7. Der Cauchysche Integralsatz

Der folgende, auf Augustin Cauchy zurückgehende Integralsatz ist fundamental für die Theorie komplexer Funktionen. Er wird auch als *der Hauptsatz der Funktionentheorie* bezeichnet.

Satz (7.1) (Cauchyscher Integralsatz)

Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein *einfach zusammenhängendes* Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ eine *holomorphe* Funktion und $c : [a, b] \to D$ ein *geschlossener* stkw. C^1-Weg, so gilt

$$\oint_{\mathbf{c}} f(z)\, dz \;=\; 0.$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch Zurückführung auf reelle Integrale. Mit $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^{\mathsf{T}}$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\oint\limits_{\mathbf{c}} f(z)\,dz \;&=\; \int\limits_a^b \Big(u(\mathbf{c})x' - v(\mathbf{c})y'\Big)\,dt \;+\; i\int\limits_a^b \Big(u(\mathbf{c})y' + v(\mathbf{c})x'\Big)\,dt \\
&=\; \oint\limits_{\mathbf{c}} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} d\mathbf{x} + i \oint\limits_{\mathbf{c}} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Beide Vektorfelder unter den Integralen erfüllen aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die Integrabilitätsbedingung

$$
\operatorname{rot} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \;=\; -v_x \;-\; u_y \;=\; 0
$$

$$
\operatorname{rot} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \;=\; u_x \;-\; v_y \;=\; 0
$$

Da D einfach zusammenhängend ist, sind beide Vektorfelder also Potentialfelder (vgl. Lehrbuch (19.2.24)) und die geschlossenen Kurvenintegrale verschwinden. $\square$

Bemerkung (7.2) Keine der im Cauchyschen Integralsatz angegebenen Voraussetzungen ist entbehrlich. Dies zeigen die in letzten Abschnitt angegebenen Beispiele:

- $\displaystyle\oint_{|z|=1} \overline{z}\, dz \neq 0$ ($\overline{z}$ ist nicht holomorph),
- $\displaystyle\oint_{|z|=1} (1/z)\, dz \neq 0$ (D ist nicht einfach zusammenhängend),
- $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} z\, dz \neq 0$ für $\mathbf{c}(t) = \mathrm{e}^{(1+i)t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ($\mathbf{c}$ ist nicht geschlossen).

Folgerung (7.3)

Ist $D \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} f(z)\, dz$ *wegunabhängig* (bei festen Endpunkten).

Für stkw. C^1-Wege $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 : [a,b] \to D$ gilt also unter den obigen Voraussetzungen

$$\mathbf{c}_1(a) = \mathbf{c}_2(a),\ \mathbf{c}_1(b) = \mathbf{c}_2(b) \ \Rightarrow \ \int_{\mathbf{c}_1} f(z)\,dz \ = \ \int_{\mathbf{c}_2} f(z)\,dz.$$

Beweis: $\mathbf{c}_1 + (-\mathbf{c}_2)$ ist eine geschlossene stkw. C^1-Kurve in D und D ist einfach zusammenhängend. Die Behauptung folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz zusammen mit (6.8) b) und e). □

Satz (7.4) (Existenz einer Stammfunktion)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner sei $z_0 \in D$ ein (beliebiger) fester Punkt. Für $z \in D$ bezeichne $\mathbf{c}_z$ einen beliebigen, die Punkte z_0 (Anfangspunkt) und z (Endpunkt) verbindenden Stkw. C^1-Weg. Dann ist wegen (7.3) durch

$$F(z) \ := \ \int_{\mathbf{c}_z} f(\zeta)\,d\zeta$$

eine Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ wohldefiniert. F ist eine *Stammfunktion* von f, d.h. F ist holomorph auf D und es gilt $F'(z) = f(z)$.

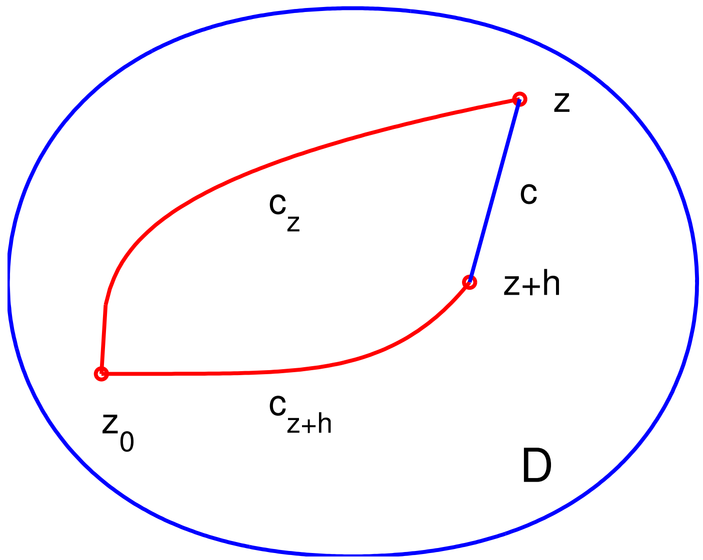


Abb 7.1. Stammfunktion

Beweis: Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \varepsilon$ lassen sich die Kurven $\mathbf{c}_z$ und $\mathbf{c}_{z+h}$ durch die geradlinige Verbindung $\mathbf{c}(t) := z + t\,h,\ 0 \le t \le 1$ zu einer geschlossenen stkw. C^1-Kurve $\mathbf{c}_z + \mathbf{c} + (-\mathbf{c}_{z+h})$ innerhalb von D ergänzen. Damit wird

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{\mathbf{c}_{z+h}} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\mathbf{c}_z} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_{\mathbf{c}} f(\zeta)\,d\zeta = \int_0^1 f(z + t\,h)\,h\,dt, \end{aligned}$$

also

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \le \int_0^1 |f(z+th) - f(z)|\,dt \to 0,\ h \to 0.$$

Damit ist F holomorph auf D mit $F' = f$. $\square$

Folgerung (7.5)

Ist f auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ holomorph und ist F eine Stammfunktion von f auf D, so gilt für alle stkw. C^1-Wege $\mathbf{c} : [a, b] \to D$

$$\int_{\mathbf{c}} f(z)\, d\, z \;=\; F\Big|_{\mathbf{c}(a)}^{\mathbf{c}(b)} \;=\; F(\mathbf{c}(b)) \;-\; F(\mathbf{c}(a)). \tag{7.6}$$

Beispiel (7.7) $\displaystyle\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{1}{z^2}\, d\, z; \qquad a, b > 0.$

a) Explizite Integration: $\mathbf{c}(t) := a + i\, t,\ -b \le t \le b.$

$$\int_{\mathbf{c}} \frac{d\, z}{z^2} \;=\; \int_{-b}^{b} \frac{i\, d\, t}{(a + i\, t)^2} \;=\; -\Big(\frac{1}{a + i\, t}\Big)\Big|_{-b}^{b} \;=\; \frac{2\, i\, b}{a^2 + b^2}$$

b) Integration mittels Stammfunktion:

$$\int_{a-i\,b}^{a+i\,b} \frac{dz}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)\Big|_{a-i\,b}^{a+i\,b} = \frac{2\,i\,b}{a^2+b^2}$$

Bemerkung (7.8)

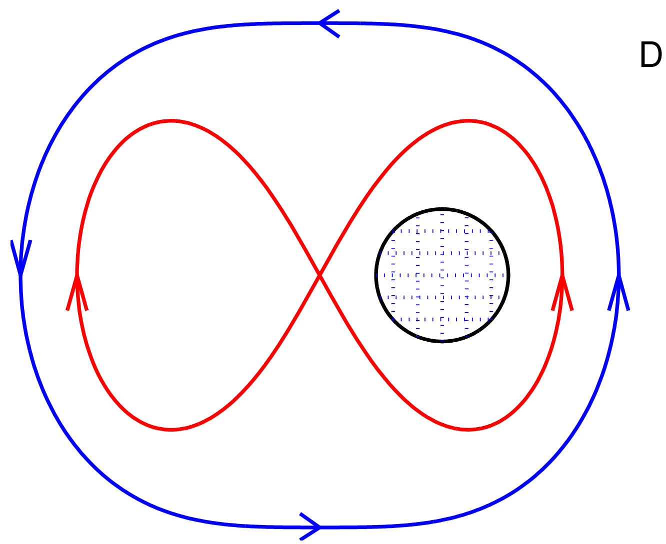
Anstelle des einfachen Zusammenhangs genügt es, im Cauchyschen Integralsatz zu fordern, dass der geschlossene stkw. C^1-Weg $\mathbf{c}$ nullhomotop ist, d.h. dass sich $\mathbf{c}$ innerhalb des Gebietes D stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

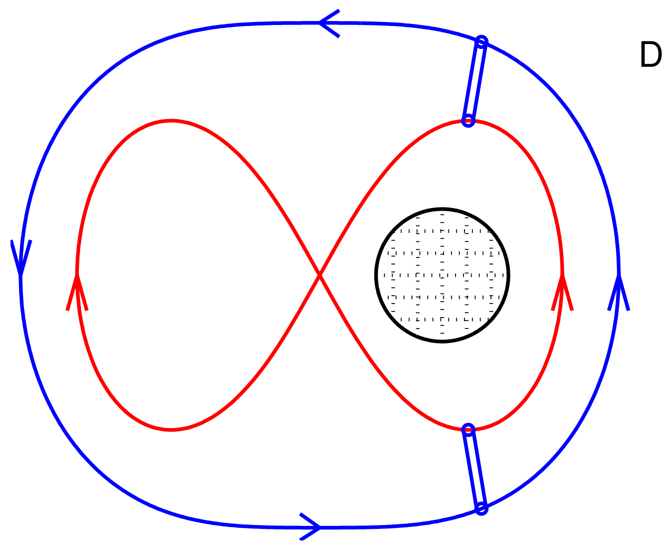
In Verallgemeinerung hierzu wird definiert: Zwei stkw. C^1-Wege $\mathbf{c}$, $\tilde{\mathbf{c}} : [a,b] \to D$ heißen homotop, wenn sie sich (innerhalb des Gebietes D) stetig ineinander deformieren lassen, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $\Phi : [a,b] \times [0,1] \to D$ gibt mit $\mathbf{c}(t) = \Phi(t,0)$ und $\tilde{\mathbf{c}}(t) = \Phi(t,1)$ für alle t.

Satz (7.9)

Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet D und sind $\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}} : [a,b] \to D$ geschlossene und in D homotope stkw. C^1-Wege, so gilt

$$\oint_{\mathbf{c}} f(z)\,dz = \oint_{\tilde{\mathbf{c}}} f(z)\,dz.$$





Beispiel (7.10)

Für jeden einfach geschlossenen stkw. C^1- Weg $\mathbf{c}$, der einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ einmal im positiven Sinn umläuft, gilt

$$\oint_{\mathbf{c}} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Denn: $\mathbf{c}$ ist homotop zum Weg $\tilde{\mathbf{c}}(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{it}, \ \ 0 \leq t \leq 2\pi.$

Definition (7.11)

Für eine geschlossenen stückweisen C^1-Weg $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ heißt

$$\mathrm{Uml}(\mathbf{c}; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{c}} \frac{dz}{z - z_0}$$

die Umlaufzahl von $\mathbf{c}$ bezüglich des Punktes z_0.

$\mathrm{Uml}(\mathbf{c}; z_0)$ ist stets eine ganze Zahl, sie gibt an, wie oft der Weg $\mathbf{c}$ den Punkt z_0 in mathematisch positiven Sinn umläuft.

$$\mathrm{Uml}(\mathbf{c}; z_1) = -2,$$
$$\mathrm{Uml}(\mathbf{c}; z_2) = -1,$$
$$\mathrm{Uml}(\mathbf{c}; z_3) = 0.$$