9. Eigenwertaufgaben bei PDG

Wir geben hier eine kurze Einführung in die Theorie der Eigenwertaufgaben bei PDGen. Eigenwertaufgaben sind bei den bisherigen Untersuchungen schon mehrfach aufgetreten. Erinnert sei an den Abschnitt über Wellenformen in Kapitel 6 sowie über Zylinderfunktionen in Kapitel 8. Wir hatten dabei die 3D-Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 \Delta_3 u \;=\; 0, \quad \mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0,$$

untersucht und einen Ansatz der Form $u(\mathbf{x}, t) \;=\; A\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}\,g(\mathbf{x})$ verwendet. Als Resultat ergab sich die homogene PDG

$$-\Delta_3 g(\mathbf{x}) \;=\; \lambda\,g(\mathbf{x}), \qquad \lambda = \omega^2/c^2, \tag{9.1}$$

die zusammen mit homogenen Randbedingungen

$$U_1[g] = g = 0, \ (\mathbf{x} \in \Gamma_1), \quad U_2[g] = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = 0, \ (\mathbf{x} \in \Gamma_2) \qquad (9.2)$$

zu lösen ist. Dabei ist $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Gesucht ist also eine nichtkonstante Lösung $g(\mathbf{x})$ der Randwertaufgabe (9.1), (9.2) (ev. mit $g(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$), sowie die Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ (ev. $\lambda \in \mathbb{C}$), für die eine solche Lösung existiert.

Die obige Aufgabe heißt eine **Eigenwertaufgabe**, die resultierenden λ heißen **Eigenwerte**, die zugehörigen $g \neq 0$ **Eigenfunktionen**.

Beispiel (9.3) (Eingespannte Membran)

Gesucht ist die Auslenkung einer eingespannten Membran über einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ aus der Ruhelage. $\overline{G}$ sei kompakt und habe stückweise glatten Rand.

Die Auslenkung $u(\mathbf{x},t)$ genügt dann der Eigenwertaufgabe

$$u_{tt} - c^2\Delta_2 u = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \qquad u|_{\partial G} = 0,$$

wobei $c = \sqrt{S/M}$ ist; S bezeichnet die Spannkraft pro Länge des Randes in Normalenrichtung, M die Masse der Membran pro Flächeneinheit.

Allgemeine Problemstellung.

L bezeichne einen *linearen Differentialoperator* der Ordung p, der auf der Menge $D := C^{p-1}(\overline{G}) \cap C^p(G)$ von *zulässigen Funktionen* (mit Funktionswerten in $\mathbb{C}$) definiert ist.
Dabei sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand.
$U_{\nu\,\mu}[v] = 0$ bezeichne *lineare, homogene Randbedingungen*, die auf den glatten Teilstücken Γ_μ des Randes ∂G vorgegeben sind.

Die Indizes laufen $\mu = 1, \ldots, m,\ \nu = 1, \ldots, n_\mu$.
Die Menge der *Vergleichsfunktionen* ist definiert durch

$$\mathrm{C}_0^p(\overline{G}) \ := \ \{v \in D : \ U_{\nu\,\mu}[v] = 0,\ \forall \nu,\ \mu\}.$$

Schließlich sei durch

$$\langle u, v \rangle \ := \ \int\limits_G \overline{u(\mathbf{x})}\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad u,\, v \in D,$$

das Standard-Skalarprodukt auf den zulässigen Funktionen definiert.

Definition (9.4)

a) Gilt für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathrm{C}_0^p(\overline{G}) \setminus \{0\}$

$$L[v] \ = \ \lambda\, v,$$

so heißt λ *Eigenwert* und v *Eigenfunktion* von L bezüglich der vorgegebenen Randbedingungen.

b) Ein linearer Differentialoperator L^* der Ordung p auf D heißt *adjungiert* zu L bzgl. der Randbedingungen $U_{\nu\,\mu} = 0$, falls gilt

$$\langle L[u], v\rangle \;=\; \langle u, L^*[v]\rangle, \quad \forall\; u,\, v \in \mathrm{C}_0^p(\overline{G}).$$

c) Der Differentialoperator L heißt *selbstadjungiert* bzgl. der Randbedingungen $U_{\nu\,\mu} = 0$, falls

$$\langle L[u], v\rangle \;=\; \langle u, L[v]\rangle, \quad \forall\; u,\, v \in \mathrm{C}_0^p(\overline{G}).$$

Beispiel: Der Differentialoperator $L := d^2/dx^2$ ist selbstadjungiert auf $\mathrm{C}^2[a,b]$ bzgl. der Randbedingungen $u(a) = u'(b) = 0$.

Denn: Zweimalige partielle Integration ergibt

$$\int_a^b u''v\,dx \;=\; u'v|_a^b \,-\, uv'|_a^b + \int_a^b uv''dx$$

Hierbei verschwinden die ausintegrierten Terme, da beide Funktionen u und v die Randbedingungen erfüllen sollen.

Satz (9.5)

Die Eigenwerte eines selbstadjungierten Differentialoperators bezüglich vorgegebener Randbedingungen sind *reell*. Die zu verschiedenen Eigenwerten zugehörigen Eigenfunktionen sind *orthogonal* zueinander.

Beweis: zu a):

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}\,\|v\|^2 &= \langle\lambda\,v,v\rangle = \langle L[v],v\rangle\\ &= \langle v,L[v]\rangle = \langle v,\lambda\,v\rangle\\ &= \lambda\,\|v\|^2 \qquad \Rightarrow\ \lambda=\overline{\lambda}\end{aligned}$$

zu b):

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu)\,\langle v,w\rangle &= \langle\lambda\,v,w\rangle - \langle v,\mu\,w\rangle\\ &= \langle L[v],w\rangle - \langle v,L[w]\rangle = 0\\ &\Rightarrow \langle v,w\rangle = 0.\end{aligned}$$ $\square$

Beispiel (9.6)

Bei vorgegebenen Randbedingungen vom Typ (9.2) ist der negative Laplace-Operator $L = -\Delta$ selbstadjungiert.

Zum Beweis verwendet man die zweite Greensche Formel, vgl. Lehrbuch (19.3.19)

$$\int\limits_G \overline{u}\,\Delta v\,d\mathbf{x} = \int\limits_G v\,\Delta\overline{u}\,d\mathbf{x} + \oint\limits_{\partial G}\left(\overline{u}\,\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}} - v\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial\mathbf{n}}\right)do$$

Aufgrund der Randbedingungen (9.2) verschwindet das Oberflächenintegral und es folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung (9.7)

Die Theorie lässt sich auf so genannte *formal selbstadjungierte Operatoren* erweitern. Hierunter versteht man lineare Differentialoperatoren L, für die $v\,L[u] - u\,L[v]$ als Divergenzausdruck $\sum_i (\partial/\partial x_i) m_i(u,v)$ darstellbar ist. Beispielsweise sind durch

$$L[u] \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\mathbf{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

formal selbstadjungierte Differentialoperatoren gegeben.

Beispiel (9.8)

Wir betrachten nochmals das Beispiel der eingespannten Membran, wobei wir einen Kreis als Grundgebiet annehmen.

$$\begin{aligned} -\Delta u \;&=\; \lambda u, \quad (x,y) \in K_R(\mathbf{0}), \\ u(x,y) \;&=\; 0, \quad x^2 + y^2 = R^2. \end{aligned}$$

Nimmt man an, dass die Membrangestalt symmetrisch zum Ursprung liegt, also $u = u(r)$ lediglich vom Abstand r zum Ursprung abhängt, so ergibt sich (in Polarkoordinaten) die gewöhnliche DGL, vgl. auch (4.11) und (8.17).

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \lambda\, u \;=\; 0,$$

Die Substitution $x := \sqrt{\lambda}\, r$ führt schließlich auf die *Besselsche Differentialgleichung* der Ordnung Null für $v(x) := u(r)$, vgl. (8.18)

$$x\, v''(x) + v'(x) + x\, v(x) \;=\; 0.$$

Als in $x = 0$ reguläre Lösung erhält man die Bessel–Funktion nullter Ordnung $v(x) = C_1 J_0(x)$, bzw. $u(r) = C_1\, J_0(\sqrt{\lambda}\, r)$.

Aus der Randbedingung $u(R) = 0$ erhält man schließlich

$$u_k(x,y) \;=\; J_0\Big(\frac{x_k}{R}\sqrt{x^2+y^2}\Big), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{9.9}$$

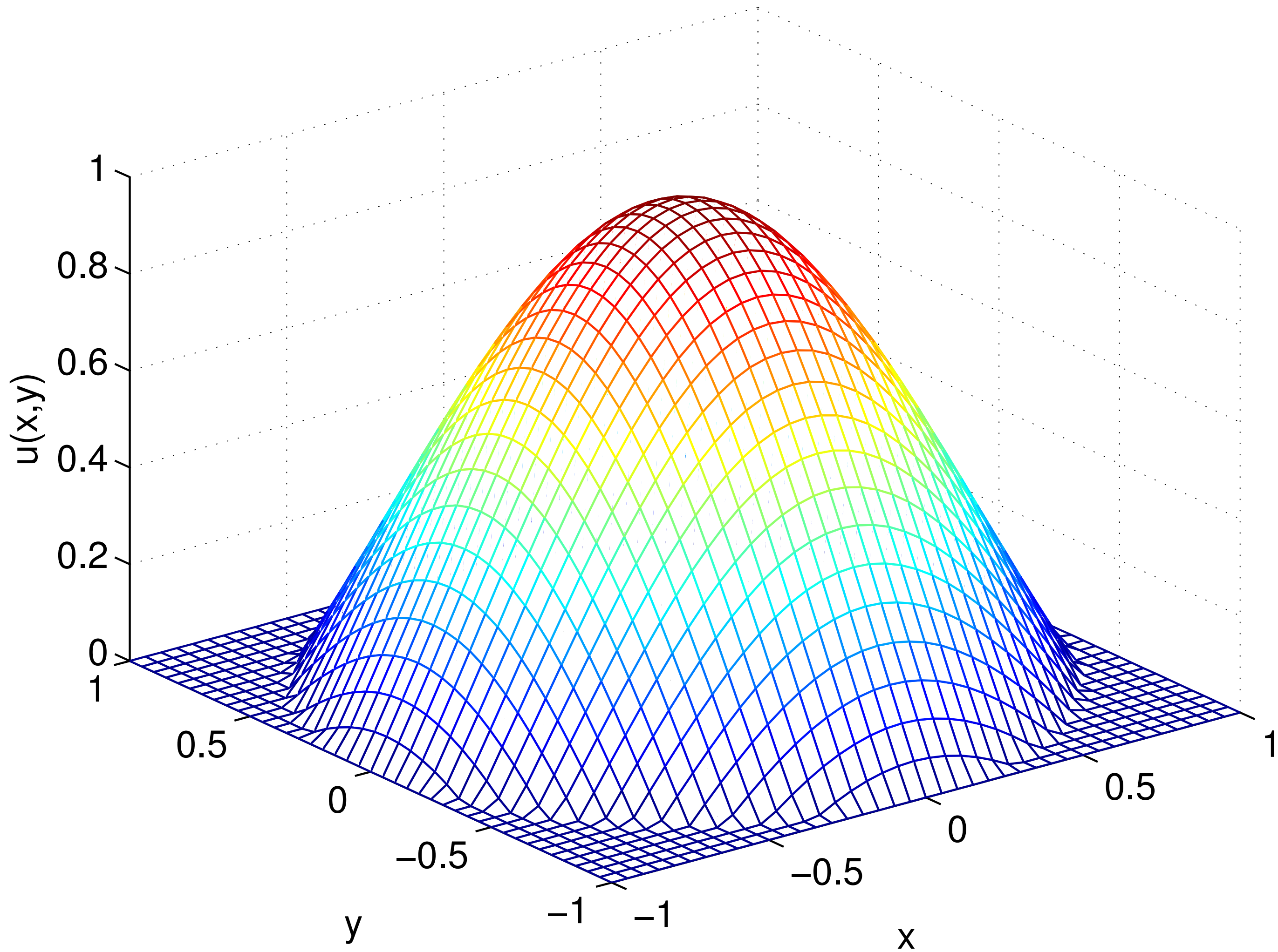
wobei $x_1 < x_2 < \ldots$ alle positiven Nullstellen von J_0 durchlaufen.

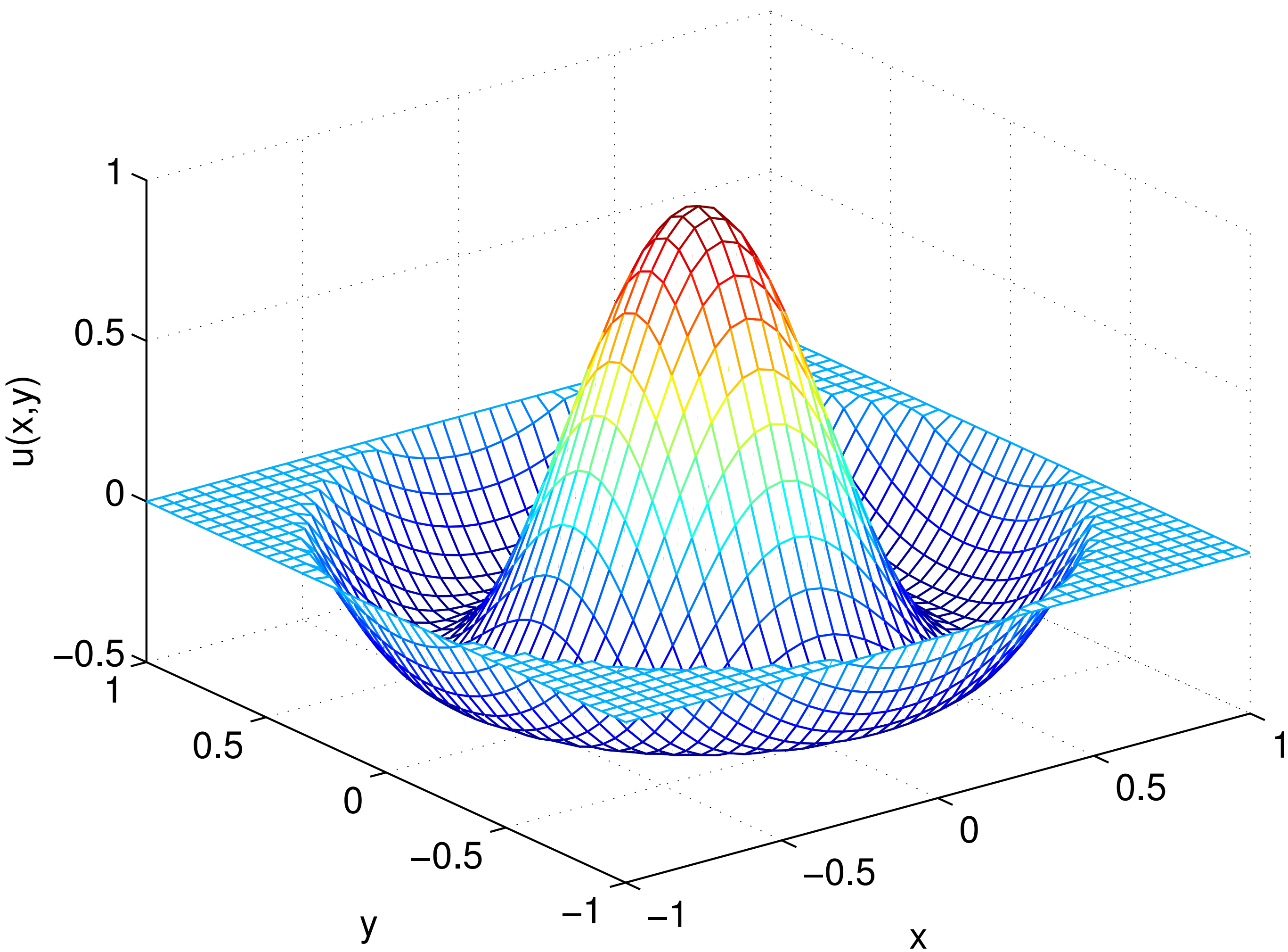
k	x_k
1	$2.404825557695773e+00$
2	$5.520078110286311e+00$
3	$8.653727912911013e+00$
4	$1.179153443901428e+01$
5	$1.493091770848778e+01$
6	$1.807106396791092e+01$

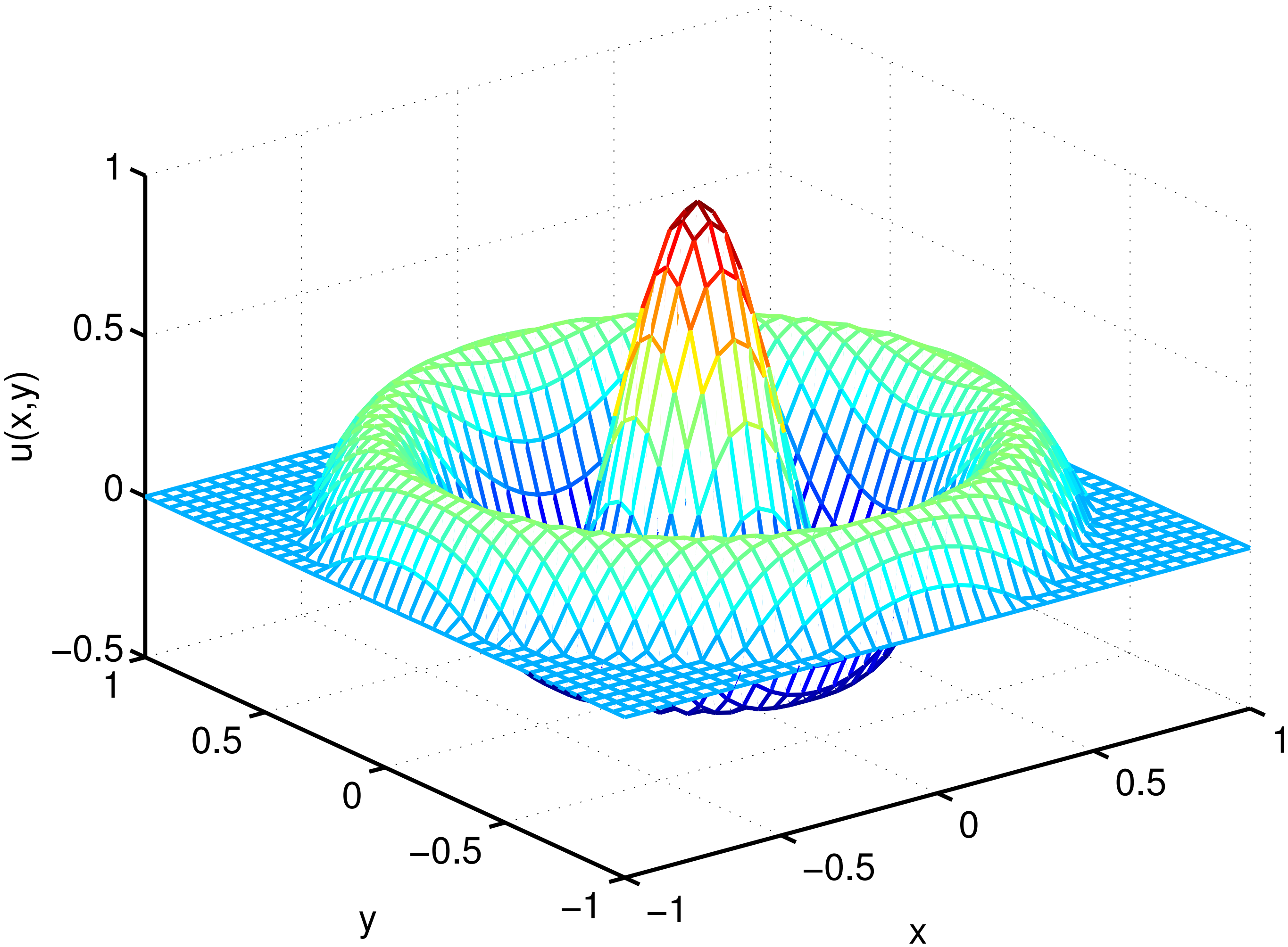
In der obigen Tabelle sind die ersten positiven Nullstellen der Bessel-Funktion J_0 angegeben.

Sie sind mit Hilfe des Newton-Verfahrens bestimmt worden. Dabei wurde verwendet, dass gemäß (8.21) und (8.27) $J_0' = -J_1$ gilt.

Die weiter folgenden Abbildungen zeigen die ersten drei Eigenfunktionen $u_k(x, y)$.


u(x,y)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1
0.5
0
−0.5
−1
y
−1
−0.5
0
0.5
1
x


1
0.5
0
−0.5
u(x,y)
1
0.5
0
−0.5
−1
y
−1
−0.5
0
0.5
1
x



u(x,y)
1
0.5
0
−0.5
y
1
0.5
0
−0.5
−1
x
−1
−0.5
0
0.5
1