9. Singularitäten

In diesem und dem folgenden Abschnitt untersuchen wir das Verhalten holomorpher Funktion in der Nähe einer isolierten Singularität. Wir beginnen mit der *Laurent-Entwicklung* einer holomorphen Funktion, vgl. auch (6.11). Man beachte, dass der Entwicklungspunkt z_0 der Entwicklung i. Allg. nicht zum Definitionsbereich der Funktion gehört.

Satz (9.1) (Laurent-Entwicklung)

a) Ist f auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\overline{K}_{r_1,r_2}(z_0) \subset D$, mit $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, so ist f in $K_{r_1,r_2}(z_0)$ in eine Laurent-Reihe entwickelbar

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \,(z - z_0)^k, \qquad r_1 < |z - z_0| < r_2. \tag{9.2}$$

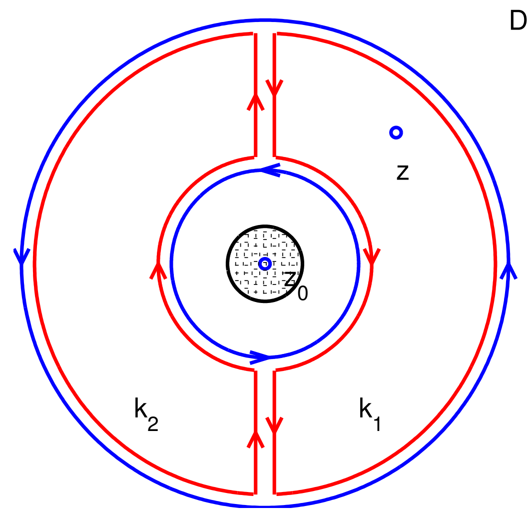
b) Für die Koeffizienten der Laurent-Reihe gilt

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{9.3}$$

dabei ist r ein beliebiger Radius mit $r_1 \leq r \leq r_2$.

c) Die Laurent-Reihe (9.2) konvergiert auf dem größten Kreisring, der in D liegt; auf jedem kleineren, kompakten Kreisring $\overline{K}_{\rho_1,\rho_2}(z_0)$, mit $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$, liegt absolute und gleichmäßige Konvergenz vor.

Beweis: $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ seien die Kreise mit Radien $0 < r_1 < r_2$ um z_0, also $\mathbf{c}_k(t) := z_0 + r_k\, \mathrm{e}^{i\,t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Zu $z \in K_{r_1,r_2}(z_0)$ wird der Kreisring zerlegt, wie in folgender Abbildung und es werden die Kurvenintegrale über $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{k}_2$ gebildet.



Mit dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann

$$\oint_{\mathbf{c}_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \;-\; \oint_{\mathbf{c}_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \;=\; \oint_{\mathbf{k}_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \;+\; \oint_{\mathbf{k}_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$= \; 2\,\pi\,i\,f(z) \;+\; 0.$$

Wir formen die Integrale über die $\mathbf{c}_k$ um:

a) Sei $w \in \text{Bild}(\mathbf{c}_2)$, also $|w - z_0| > |z - z_0|$. Damit gilt

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{w-z_0}{(w-z_0)-(z-z_0)}$$

$$= \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1-(z-z_0)/(w-z_0)}$$

$$= \frac{1}{w-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{z-z_0}{w-z_0}\Big)^k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{c}_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{c}_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dw\Big] (z-z_0)^k$$

b) Sei $w \in \text{Bild}(\mathbf{c}_1)$, also $|w - z_0| < |z - z_0|$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{z-z_0}\;\frac{z-z_0}{(w-z_0)-(z-z_0)} \\
&= -\,\frac{1}{z-z_0}\;\frac{1}{1-(w-z_0)/(z-z_0)} \\
&= -\,\frac{1}{z-z_0}\;\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{w-z_0}{z-z_0}\Big)^k \\
&= -\,\sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{(z-z_0)^m}{(w-z_0)^{m+1}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; -\,\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbf{c}_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw \;=\; \sum_{k=-\infty}^{-1}\Big[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbf{c}_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\Big]\,(z-z_0)^k$$

Addition der beiden Integrale ergibt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, (z - z_0)^k, \qquad r_1 < |z - z_0| < r_2,$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\pi\,i} \displaystyle\oint_{\mathbf{c}_2} \dfrac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dz,: & k = 0, 1, 2, \ldots \\[2ex] \dfrac{1}{2\,\pi\,i} \displaystyle\oint_{\mathbf{c}_1} \dfrac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dz,: & k = -1, -2, -3, \ldots \end{cases}$$

Nun sind die Kreise $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ aber zu jedem (einmal positiv durchlaufenen) Kreis $|z - z_0| = r, \quad r \in [r_1, r_2]$, homotop in D. Damit folgt die Behauptung aus dem Cauchyschen Integralsatz. $\square$

Bemerkungen (9.4)

a) Die Laurent-Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt z_0 ist bei vorgebenem Kreisring eindeutig bestimmt (*Identitätssatz*).

b) Ist f holomorph auf den Kreis $\overline{K}_{r_2}(z_0)$, so gilt aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes $a_k = 0$, $k = -1, -2, \ldots$ Die Laurent-Reihe stimmt in diesem Fall mit der Taylor-Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt z_0 überein.

Beispiele (9.5)

a) $f(z) := \dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$, Kreisring: $0 < |z| < \infty$.

Aus der Taylor-Reihe von sin zum Entwicklungspunkt z_0 erhält man

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k-1} \\ &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + - \ldots \end{aligned}$$

b) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)\,(z-2)}$, $z_0 = 0$.

Die rationale Funktion f besitzt Singularitäten in $z_1 = -1$ und $z_2 = 2$. Es gibt daher *drei* Laurent-Entwickungen zum Entwicklungspunkt z_0, nämlich jeweils in den Bereichen (i) $|z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 2$ und (iii) $|z| > 2$.

Wir bestimmen die Laurent-Entwicklung für den Bereich (ii):

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1/3}{z-2} - \frac{1/3}{z+1} \\
&= -(1/6)\,\frac{1}{1-z/2} - 1/(3z)\,\frac{1}{1-(-1/z)} \\
&= -(1/6)\,\sum_{k=0}^{\infty}(z/2)^k - 1/(3z)\,\sum_{k=0}^{\infty}(-1/z)^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^k}{3}\,z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3\times 2^{k+1}}\right)z^k.
\end{aligned}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die anderen beiden L-Entwicklungen.

Bemerkung (9.6)

Analog zu (8.14) gilt die Cauchysche Ungleichung auch für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k, \\
|a_k| &\leq \frac{M(r)}{r^k},\; k \in \mathbb{Z},\; r_1 \leq r \leq r_2, \\
M(r) &= \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.
\end{aligned}
$$

Bemerkung (9.7)

Laurent-Entwicklungen lassen sich auch dazu benutzen, Fourier-Entwicklungen von 2π – periodischen Funktionen $f \in C_{2\pi}$ zu bestimmen. Man geht dazu wie folgt vor:

1.) Definiere $F(z)$, $|z| = 1$, durch $F(\mathrm{e}^{i\,\phi}) := f(\phi)$.

2.) Setze F zu einer auf einem Kreisring $r_1 < |z| < r_2$ mit $r_1 < 1 < r_2$ holomorphen Funktion fort. Ermittle deren Laurent-Entwicklung

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\, z^k, \quad r_1 < |z| < r_2.$$

3.) Setze hierin $z = \mathrm{e}^{i\phi}$ ein

$$f(\phi) = F(\mathrm{e}^{i\phi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\, \mathrm{e}^{i\,k\,\phi}.$$

Für die Fourier-Koeffizienten ergibt sich

$$\gamma_k = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{|w|=1} \frac{F(w)}{(w-0)^{k+1}}\, dw, \qquad w = \mathrm{e}^{i\phi},$$

$$= \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} f(\phi)\, \mathrm{e}^{-i\,k\,\phi}\, d\,\phi.$$

Definition (9.8)

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph auf einem Gebiet D. Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ heißt eine isolierte Singularität von f, falls es ein $r > 0$ gibt mit $K_{0,r}(z_0) \subset D$.
Ist weiter $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ die Laurent-Entwicklung von f in $K_{0,r}(z_0)$ zum Entwicklungspunkt z_0, so heißt z_0

a) eine *hebbare Singularität*, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$,

b) ein *Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$*, falls $a_{-m} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < -m$,

c) eine *wesentliche Singularität*, falls z_0 weder ein Pol noch eine hebbare Singulariät ist.

Beispiele (9.9)

a) $z_0 = 0$ ist eine hebbare Singularität der Funktion $(\sin z)/z$.

b) $z_0 = 0$ ist ein Pol erster Ordnung der Funktion $(\sin z)/z^2$.
Beides sieht man unmittelbar mittels der sin-Reihe.

c) Rationale Funktionen haben keine wesentlichen Singularitäten. Ist nämlich $f = p/q$ mit Polynomen p und q, so sind die Singularitäten von f gerade die Nullstellen von q. Ist z_0 eine m-fache Nullstelle von q, also $q(z) = (z - z_0)^m \, r(z)$, wobei r ein Polynom mit $r(z_0) \neq 0$ ist, so folgt

$$f(z) \;=\; \frac{p(z)/r(z)}{(z - z_0)^m} \;=\; \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

wobei g holomorph in z_0 ist, also dort in eine Taylor-Reihe entwickelbar. Damit ist aber z_0 ein Pol der Ordnung $\leq m$, oder sogar eine hebbare Singularität von f.

d) Die Funktion $f(z) := \mathrm{e}^{1/z}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. Dies sieht man unmittelbar mit der exp–Reihe:

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k \;=\; \sum_{j=-\infty}^{0} \frac{1}{(-j)!} \, z^j.$$

Satz (9.10) (Klassifikation isolierter Singularitäten)
Sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$.

a) z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, falls der Grenzwert $\lim_{z \to z_0} f(z)$ (in $\mathbb{C}$) existiert. In diesem Fall ist

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) : & z \neq z_0, \\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) : & z = z_0 \end{cases}$$

eine holomorphe Fortsetzung von f.

b) Satz von Riemann: Ist f in einer Umgebung von z_0 beschränkt, so ist z_0 eine hebbare Singularität.

c) z_0 ist genau dann ein Pol von f, falls $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ gilt.

d) Satz von Picard: Ist z_0 wesentliche Singularität von f, so bildet f *jeden* Kreisring $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ auf ganz $\mathbb{C}$ oder auf $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ab.

Beweis: zu a): Ist z_0 hebbare Singularität von f, so ist die Laurent-Entwicklung von f in einer $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ - Umgebung,

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k, \qquad 0<|z-z_0|<\varepsilon,$$

zugleich die Taylor-Entwicklung einer holomorphen Fortsetzung von f. Damit gilt insbesondere $\lim_{z\to z_0} f(z) \;=\; a_0$. Die Umkehrung folgt aus b).

zu b): Ist $|f(z)| \le M$ für alle $z \in K_{0,\varepsilon}(z_0)$, so liefert die Cauchysche Ungleichung (9.6) die Abschätzung $|a_k| \le M/r^k$ für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung von f. Speziell für $k<0$ und $r \downarrow 0$ ergibt sich $a_k = 0$.

zu c): Sei z_0 ein Pol m-ter Ordnung von f; gelte also $f(z) \;=\; \sum_{-m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, mit $a_{-m} \ne 0$. Umformung ergibt

$$
\begin{aligned}
f(z) \quad &= \quad \frac{1}{(z-z_0)^m}\left\{a_{-m} \; + \sum_{k=-m+1}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^{m+k}\right\} \\
\Rightarrow \; |f(z)| \quad &\geq \quad \frac{1}{|z-z_0|^m}\left\{|a_{-m}| \; - \; \left|\sum_{k=-m+1}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^{m+k}\right|\right\}
\end{aligned}
$$

Für $z \to z_0$ konvergiert der erste Faktor der obigen Abschätzung gegen ∞, der zweite Faktor gegen $|a_{-m}| \neq 0$. Damit geht die rechte Seite der Abschätzung gegen ∞ und somit auch $|f(z)|$. Die Umkehrung folgt aus d).

zu d): Wir zeigen lediglich die folgende schwächere Aussage

Satz von Casorati und Weierstraß: Ist z_0 eine wesentliche Singularität von f, so liegt das Bild jeder $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ – Umgebung dicht in $\mathbb{C}$, d.h. jeder Punkt $w \in \mathbb{C}$ lässt sich durch Werte $f(z)$ mit $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ beliebig genau approximieren.

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass es einen Punkt $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt

$$\forall\, z: \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(z) - w_0| > \delta.$$

Die Funktion $g(z) := 1/(f(z) - w_0)$ ist demnach auf $K_{0,\varepsilon}(z_0)$ holomorph und beschränkt (durch $1/\delta$). Noch dem Riemannschen Satz ist g also auf $K_\varepsilon(z_0)$ holomorph fortsetzbar und somit in eine Taylor-Reihe entwickelbar:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

Nicht alle a_k können verschwinden (da g keine Nullstelle hat); somit gibt es ein $m \geq 0$ mit $g(z) = (z - z_0)^m\, g_1(z)$, wobei g_1 auf $K_\varepsilon(z_0)$ holomorph ist und $g_1(z) \neq 0$ auf $K_\varepsilon(z_0)$ gilt.

Umformung ergibt

$$f(z) \;=\; w_0 \;+\; \frac{1}{(z-z_0)^m}\,\Big(\frac{1}{g_1(z)}\Big).$$

Da die Funktion $1/g_1$ ebenfalls in $K_\varepsilon(z_0)$ nicht verschwindet und dort holomorph ist, folgt, dass z_0 ein Pol m-ter Ordnung von f ist. Widerspruch zur Annahme! $\square$

Beispiel (9.11)

Die Funktion $f(z) := \exp(1/z)$ besitzt in $z_0 := 0$ eine wesentliche Singularität. Wir sehen nun
(i) z^{-1} bildet $K_{0,\varepsilon}(0)$ bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus K_{1/\varepsilon}(0)$ ab.
(ii) exp bildet jeden Streifen $\mathbb{R} + i\,[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$ bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab, $k \in \mathbb{Z}$.
Aus Beidem folgt, dass f jede $K_{0,\varepsilon}$-Umgebung sogar unendlich oft auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abbildet.