natürliche Reihenfolge zu bringen, und damit hat man ein vereinfachtes Verfahren zur Bestimmung des Signums.

**(5.14)** Die Permutationen mit dem Signum  $+1$  heißen **gerade**, die übrigen **ungerade**. Von besonderer Bedeutung für uns ist die Aussage

**(5.15) Satz.** Sind  $p, q$  Permutationen von  $\mathbb{M} := \{1, \dots, n\}$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , so gilt

$$\boxed{\text{sign}(p) \cdot \text{sign}(q) = \text{sign}(p \circ q)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis:} \quad & \text{Es ist} \quad \prod_{\{r,s\} \in \mathbb{M}_2} \frac{s-r}{q(s)-q(r)} \cdot \prod_{\{t,u\} \in \mathbb{M}_2} \frac{t-u}{p(t)-p(u)} = \\ & = \prod_{\{r,s\} \in \mathbb{M}_2} \frac{s-r}{q(s)-q(r)} \cdot \prod_{\{r,s\} \in \mathbb{M}_2} \frac{q(s)-q(r)}{p(q(s))-p(q(r))} = \prod_{\{r,s\} \in \mathbb{M}_2} \frac{s-r}{p \circ q(s)-p \circ q(r)}. \end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung wird benutzt, daß mit  $\{r, s\}$  auch  $\{t, u\}$  für  $t := q(r)$  und  $u := q(s)$  alle 2-elementigen Teilmengen von  $\mathbb{M}$  durchläuft.  $\square$

Unter Verwendung von (5.15) zeigen wir nun

**(5.16) Satz.** Ist  $\mathbb{M} := \{1, \dots, n\}$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , so bilden die geraden Permutationen von  $\mathbb{M}$  eine Untergruppe  $\mathcal{A}_n$  der Permutationsgruppe  $\text{Per}(\mathbb{M})(\circ)$ .

Es ist  $|\mathcal{A}_n| = \frac{n!}{2}$ . Man nennt  $\mathcal{A}_n$  die **alternierende Gruppe** von  $\{1, \dots, n\}$ .

*Beweis:* 1) Offenbar ist  $\text{id}_{\mathbb{M}} \in \mathcal{A}_n$ , und wegen (5.15) gilt  $p \circ q \in \mathcal{A}_n \quad \forall p, q \in \mathcal{A}_n$ . Ist  $p \in \mathcal{A}_n$ , so ist auch  $p^{-1} \in \mathcal{A}_n$ , denn andernfalls wäre  $\text{id}_{\mathbb{M}} = p \circ p^{-1} \notin \mathcal{A}_n$  gemäß (5.15). Demnach ist  $\mathcal{A}_n$  eine Untergruppe von  $\text{Per}(\mathbb{M})(\circ)$ .

2) Ist  $q \in \text{Per}(\mathbb{M})(\circ)$  definiert durch  $q(1) = 2 \wedge q(2) = 1 \wedge q(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{M} \setminus \{1, 2\}$ , so ist  $(2-1)/(1-2)$  der einzige negative Faktor bei der Bestimmung des Signums von  $q$ , d.h. es ist  $\text{sign}(q) = -1$  und damit  $q \notin \mathcal{A}_n$ . Überdies ist  $q = q^{-1}$ .

Ist nun  $f \in \text{Per}(\mathbb{M}) \setminus \mathcal{A}_n$ , so ist  $p_0 := q \circ f \stackrel{(5.15)}{\in} \mathcal{A}_n$ , also  $f = q \circ p_0 \in q \circ \mathcal{A}_n := \{q \circ p \mid p \in \mathcal{A}_n\}$ .  
 Außerdem gilt  $q \circ p \stackrel{(5.15)}{\in} \text{Per}(\mathbb{M}) \setminus \mathcal{A}_n \wedge (q \circ p = q \circ p' \Rightarrow p = p') \forall p, p' \in \mathcal{A}_n$ . Demnach ist  $q \circ \mathcal{A}_n = \text{Per}(\mathbb{M}) \setminus \mathcal{A}_n \wedge |q \circ \mathcal{A}_n| = |\mathcal{A}_n|$ , und es folgt  $|\mathcal{A}_n| = |\text{Per}(\mathbb{M})|/2 = n!/2$ .  $\square$

(5.17) Am berühmtesten unter allen alternierenden Gruppen ist wohl die  $\mathcal{A}_5$ . Sie hat 60 Elemente, und aus ihren Eigenschaften läßt sich ableiten, daß es keine allgemeine Lösungsformel für Gleichungen 5. und höheren Grades geben kann, während solche Formeln für Gleichungen 2., 3. und 4. Grades existieren. Untrennbar verbunden mit diesem bemerkenswerten Resultat sind die Namen NIELS HENRIK ABEL (1802 - 1829) und EVARISTE GALOIS (1811 - 1832).

### C. Der goldene Schnitt

(5.18) Sind  $A, B \in \mathbb{C}$  und ist  $C \in [A, B] \setminus \{A, B\}$ , so sagt man,  $C$  teilt die Strecke  $[A, B]$  im **goldenen Schnitt**, wenn für  $a = |A-C| \wedge b = |B-C|$  die Bedingung

(1)  $\boxed{(a+b)/b = b/a}$  

erfüllt ist, wenn sich also die Gesamtstrecke zum größeren Streckenabschnitt so verhält wie der größere Streckenabschnitt zum kleineren.

Die Zahl  $\boxed{c := b/a}$  wird die **goldene Schnittzahl** genannt.

Aus (1) folgt  $c^{-1} + 1 = (a+b)/b = b/a = c$ , also

(2)  $\boxed{c^{-1} + 1 = c} \wedge \boxed{1 + c = c^2}$ .

Die quadratische Gleichung  $x^2 - x - 1 = 0$  hat die Lösungen  $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ , und wegen  $c > 0$  gilt dann

(3)  $\boxed{c = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1,6180339887498948482045868343656\dots}$ .

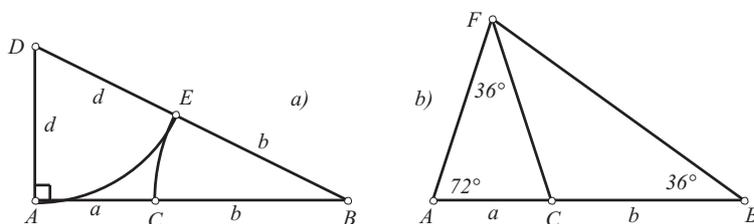
Seit der Antike wird die Proportion des goldenen Schnitts als ästhetisch besonders ansprechend empfunden, und so kann man bis heute in Kunstwerken und Bauwerken immer wieder eine Realisierung dieses Verhältnisses vorfinden. Zur vertiefenden Lektüre wird das schöne Buch „Der goldene Schnitt“ von A. BEUTELSPACHER und B. PETRI empfohlen.

Wir werden bald sehen, daß der goldene Schnitt bei Ikosaedern und bei Dodekaedern eine wichtige Rolle spielt. Um dies zu erkennen, zeigen wir

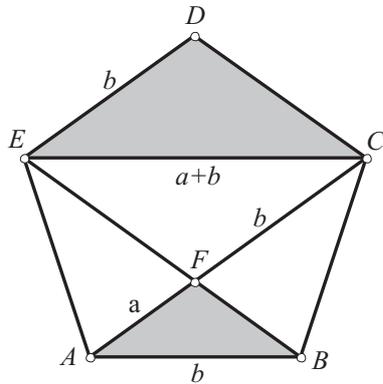
#### (5.19) Konstruktionen.

a) Ist  $[A, B]$  vorgegeben, so konstruieren wir zunächst einen Punkt  $D$  so, daß  $\{A, B, D\}$  ein Dreieck mit  $\langle A, B \rangle \perp \langle A, D \rangle$  und mit  $\frac{1}{2}|A-B| = |A-D|$  ist. Der Kreis um  $D$  durch  $A$  treffe die Strecke  $[B, D]$  in  $E$ . Dann trifft der Kreis um  $B$  durch  $E$  die Strecke  $[A, B]$  in einem Punkt  $C$ , und dieser teilt  $[A, B]$  im goldenen Schnitt. Denn für  $a := |A-C|$ ,  $b := |B-C|$  und  $d := |D-A|$  führt der Satz des PYTHAGORAS auf  $(a+b)^2 + d^2 = (b+d)^2$ , d.h. es ist  $a^2 + 2ab = 2d \cdot b = (a+b)b$  und damit  $a(a+b) = b^2$ .

b) Ist  $[A, B]$  vorgegeben, so konstruieren wir  $F \in \mathbb{C}$  mit  $\sphericalangle BAF = 72^\circ \wedge \sphericalangle ABF = 36^\circ$ . Ist  $C \in [A, B]$  mit  $\sphericalangle AFC = 36^\circ$ , so teilt  $C$  die Strecke  $[A, B]$  im goldenen Schnitt.



Denn es gilt  $\sphericalangle ACF = 72^\circ = \sphericalangle AFB$  und  $\sphericalangle BFC = 36^\circ$ . Deshalb ist  $b = |C-F| = |A-F|$ , und mit der Ähnlichkeit von  $(A, C, F)$  und  $(A, F, B)$  folgt dann  $(a+b)/b = b/a$ .

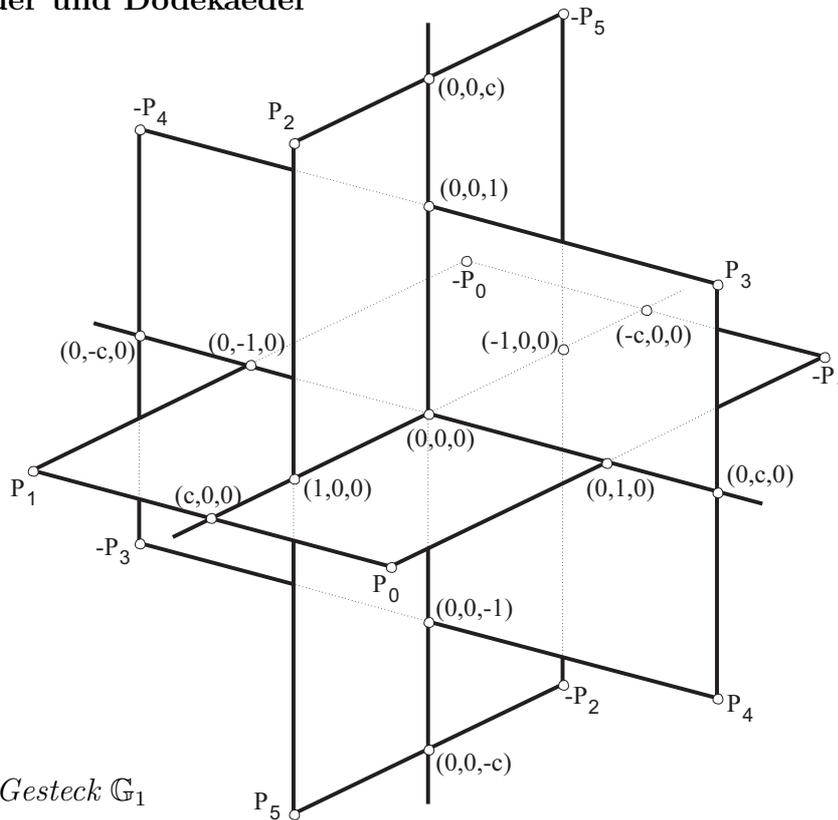


**(5.20) Satz.** Die Diagonalen eines regulären Fünfecks  $\mathcal{F}$  von  $\mathbb{C}$  teilen sich gegenseitig im goldenen Schnitt, und das Verhältnis Diagonalenlänge/Kantenlänge von  $\mathcal{F}$  ist die goldene Schnittzahl.

*Beweis:* Es sei  $\mathcal{F} = (A, B, C, D, E)$ , wobei die Reihenfolge der Ecken einer Randdurchlaufung von  $\mathcal{F}$  entspricht, und es sei  $\{F\} := \langle A, C \rangle \cap \langle B, E \rangle$ . Aus Symmetriegründen gilt  $\langle A, B \rangle \parallel \langle E, C \rangle \wedge \langle A, C \rangle \parallel \langle E, D \rangle \wedge \langle E, B \rangle \parallel \langle D, C \rangle$ . Dann ist  $(E, F, C, D)$  ein Parallelogramm, und die Dreiecke  $(E, C, D)$  und  $(A, B, F)$  sind ähnlich.

Für  $a := |A-F|$  und  $b := |A-B| = |E-D|$  folgt  $b = |F-C|$  und  $|E-C| = |A-C| = a+b$ . Dies führt mit der Ähnlichkeit der genannten Dreiecke auf  $a+b/b = b/a$ .  $\square$

**D. Ikosaeder und Dodekaeder**



Das Gesteck  $\mathbb{G}_1$

**(5.21) a)** Wenn man im  $\mathbb{R}^3$  drei rechteckige Postkarten gleicher Größe entsprechend der obigen Figur ineinanderfügt, so sprechen wir von einem **Gesteck**.

Werden die Punkte  $P_0, \dots, P_5, -P_0, \dots, -P_5$  gemäß der Figur mit Koordinaten versehen, so kann man fragen, für welchen Wert  $c \in \mathbb{R}_+^*$  diese 12 Punkte möglicherweise die Ecken eines Ikosaeders bilden. Als notwendige Bedingung ist  $|P_0-P_1| = |P_0-P_2|$  zu fordern, also  $2^2 = |(c, 1, 0) - (1, 0, c)|^2 = (c-1)^2 + 1 + c^2 = 2c^2 - 2c + 2$  und damit  $\boxed{c+1 = c^2}$ . Dies bedeutet nach (5.18), daß  $c$  notwendig die goldene Schnittzahl ist.

b) Im weiteren sei  $c \in \mathbb{R}_+^*$  mit  $c+1 = c^2$ . Dann betrachten wir im  $\mathbb{R}^3$  die Kartenecken des obigen Gestecks, also die Punkte

$P_0 = (c, 1, 0)$ ,  $P_1 = (c, -1, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0, c)$ ,  $P_3 = (0, c, 1)$ ,  $P_4 = (0, c, -1)$ ,  $P_5 = (1, 0, -c)$   
und die Punkte  $-P_0, \dots, -P_5$ .

Zunächst bemerken wir, daß alle diese Punkte vom Ursprung  $\mathbf{0}$  den Abstand  $\sqrt{1+c^2}$  haben, d.h. es handelt sich um Punkte einer Kugelsphäre mit dem Mittelpunkt  $\mathbf{0}$ .

Als Abstände für Punkte  $X, Y \in \{P_0, \dots, P_5, -P_0, \dots, -P_5\}$  treten, wie man unter Verwendung der Gleichung  $c+1 = c^2$  nachprüfen kann, in 30 Fällen die Zahl 2, in 30 Fällen die Zahl  $2c$  und in 6 Fällen die Zahl  $2\sqrt{1+c^2}$  auf, und weitere Möglichkeiten gibt es nicht, da sich aus 12 Punkten genau  $\binom{12}{2} = 66$  zweielementige Teilmengen bilden lassen.

Da wir, wie ebenfalls am Gesteck festzustellen ist, aus  $P_0, \dots, P_5, -P_0, \dots, -P_5$  genau 20 gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 2 so bilden können, daß jede der 12 Ecken zu genau 5 dieser Dreiecke gehört, ist nun klar, daß  $\{P_0, \dots, P_5, -P_0, \dots, -P_5\}$  tatsächlich die **Eckenmenge** eines **Ikosaeders** (20-Flächners)  $\mathfrak{I}$  ist.

Eine Verbindungsstrecke zwischen zwei Ecken  $X, Y$  des Ikosaeders  $\mathfrak{I}$  heißt

**Kante** von  $\mathfrak{I}$ , wenn sie die Länge 2 hat,

**Nebenkante** von  $\mathfrak{I}$ , wenn sie die Länge  $2c$  hat,

**Diagonale** von  $\mathfrak{I}$ , wenn sie die Länge  $2\sqrt{1+c^2}$  hat.

Wir haben genau 6 Diagonalen, nämlich die Strecken  $[P_k, -P_k]$  für  $k = 0, \dots, 5$ . Ihre Mitte ist jeweils der Ursprung  $\mathbf{0}$ , der deshalb auch die **Mitte** von  $\mathfrak{I}$  genannt wird.

Die aus den Kanten von  $\mathfrak{I}$  gebildeten 20 gleichseitigen Dreiecke werden als die **Seitenflächen** von  $\mathfrak{I}$  bezeichnet, und ihre Schwerpunkte - für das Dreieck  $\{X, Y, Z\}$  ist dies der Punkt  $(X+Y+Z)/3$  - heißen die **Seitenmitten** von  $\mathfrak{I}$ .

Ist  $[X, Y]$  eine Kante von  $\mathfrak{I}$ , so ist auch  $[-X, -Y]$  eine Kante von  $\mathfrak{I}$ , genannt **Gegenkante**, und die Menge  $\mathbb{K}_1 = \{[X, Y], [-X, -Y]\}$  heißt die durch  $[X, Y]$  bestimmte **Karte** mit den **Ecken**  $X, Y, -X, -Y$ . Die Karte  $\mathbb{K}_1$  besteht aus zwei parallelen Kanten eines Rechtecks vom Format  $2 \times 2c$  mit Mittelpunkt  $\mathbf{0}$ . Zu dieser Karte  $\mathbb{K}_1$  finden wir, wie am Modell zu erkennen ist und wie auch rechnerisch bestätigt werden kann, genau zwei weitere Karten  $\mathbb{K}_2 = \{[R, S], [-R, -S]\}$  und  $\mathbb{K}_3 = \{[U, V], [-U, -V]\}$  derart, daß  $\left\{\frac{X-Y}{2}, \frac{R-S}{2}, \frac{U-V}{2}\right\}$  eine ON-Basis des  $\mathbb{R}^3$  ist, und dann bezeichnen wir  $\{\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3\}$  als ein **Gesteck** von  $\mathfrak{I}$ . Insgesamt erhalten wir für  $\mathfrak{I}$  fünf Gestecke  $\mathbb{G}_1, \dots, \mathbb{G}_5$ , nämlich

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_1 &= \{ \{ [P_0, P_1], [-P_0, -P_1] \}, \{ [P_2, -P_5], [P_5, -P_2] \}, \{ [P_3, P_4], [-P_3, -P_4] \} \}, \\ \mathbb{G}_2 &= \{ \{ [P_0, P_2], [-P_0, -P_2] \}, \{ [P_3, -P_1], [P_1, -P_3] \}, \{ [P_4, P_5], [-P_4, -P_5] \} \}, \\ \mathbb{G}_3 &= \{ \{ [P_0, P_3], [-P_0, -P_3] \}, \{ [P_4, -P_2], [P_2, -P_4] \}, \{ [P_5, P_1], [-P_5, -P_1] \} \}, \\ \mathbb{G}_4 &= \{ \{ [P_0, P_4], [-P_0, -P_4] \}, \{ [P_5, -P_3], [P_3, -P_5] \}, \{ [P_1, P_2], [-P_1, -P_2] \} \}, \\ \mathbb{G}_5 &= \{ \{ [P_0, P_5], [-P_0, -P_5] \}, \{ [P_1, -P_4], [P_4, -P_1] \}, \{ [P_2, P_3], [-P_2, -P_3] \} \}.\end{aligned}$$

Die Kartenecken eines jeden Gestecks liefern die 12 Ecken von  $\mathfrak{I}$ , und jede der 30 Kanten von  $\mathfrak{I}$  gehört zu genau einem Gesteck.

c) Es sei  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$  die Menge der Symmetrien von  $\mathfrak{I}$ . Ist  $\varphi \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$ , so permutiert  $\varphi$  wegen der Distanztreue die Diagonalenmitten von  $\mathfrak{I}$ . d.h.  $\varphi$  läßt den Ursprung fest und ist deshalb eine Isometrie des  $\mathbb{R}^3$ . Weiter permutiert  $\varphi$  auch die Kanten, die Nebenkanten, die Seitenflächen und die Seitenmitten von  $\mathfrak{I}$ , außerdem auch die 5 Gestecke von  $\mathfrak{I}$ , denn  $\varphi$  ist distanztreu, linear und orthogonalitätstreu.

d) Wir betrachten nun die Isometrien

- (1)  $\gamma_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \rightarrow xE_1 - yE_2 - zE_3 = (x, -y, -z),$
- (2)  $\gamma_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \rightarrow -xE_1 + yE_2 - zE_3 = (-x, y, -z),$
- (3)  $\gamma_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \rightarrow xE_2 + yE_3 + zE_1 = (z, x, y).$
- (4)  $\gamma_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \rightarrow xA_1 + yA_2 + zA_3,$

wobei  $A_1 := \frac{1}{2}(c, c^{-1}, 1)$ ,  $A_2 := \frac{1}{2}(c^{-1}, 1, -c)$ ,  $A_3 := \frac{1}{2}(-1, c, c^{-1})$  eine ON-Basis bilden, wie man mit Hilfe der Gleichungen  $\boxed{c^2 = 1+c \wedge c = c^{-1}+1 \wedge 1 = c^{-2}+c^{-1}}$  bestätigen kann.

Die Isometrien  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$  bzw.  $\gamma_3$  bzw.  $\gamma_0$  haben die Fixpunkt mengen  $\mathbb{R}E_1$  bzw.  $\mathbb{R}E_2$  bzw.  $\mathbb{R}(1, 1, 1)$  bzw.  $\mathbb{R}P_0$ , d.h. es handelt sich hier um Drehungen.

Weiter folgt  $\gamma_1 = \gamma_1^{-1}$ ,  $\gamma_2 = \gamma_2^{-1}$ ,  $\gamma_3^3 = id_{\mathbb{R}^3}$ ,  $\gamma_0^5 = id_{\mathbb{R}^3}$  sowie

- (5)  $\gamma_1 : P_0 \leftrightarrow P_1, P_2 \leftrightarrow P_5, P_3 \leftrightarrow -P_3, P_4 \leftrightarrow -P_4,$
- (6)  $\gamma_2 : P_0 \leftrightarrow -P_1, P_3 \leftrightarrow P_4, P_2 \leftrightarrow -P_2, P_5 \leftrightarrow -P_5,$
- (7)  $\gamma_3 : P_0 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_0, P_1 \rightarrow P_4 \rightarrow -P_5 \rightarrow P_1,$
- (8)  $\gamma_0 : P_0 \rightarrow P_0, P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5 \rightarrow P_1$

mit entsprechenden Werten für die zugehörigen negativen Vektoren.

e) Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $m \in \{0, 1, 2, 3\}$  induziert  $\gamma_m^k$  eine Permutation der Gestecke  $\mathbb{G}_1, \dots, \mathbb{G}_5$  von  $\mathfrak{J}$ , die wir ähnlich wie in (5.1)e) als Permutation  $p_m^k$  der Indizes  $1, \dots, 5$  der Gestecke notieren wollen. Indem wir untersuchen, in welchem Gesteck die Bilder der Kanten  $[P_0, P_1], \dots, [P_0, P_5]$  liegen, erhalten wir die Zuordnungen

- (9)  $\gamma_1 \cdots q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 \cdots q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix},$
- (10)  $\gamma_3 \cdots q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 \cdots q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Hierbei sind  $q_1, q_2, q_3, q_0$  gerade (!) Permutationen von  $\mathbb{M} := \{1, \dots, 5\}$ , wie man direkt bestätigt. Da das Verketteten der  $\gamma_m$  dem der  $q_m$  entspricht, folgt

- (11)  $\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma_2 \circ \gamma_1 \cdots q_1 \circ q_2 = q_2 \circ q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$
- (12)  $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = (\gamma_1 \circ \gamma_2)^2 = id_{\mathbb{R}^3} \cdots q_1^2 = q_2^2 = (q_1 \circ q_2)^2 = id_{\mathbb{M}},$
- (13)  $\gamma_3^2 \cdots q_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3^3 = id_{\mathbb{R}^3} \cdots q_3^3 = id_{\mathbb{M}}, \quad \gamma_0^5 = id_{\mathbb{R}^3} \cdots q_0^5 = id_{\mathbb{M}},$
- (14)  $\gamma_0^2 \cdots q_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0^3 \cdots q_0^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0^4 \cdots q_0^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

f) Ist  $q$  eine gerade (!) Permutation von  $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , also ein Element von  $\mathcal{A}_5$ , so gibt es gemäß (9) – (14)

- ein Element  $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  mit  $q_0^r \circ q : 1 \rightarrow 1,$
- zwei Elemente  $s, t \in \{1, 2\}$  mit  $q_2^t \circ q_1^s \circ q_0^r \circ q : 1 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 4,$
- ein Element  $u \in \{1, 2, 3\}$  mit  $\delta := q_3^u \circ q_2^t \circ q_1^s \circ q_0^r \circ q : 1 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 4, 5 \rightarrow 5.$

Da  $\delta$  eine gerade Permutation ist, kann nicht  $\delta(2) = 3 \wedge \delta(3) = 2$  gelten. Demnach ist  $\delta = id_{\mathbb{M}}$ , und folglich gilt

$$(15) \quad \boxed{q = q_0^{5-r} \circ q_1^{2-s} \circ q_2^{2-t} \circ q_3^{3-u}}.$$

Dies bedeutet nun, daß  $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$  ein Erzeugendensystem der Gruppe  $\mathcal{A}_5(\circ)$  ist, die nach (5.16) aus genau  $5!/2 = 60$  Elementen besteht.

Demnach ermöglichen die Drehungen aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{J}}$  alle 60 geraden Permutationen der 5 Ge-

stecke von  $\mathfrak{I}$ , und mithin enthält  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$  wenigstens 60 verschiedene Drehungen.

g) Sind  $[U, V], [X, Y]$  Kanten von  $\mathfrak{I}$ , so gibt es nach (4.24) in  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$  höchstens zwei Drehungen, die  $[U, V]$  auf  $[X, Y]$  abbilden (vgl. (5.1g)). Da  $\mathfrak{I}$  genau 30 Kanten hat, kann es dann in  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$  nicht mehr als 60 Drehungen geben.

In Verbindung mit f) bedeutet dies, daß  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$  genau 60 Drehungen enthält. Jeder Verkettung von zwei dieser Drehungen entspricht eine Verkettung der zugehörigen Permutationen der Gestecke von  $\mathfrak{I}$ . Damit ist gezeigt:

**(5.22) Satz.** Die Gruppe  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{I}(\circ)}$  aller Drehungen, die das Ikosaeder  $\mathfrak{I}$  auf sich abbilden, ist isomorph zur Gruppe  $\mathcal{A}_5(\circ)$ .  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{I}}$  operiert auf den Gestecken von  $\mathfrak{I}$  genau so wie  $\mathcal{A}_5$  auf den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5.

**(5.23) Bemerkung.** Es gibt genau 13 nichtisomorphe Gruppen der Ordnung 60. Mit (5.22) wissen wir jetzt, zu welcher dieser Gruppen  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{I}(\circ)}$  isomorph ist (vgl. (5.3)).

**(5.24)** Offenbar ist die Punktspiegelung  $\check{\mathbf{0}}$  am Ursprung ein Element von  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$ , welches der Ecke  $X$  von  $\mathfrak{I}$  die Ecke  $-X$  zuordnet und welches jede Karte und jedes Gesteck von  $\mathfrak{I}$  festläßt.

Mit den gleichen Überlegungen wie in (5.4) - für  $\mathfrak{I}$  anstelle von  $\mathcal{W}$  - erhalten wir dann

**(5.25) Hauptsatz 2.** Die Gruppe  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}(\circ)}$  aller Symmetrien des Ikosaeders  $\mathfrak{I}$  besteht aus genau 120 Elementen. Es gilt

$$(1) \quad \check{\mathbf{0}} \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}} \wedge \check{\mathbf{0}} = \check{\mathbf{0}}^{-1} \wedge \check{\mathbf{0}} \circ \varphi = \varphi \circ \check{\mathbf{0}} \quad \forall \varphi \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}},$$

$$(2) \quad \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}} \dot{\cup} \{ \check{\mathbf{0}} \circ \varphi \mid \varphi \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}} \}.$$

Wegen (1) und (2) wird  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$  als das **direkte Produkt** der Gruppen  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{I}(\circ)}$  und  $\{id_{\mathbb{R}^3}, \check{\mathbf{0}}\}(\circ)$  bezeichnet. Hiermit ist insbesondere bekannt, um welche der 47 Gruppen der Ordnung 120 es sich bei  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}(\circ)}$  handelt.

**(5.26)** Die Seitenmitten des Ikosaeders  $\mathfrak{I}$  bilden die 20 Ecken  $\{R_0, \dots, R_9, -R_0, \dots, -R_9\}$  eines **Dodekaeders** (12-Flächners)  $\mathfrak{D}$ . Zwei Ecken von  $\mathfrak{D}$  mit minimalem Abstand  $\neq 0$  sind  $R_0 := (P_0+P_1+P_2)/3 = (2c+1, 0, c)/3$  und  $R_1 := (P_0+P_1+P_5)/3 = (2c+1, 0, -c)/3$ ; hierbei ist  $|R_0-R_1| = 2c/3$  und  $|R_0-(-R_0)| = 2c^2/\sqrt{3}$ .

Das Dodekaeder  $\mathfrak{D}$  hat 30 **Kanten** der Länge  $2c/3$ . Weiter findet man 10 **Diagonalen** der Länge  $2c^2/\sqrt{3}$ , und diese haben den Ursprung  $\mathbf{0}$  als Mitte.

Ist  $\varphi$  eine Symmetrie von  $\mathfrak{D}$ , so permutiert  $\varphi$  die Ecken von  $\mathfrak{D}$  und damit auch die Diagonalenmitten von  $\mathfrak{D}$ , d.h.  $\varphi$  läßt den Ursprung  $\mathbf{0}$  fest und ist somit eine Isometrie des  $\mathbb{R}^3$ . Jede Drehung aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$  permutiert die Seitenmitten von  $\mathfrak{I}$  und induziert deshalb eine Drehung von  $\mathfrak{D}$ . Sind  $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$  und haben  $\varphi$  und  $\psi$  die gleiche Wirkung auf die Ecken von  $\mathfrak{D}$ , so führt (4.24), bezogen auf zwei Eckpunkte einer Kante von  $\mathfrak{D}$ , auf  $\varphi = \psi$ . Demnach enthält die Symmetriegruppe  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$  von  $\mathfrak{D}$  wenigstens 60 Drehungen, die mit den Drehungen aus  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$  identisch sind. Da  $\mathfrak{D}$  aber genau 30 Kanten besitzt, folgt nun wie für  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$  in (5.21g), daß  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$  genau 60 Drehungen enthält; dies sind die Elemente von  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{I}}$ .

Da  $\mathfrak{D}$  drei linear unabhängige Ecken  $A, B, C$  besitzt und da jede Isometrie wegen ihrer Linearität durch die Wirkung auf  $A, B, C$  festgelegt ist, ist  $\check{\mathbf{0}}$  ein Element von  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ , das in der Wirkung auf die Ecken von  $\mathfrak{D}$  nicht durch eine Drehung aus  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{I}}$  induziert sein kann. Demnach haben wir mit  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}} \dot{\cup} \{ \check{\mathbf{0}} \circ \varphi \mid \varphi \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}} \}$  wenigstens 120 verschiedene Elemente von  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$  gefunden.

Ist  $\eta \in \mathcal{O}_3^- \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ , so ist  $\varphi := \check{\mathbf{0}} \circ \eta \in \mathcal{O}_3^+ \cap \mathfrak{S}_{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}}$ , und damit folgt  $\eta = \check{\mathbf{0}} \circ \varphi \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$ .

Damit ist nun  $\mathfrak{S}_{\mathcal{J}} = \mathfrak{S}_{\mathcal{D}}$  gezeigt, und wir erhalten

**(5.27) Satz.** *Die Symmetrien von  $\mathcal{D}$  sind identisch mit den Symmetrien von  $\mathcal{J}$ .*

**(5.28) Schlußbemerkung.** Die Seitenmitten eines Ikosaeders bilden ein Dodekaeder, und die Seitenmitten eines Dodekaeders bilden ein Ikosaeder. Beide Körper haben 30 Kanten, und ihre Symmetriegruppen sind identisch. Deshalb werden Ikosaeder und Dodekaeder als **zueinander duale Körper** bezeichnet.

### Stichwortregister

- |                                  |                                 |                                |                                     |
|----------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| Abbildung 6                      | Friesgruppe 23                  | Konjugation 2                  | Rosettengruppe 20                   |
| Absolutbetrag 2,3,35             | Fuß 9                           | Konstruktionen 47              | S-Achse 22                          |
| Abstand 2,35                     | Fußpunkt 5                      | Kopf 9                         | Schenkel 14,15                      |
| Achse 10,39,41                   | G-Winkel 14                     | Länge 8,35                     | schneiden 4                         |
| alternierende Gruppe 46          | Gegenkante 49                   | linear unabhängig 36,37        | Schub 10,22                         |
| Anfang 9                         | gegenseitig kongruent 8         | Lot 5                          | Seitenfläche 49                     |
| Anschauungsraum 35               | geordnetes Dreieck 4            | Minimalrichtung 26             | Seitenmitte 43,49                   |
| Argument 3                       | Gerade 36                       | Mitte 4,33,43,49               | senkrecht 5,36                      |
| Aufpunkt 3                       | gerade Bewegung 6               | Mittellinie 16                 | Signum 45                           |
| Basis des $\mathbb{R}^3$ 37      | gerade Isometrie 40             | Mittelsenkrechte 5,36          | Skalar 35                           |
| Bewegung 6                       | gerade Symmetriegruppe 17       | Motiv 17                       | skalare Multiplikation 35           |
| Büschel 12                       | geradliniger Pfeil 35           | multipliziert 3                | Skalarprodukt 36                    |
| Descartes 35                     | Gesteck 48,49                   | Nebenkante 49                  | Spiegelachse 13                     |
| Diagonale 4,44,49,51             | Gitter 26                       | nichtkollinear 3               | Spiegelung 2,10                     |
| Diagonalschnittpt 4              | GI-Achse 22                     | nichtparallel 4                | Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ 38    |
| Diagonalrichtung 25              | gleichsinnig kongruent 8        | normiert 37                    | Spitze 9                            |
| Diedergruppe 19                  | Gleitspiegelung 10              | Nullvektor 35                  | Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ 37 |
| direktes Produkt 44,51           | Gleitspiegelung, wesentliche 23 | Oктаeder 42,44                 | Strahl 3                            |
| diskret 17                       | goldene Schnittzahl 47          | ON-Basis des $\mathbb{R}^3$ 37 | Symmetrie                           |
| Distanz 2,35                     | goldener Schnitt 47             | Ordnung 18                     | des Körpers 42                      |
| distanztreu 6                    | Gradmaß 13                      | Ornamentgruppe 25              | Symmetrieachse 5                    |
| Dodekaeder 42,51                 | Größe 14,15                     | orthogonal 5,36                | Symmetrieebene 36                   |
| Drehspiegelung 40                | Halbzelle 33                    | orthogonale Gruppe 39          | Symmetriegruppe 17                  |
| Drehung 10,13                    | Haupttrichtung 25               | Orthonormalbasis 37            | Tetraeder 42,45                     |
| Drehung des $\mathbb{R}^3$ 40,41 | Hauptsätze                      | Ortsvektor 3,35                | Transformieren 8                    |
| Drehwinkel 13                    | 16,25,27,44,51                  | parallel 4                     | Transitivitätssatz 7                |
| Drehzentrum 10                   | Hauptzelle 26                   | Parallelbüschel 4,5            | Translation 8                       |
| Dreieck 4                        | homogen linear 37               | parallelgleich 9               | U-Gerade 21                         |
| Dreispiegelungssatz 12,40        | Ikosaeder 42,49                 | Parallelogramm 4               | ungerade Bewegung 7                 |
| duale Körper 45,52               | imaginäre Achse 1               | Parallelogrammpunkt 4          | ungerade Isometrie 40               |
| Ebene 36                         | imaginäre Einheit 1             | Permutation, gerade            | Untervektorraum 36                  |
| echt 9,10                        | Imaginärteil 1                  | und ungerade 45,46             | Ursprung 2,35                       |
| Ecken 4,49                       | Isometrie des $\mathbb{R}^3$ 38 | Pfeil 9                        | Vektor 35                           |
| Eckenmenge 48                    | Kante 42,44,45,49,51            | Platon 42                      | Vektorraum 35                       |
| eindimensional 36                | Karte 49                        | platonischer Körper 42         | Verbindungsstrecke 3                |
| Einheitskreis 2                  | Klassifizierung                 | Punkt 35                       | Verketteten 6                       |
| erzeugende Elemente 18           | der Isometrien 40               | Punktspiegelung 10,41          | Verschiebung 8                      |
| erzeugte Untergruppe 18          | kleinste Translation 22         | Pythagoras 2                   | Vorzeichen 45                       |
| Euklid 42                        | kollinear 3                     | Raumdiagonale 42               | Winkel 14,15                        |
| Fixgerade 8                      | komplexe Zahl 1                 | Realteil 1                     | Würfel 42                           |
| Fixpunkt 8                       | kongruent 8,14                  | reelle Achse 1                 | Zelle 26                            |
| Flächendiagonale 42              |                                 | Richtung 9                     | zwischen 4                          |
|                                  |                                 | Richtungsvektor 3              | zyklische Gruppe 18,19              |