

2. Komplexe Funktionen

Unter einer *komplexen Funktion* $w = f(z)$ verstehen wir eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$. D ist der *Definitionsbereich* von f , $W := f(D)$ der *Bildbereich* oder *Wertebereich* von f . Wir nehmen an, dass D ein Gebiet in \mathbb{C} ist.

Bezeichnungen:

$$z = x + iy,$$

$$w = f(z) = u + iv,$$

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

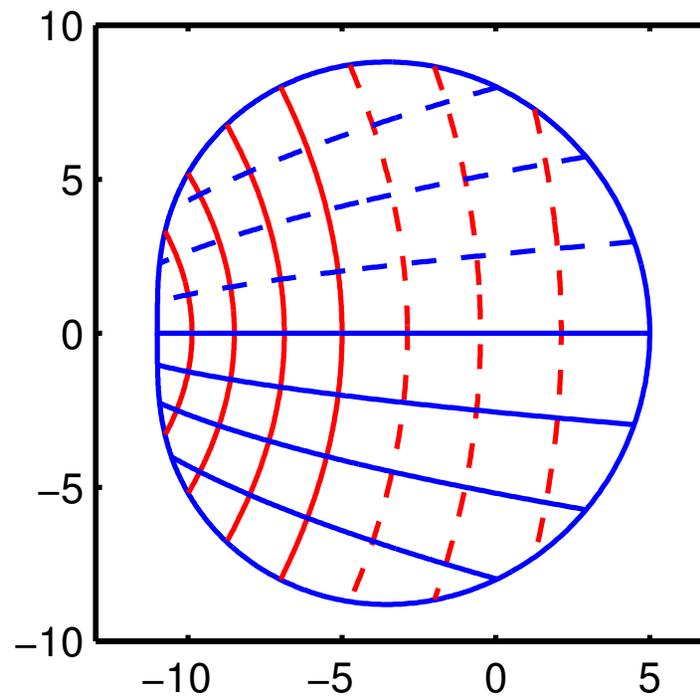
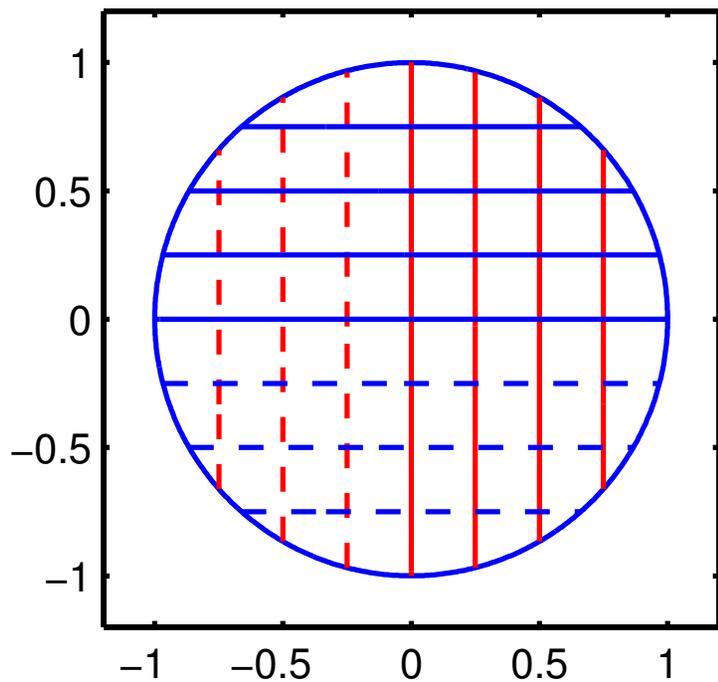


Abb 2.1. Bilder von Koordinatennetzen

Affin-lineare Funktionen. (2.1)

Wir betrachten eine affin-lineare Funktion $w = f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$.

Aufspaltung ergibt $f(z) = [|a|(e^{i\phi_a} z)] + b$

$f_1(z) = e^{i\phi_a} z$ Drehung um den Winkel ϕ_a ,

$f_2(z) = |a| z$ Steckung um den Faktor $|a|$,

$f_3(z) = z + b$ Verschiebung um den Vektor b .

Jede affin-lineare komplexe Funktion lässt sich geometrisch als **Drehstreckung** mit anschließender **Verschiebung** interpretieren.

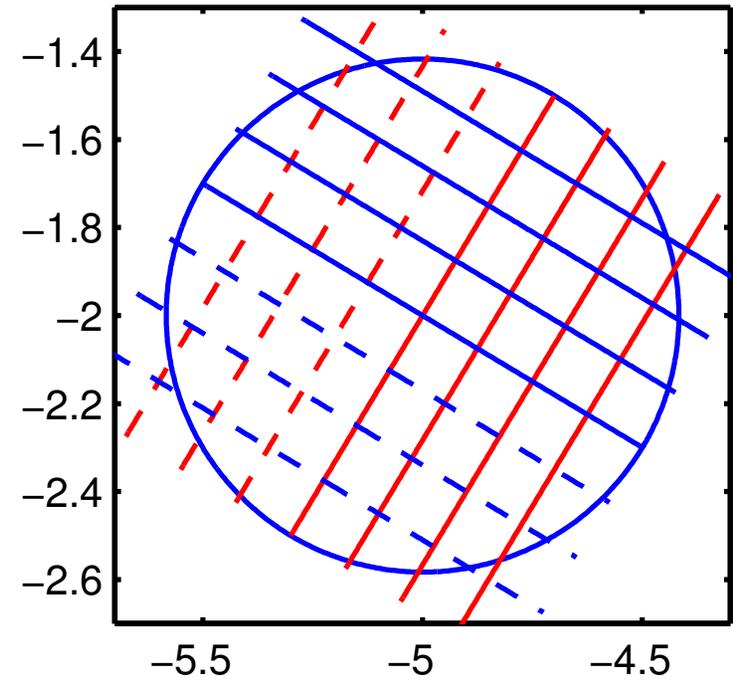
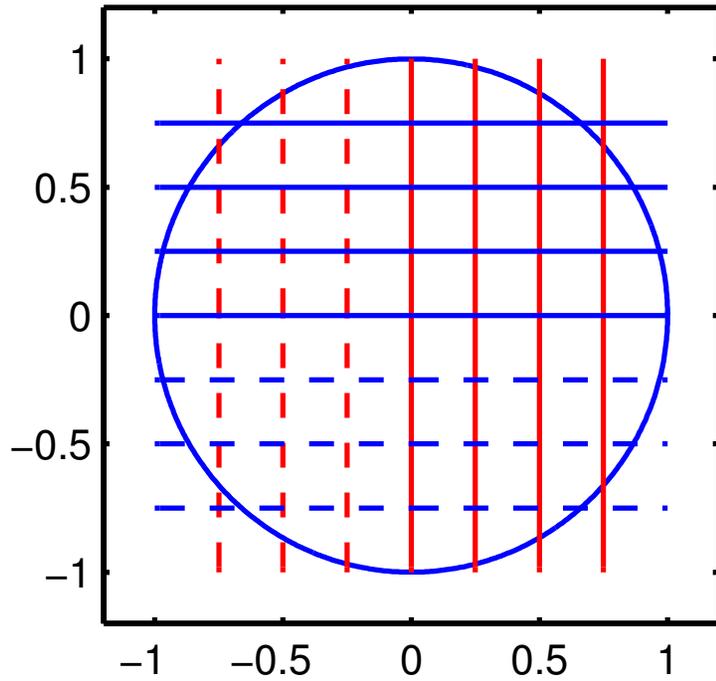


Abb 2.2. Affin-lineare komplexe Funktion

Quadratische komplexe Funktionen. (2.2)

Wir betrachten $w = f(z) = az^2 + bz + c$

Aufspaltung: $f(z) = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

Es genügt daher, sich das Quadrat $f(z) = z^2$ zu veranschaulichen.

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

$$\Rightarrow u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

$$(i) \quad y = y_0 = 0 \Rightarrow u = x^2, \quad v = 0 \quad (\text{Halbgerade})$$

$$y = y_0 \neq 0 \Rightarrow v^2 = 4y_0^2 (y_0^2 + u) \quad (\text{Parabelschar})$$

$$(ii) \quad x = x_0 = 0 \Rightarrow u = -y^2, \quad v = 0 \quad (\text{Halbgerade})$$

$$x = x_0 \neq 0 \Rightarrow v^2 = 4x_0^2 (x_0^2 - u) \quad (\text{Parabelschar})$$

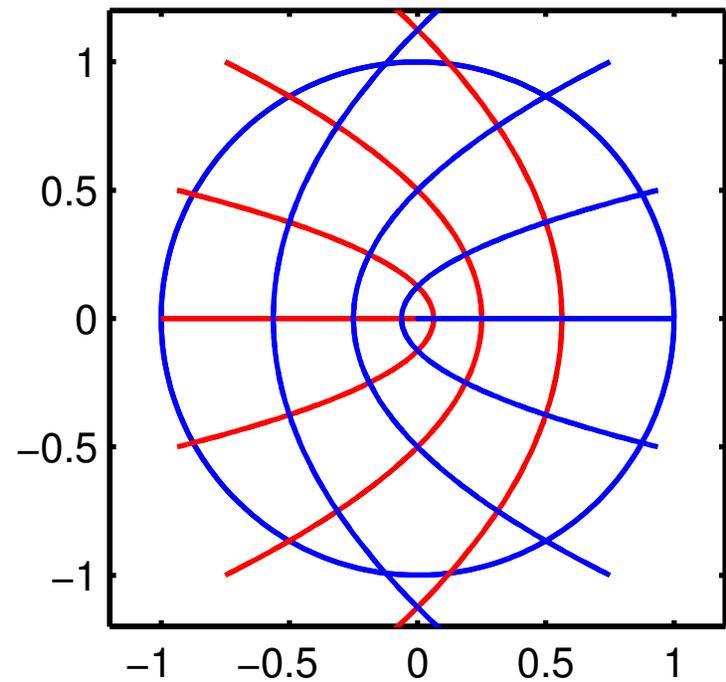
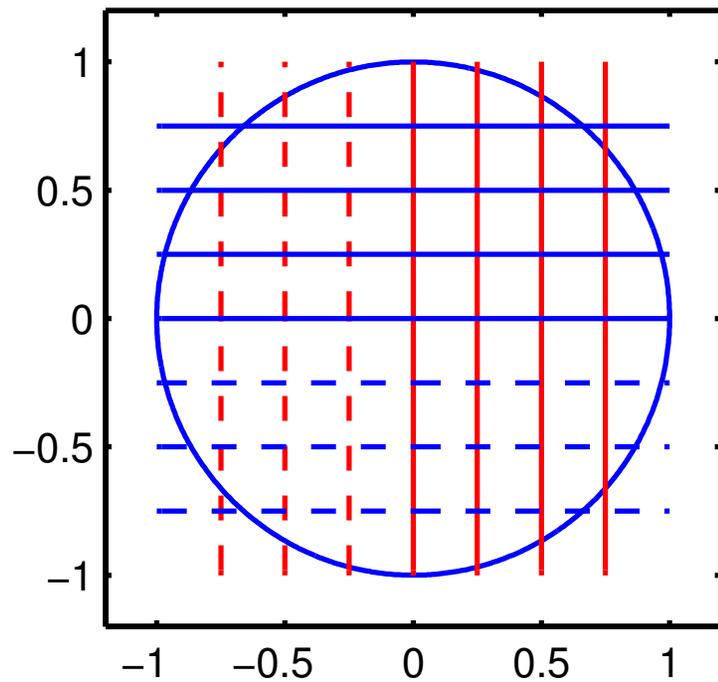


Abb 2.3. Quadratische komplexe Funktion $w = z^2$

Die Exponentialfunktion. (2.3)

$$w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$
$$\Rightarrow u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

- (i) $y = y_0 = \text{const.} \Rightarrow u = e^x \cos y_0, \quad v = e^x \sin y_0,$
(Halbgeraden ohne Ursprung)
- (ii) $x = x_0 = \text{const.} \Rightarrow u = e^{x_0} \cos y, \quad v = e^{x_0} \sin y,$
(Kreise um 0, unendlich oft durchlaufen)

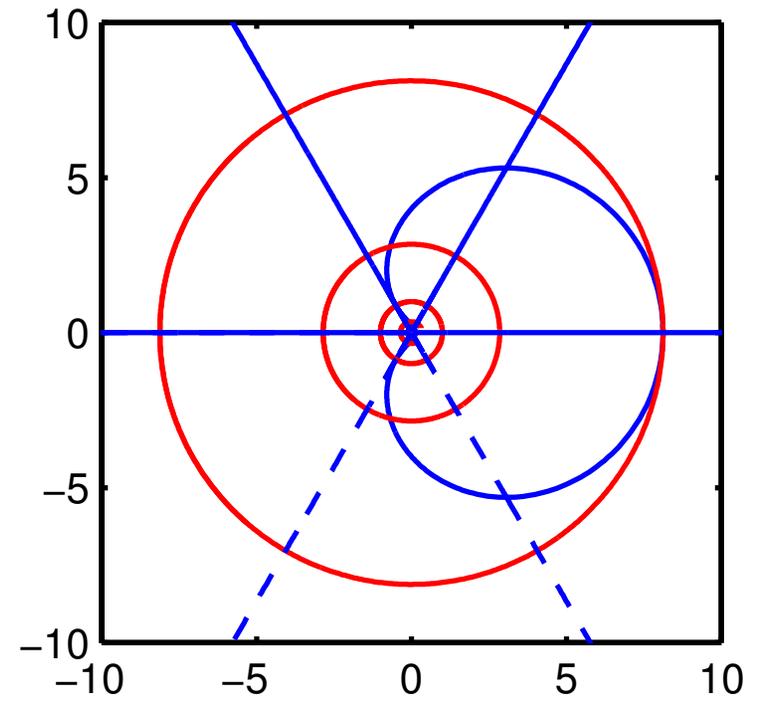
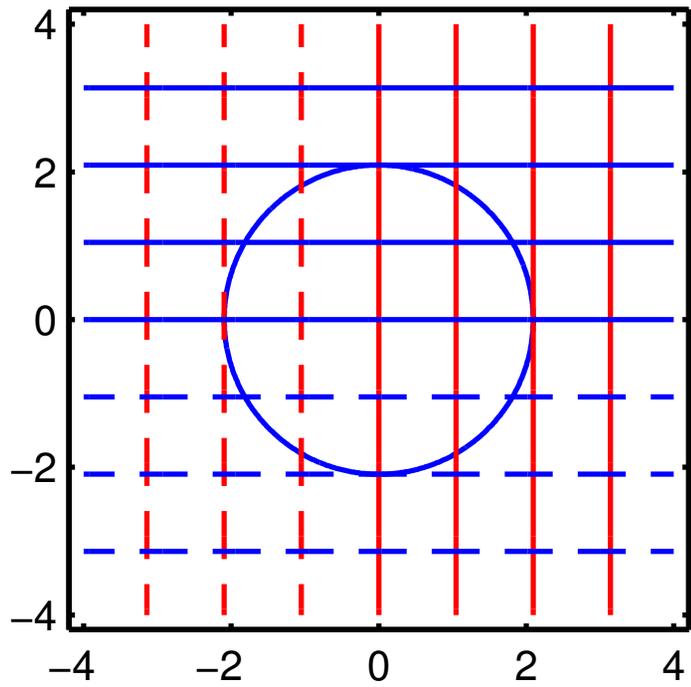


Abb 2.4. Exponentialfunktion $w = \exp(z)$

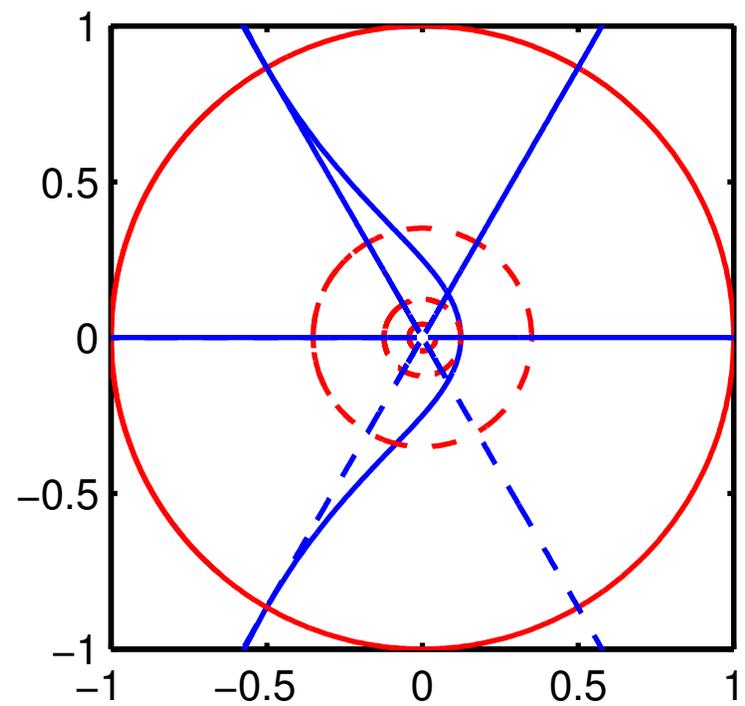
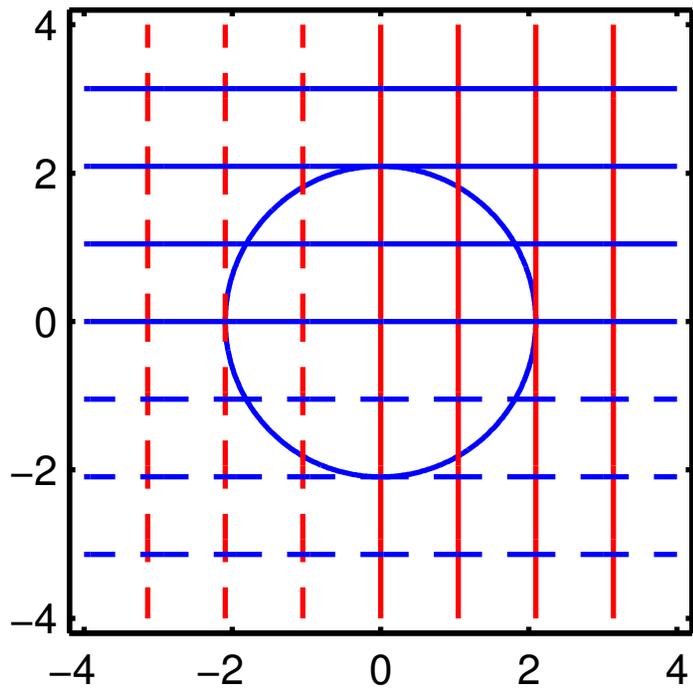


Abb 2.5. Exponentialfunktion $w = \exp(z)$

Die Quadratwurzel. (2.4)

Zur Umkehrung einer komplexen Funktion $w = f(z)$ wird die **Injektivität** von f benötigt. Diese ist jedoch i. Allg. a priori nicht gegeben und muss erst durch Verkleinerung des Definitionsbereichs von f erreicht werden.

Die Quadratfunktion $w = f(z) := z^2$ ist auf dem eingeschränkten Definitionsbereich

$$D_f := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

injektiv und bildet bijektiv auf den folgenden Wertebereich ab

$$W_f := \mathbb{C} \setminus \{u \in \mathbb{R} : u \leq 0\},$$

vgl. die Abbildung 2.3.

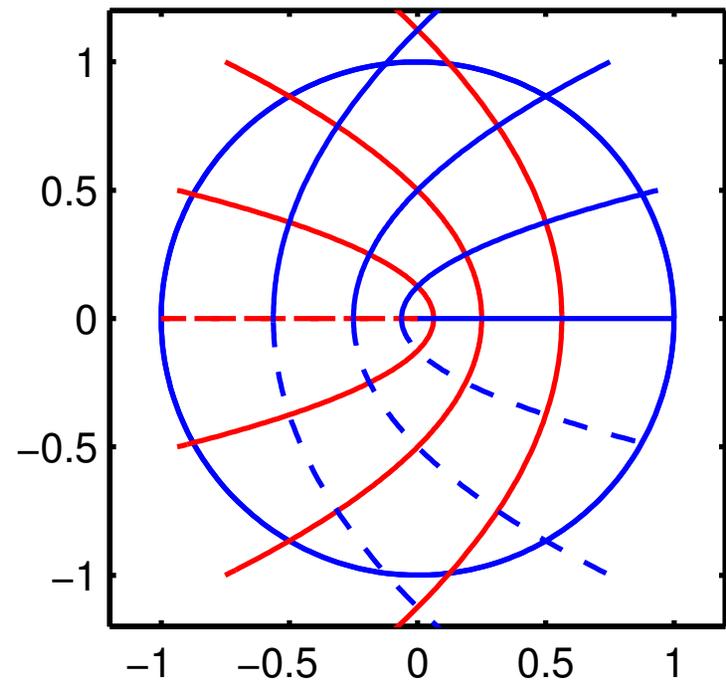
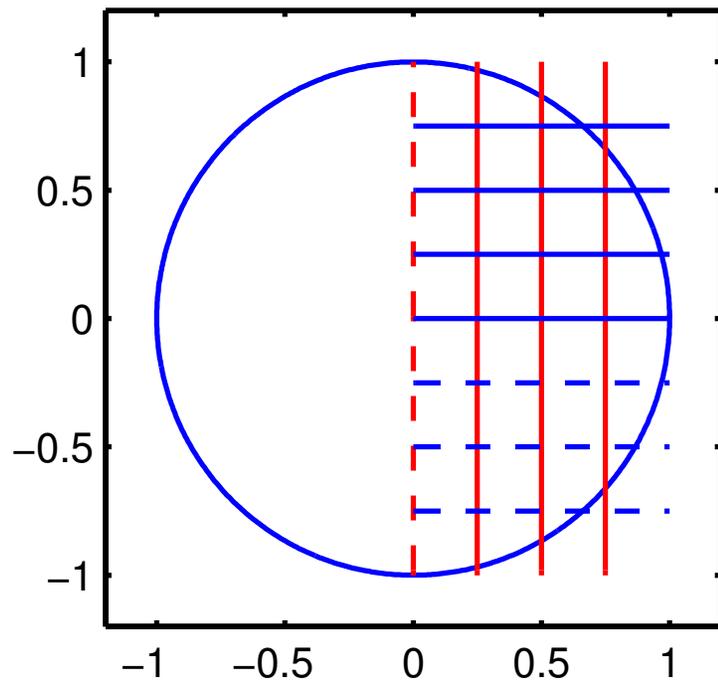


Abb 2.6. Quadratische komplexe Funktion $w = z^2$

Die Umkehrfunktion von $w = z^2$ lässt sich also folgendermaßen definieren

Definition. (2.5)

$$z = r e^{i\phi}, \quad -\pi < \phi < \pi, \quad r > 0 \quad \Rightarrow \quad w := \sqrt{z} := \sqrt{r} e^{i\phi/2}$$

$w = \sqrt{z}$ heißt der *Hauptwert der Wurzel*. Hierdurch ist eine komplexe Funktion definiert

$$\sqrt{z} : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \rightarrow \{w : \operatorname{Re}(w) > 0\}.$$

Beachten Sie den Unterschied zur mengenwertigen Definition der Umkehrrelation

$$z^{1/2} := \{w \in \mathbb{C} : w^2 = z\}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Der Logarithmus. (2.6)

Zur Invertierung der Exponentialfunktion setzen wir

$$e^w = z = |z| e^{i\phi} \quad \Leftrightarrow \quad e^u = |z| \wedge v = \phi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Die Menge der Lösungen von $e^w = z$ ist demnach gegeben durch

$$\text{Log}(z) := \{ \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z} \}.$$

$\text{Log}(z)$ heißt der **komplexe Logarithmus** und ist für alle $z \neq 0$ definiert. Beachten Sie, dass $\text{Log}(z)$ eine Menge bezeichnet. Zur Gewinnung der Umkehrfunktion schränken wir den Definitionsbereich von e^z ein auf den Streifen

$$S := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im } z < \pi\}.$$

Die Exponentialfunktion ist auf diesem Streifen injektiv mit dem Wertebereich $W = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

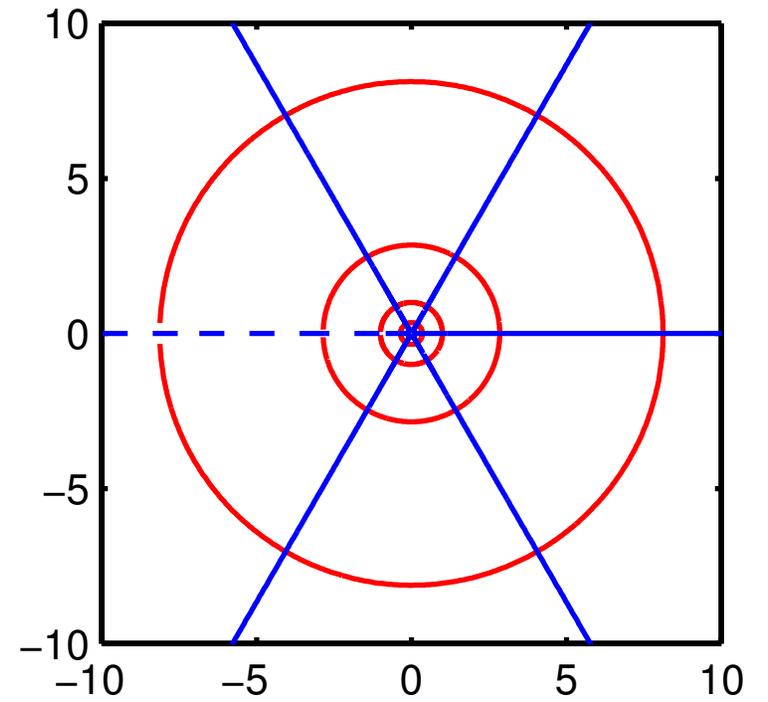
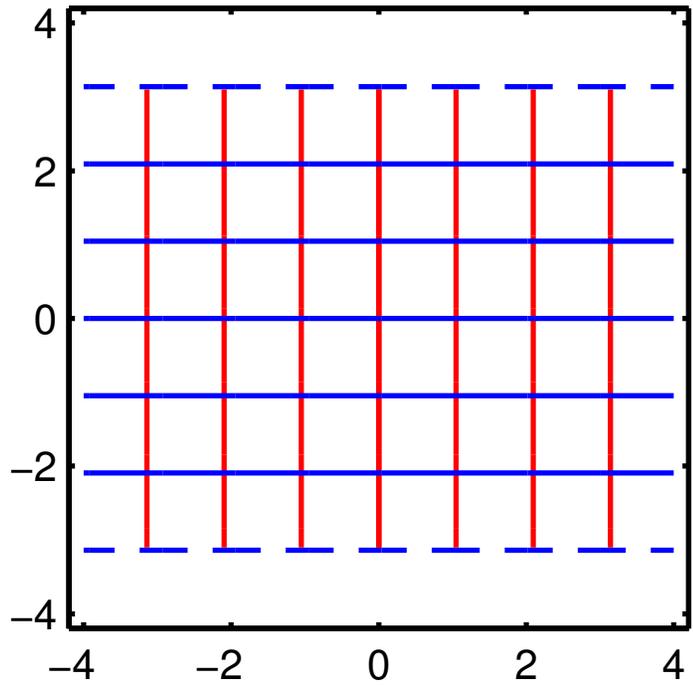


Abb 2.7. Exponentialfunktion $w = e^z$

Die Umkehrabbildung von \exp auf diesem Streifen S lautet

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} &\rightarrow \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\} \\ \ln(z) &:= \ln|z| + i \arg(z), \quad -\pi < \arg(z) < \pi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\ln(z)$ heißt Hauptwert des komplexen Logarithmus.

Die Joukowski-Funktion. (2.8)

$$w = f(z) := \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

Wegen $f(1/z) = f(z)$ genügt es, den Bereich $|z| \geq 1$ zu betrachten. Wir untersuchen dazu die Bilder des Polarkoordinatennetzes $|z| = r_0 \geq 1$ und $z = r e^{i\phi_0}$, $r \geq 1$.

$$(i) \quad z = r_0 e^{i\phi}, \quad r_0 \geq 1, \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2} \left(r_0 e^{i\phi} + \frac{1}{r_0} e^{-i\phi} \right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos \phi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right) \sin \phi$$

Für $r_0 = 1$ ergibt sich die doppelt durchlaufene Strecke $[-1, 1]$.
Für $r_0 > 1$ erhält man die Parameterdarstellung einer **Ellipse** mit Halbachsen $a = (r_0 + 1/r_0)/2$ und $b = (r_0 - 1/r_0)/2$.

$$(ii) \quad z = r e^{i\phi_0}, \quad r \geq 1, \quad \phi_0 \in [0, 2\pi[,$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \phi_0, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \phi_0$$

$\phi_0 = 0$: Halbgerade $[1, \infty[$, doppelt durchlaufen

$\phi_0 = \pi/2$: einmal durchlaufene v – Achse

$\phi_0 = \pi$: Halbgerade $] -\infty, -1]$ doppelt durchlaufen

$\phi_0 = 3\pi/2$: einmal durchlaufene v – Achse

Für $\phi_0 \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ergibt sich durch Elimination von r die Darstellung

$$\frac{u^2}{\cos^2 \phi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \phi_0} = 1.$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer **Hyperbel** mit Halbachsen $a = |\cos \phi_0|$ und $b = |\sin \phi_0|$ und Brennpunkten $c = \pm 1$.

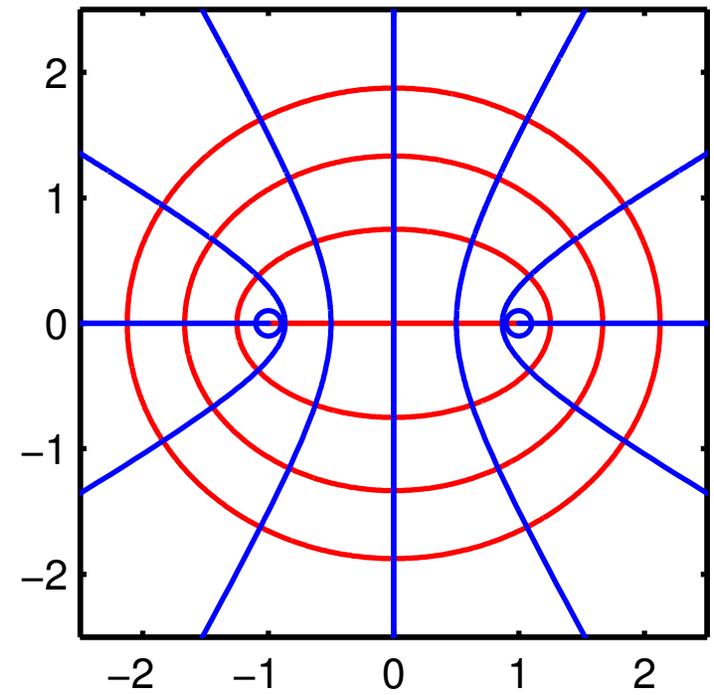
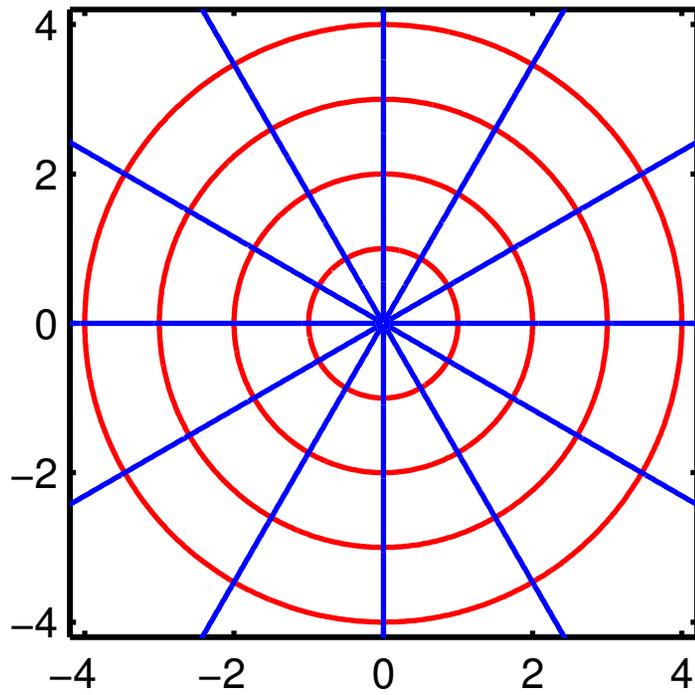


Abb 2.8. Joukowski-Funktion $w = 0.5(z + 1/z)$

Umkehrung der Joukowski-Funktion. (2.9)

Die Joukowski-Funktion $w = f(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ ist auf dem Bereich

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

injektiv und hat dort den Wertebereich

$$W := \{w \in \mathbb{C} : w \notin [-1, 1]\}.$$

Für die Umkehrfunktion ergibt sich

$$w = f^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$