8. Spezielle Funktionen

Spezielle Funktionen (der mathematischen Physik) entstehen zumeist aus Separationsansätzen für PDG bei Vorliegen von Symmetrie-Eigenschaften. Diese Separationsansätze führen auf gewöhnliche DGLen (meist zweiter Ordnung) deren Lösungen von besonderer Bedeutung sind und die daher zumeist eigene Namen erhalten haben. Zudem genügen diese speziellen Funktionen einer Dreiterm-Rekursion.

Die gesuchten Lösungen der PDG werden häufig als Reihenentwicklung dieser speziellen Funktionen dargestellt. Diese Reihen lassen sich numerisch mit dem Clenshaw Algorithmus auswerten.

Wir geben in diesem Abschnitt einen kurzen Überblick über einige wichtige spezielle Funktionen.

Der Clenshaw Algorithmus.

Eine Folge $(p_k) \in C[a,b]^{\mathbb{N}_0}$ von Funktionen genüge einer Dreiterm-Rekursion

$$
\begin{aligned}
p_k(x) &= a_k(x)\,p_{k-1}(x) + b_k(x)\,p_{k-2}(x), \qquad k = 2,3,\ldots \\
p_0(x) \text{ vorgegeben}, \quad p_1(x) &= a_1(x)\,p_0(x).
\end{aligned} \tag{8.1}
$$

Dann lässt sich $f_N(x) := \sum_{k=0}^{N} c_k\, p_k(x)$ mit dem folgenden Algorithmus von Clenshaw (auch *adjungierte Summation*) berechnen

$$
\begin{aligned}
& z_N := c_N, \quad z_{N-1} := c_{N-1} + a_N(x)\, z_N, \\
& \text{for } k = N-2, N-3, \ldots, 0 \\
& \qquad z_k := c_k + a_{k+1}(x)\, z_{k+1} + b_{k+2}(x)\, z_{k+2}, \qquad (8.2) \\
& \text{end } k, \\
& f_N(x) := p_0(x)\, z_0
\end{aligned}
$$

Beispiele (8.3)

a) Setzt man $p_0 := 1$, $a_k := x$ und $b_k := 0$, so ergibt sich $p_k(x) = x^k$ und der Clenshaw Algorithmus liefert gerade das Horner-Schema zur Auswertung von Polynomen.

b) Mit $p_0 := 1$, $a_1 := \cos x$, $a_k = 2\cos x$, $k \geq 2$ und $b_k := -1$ erhält man aufgrund der Additionstheoreme $p_k(x) = \cos(k\,x)$. Gleichermaßen liefern die Vorgaben $p_0 := 0$, $a_1 := \sin x$, $a_k = 2\cos x, k \geq 2$ und $b_k := -1$ das Ergebnis $p_k(x) = \sin(k\,x)$. Damit liefert der Clenshaw Algorithmus ein Verfahren zur effizienten Berechnung trigonometrischer Summen (Fourier-Transformation).

Tschebyscheff-Polynome.

Die Tschebyscheff Polynome sind gegeben durch

$$T_k(x) \;:=\; \cos(k \arccos x), \qquad x \in [-1, 1]. \tag{8.4}$$

Grundlegende Eigenschaften

- Dreiterm-Rekursion

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= 2\,x\,T_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1 \\ T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x \end{aligned} \tag{8.5}$$

- Normierung

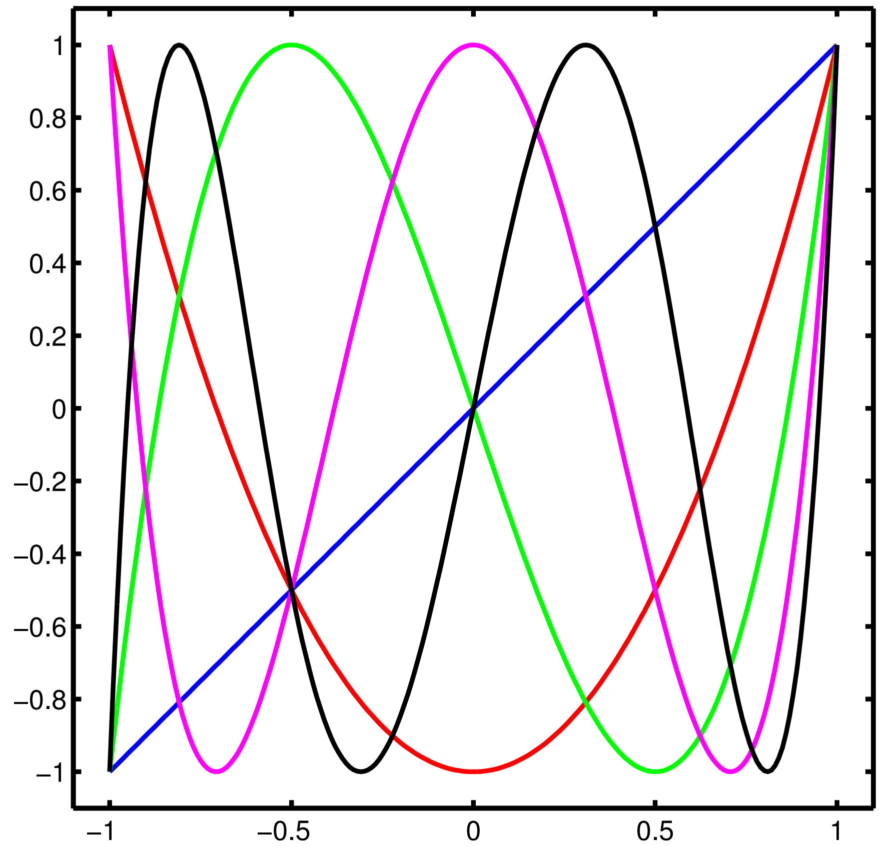
$$T_k(x) = 2^{k-1}\,x^k + \ldots, \quad k \geq 1 \tag{8.6}$$

- Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)\,T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{für } k \neq \ell, \\ \pi/2, & \text{für } k = \ell \neq 0, \\ \pi & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases} \tag{8.7}$$

- Differentialgleichung

$$(1-x^2)\,T_k'' - x\,T_k' - k^2\,T_k = 0, \quad k \geq 0. \tag{8.8}$$



Tschebyscheff-Polynome $T_k(x),\ k = 1, \ldots, 5$

Die Gammafunktion.

Die folgende Darstellung der Gammafunktion wurde von Euler eingeführt

$$\Gamma(z) \;:=\; \int_0^\infty t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt, \qquad \mathrm{Re}\, z \;>\; 0 \tag{8.9}$$

Das obige uneigentliche Integral konvergiert für $\mathrm{Re}\, z > 0$ und ergibt dort eine analytische (holomorphe) Funktion. Im Lehrbuch, Abschnitt 13 hatten wir die (absolute) Konvergenz für reelle $z > 0$ gezeigt, vgl. (13.5.8).

Für Werte $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ lässt sich (8.9) nun in eindeutiger Weise analytisch fortsetzen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt nämlich

$$\Gamma(z) \;=\; \frac{\Gamma(z+n+1)}{z\,(z+1)\,\ldots\,(z+n)}. \tag{8.10}$$

Beweis: Durch partielle Integration folgt aus (8.9) für $\operatorname{Re} z > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt = \frac{1}{z}t^z\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty t^z\mathrm{e}^{-t}\,dt = \frac{1}{z}\Gamma(z+1),$$

woraus sich (8.10) mittels vollständiger Induktion ergibt. □

Die rechte Seite von (8.10) lässt sich für $\operatorname{Re} z > -(n+1)$ auswerten und bildet dort für $z \neq 0, -1, \ldots, -n$ eine analytische Funktion. Für $z \to -n$ folgt aus (8.10)

$$\lim_{z\to -n} \Gamma(z)\,(z+n) = \frac{(-1)^n\Gamma(1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{8.11}$$

Demnach ist Γ eine *meromorphe* Funktion $\Gamma : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ mit Definitionsbereich $D := \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$, die in $0, -1, -2, \ldots$ jeweils einfache Pole besitzt.

Für $n = 0$ ergibt (8.10) die *Funktionalgleichung*

$$\Gamma(z+1) \;=\; z\,\Gamma(z), \qquad \Gamma(1) \;=\; 1 \;=\; 0!, \tag{8.12}$$

so dass sich für $z = n$ ergibt: $\Gamma(n+1) = n!$. Die Gammafunktion ist demnach eine analytische Fortsetzung der Fakultät.

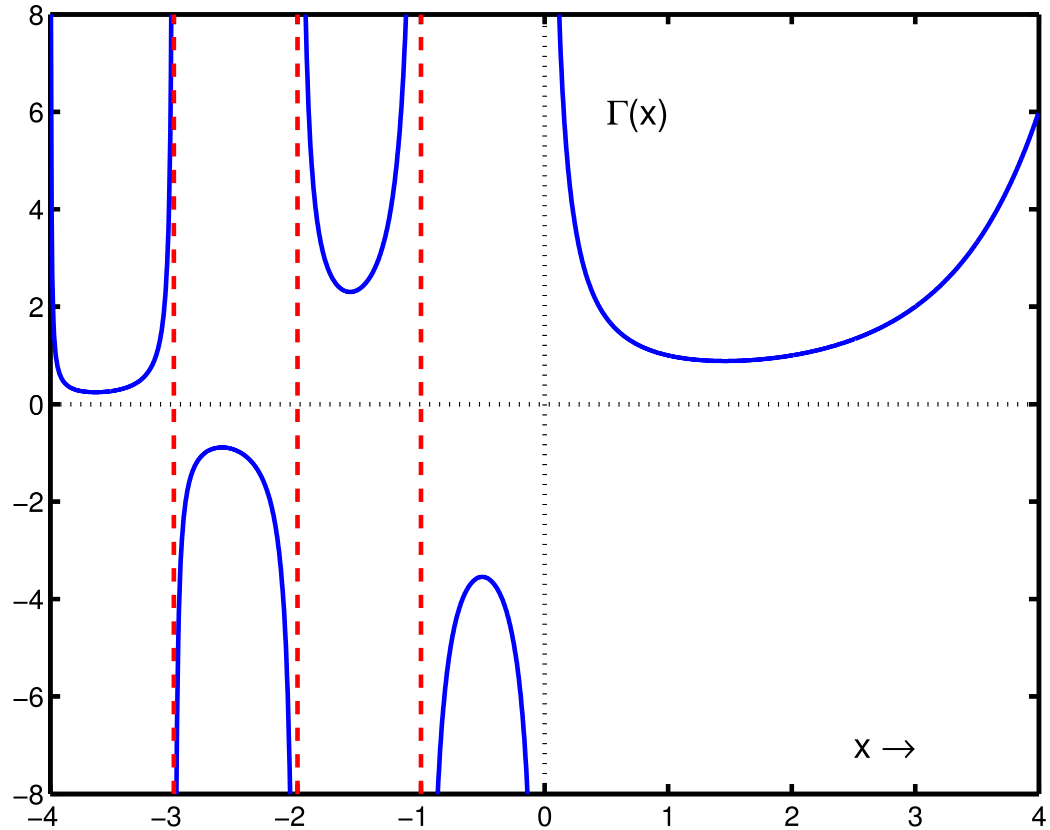
Speziell für $z = 0.5$ ergibt die Substitution $t = u^2$ in (8.9)

$$\Gamma(1/2) \;=\; \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt \;=\; 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,du \;=\; \sqrt{\pi}, \tag{8.13}$$

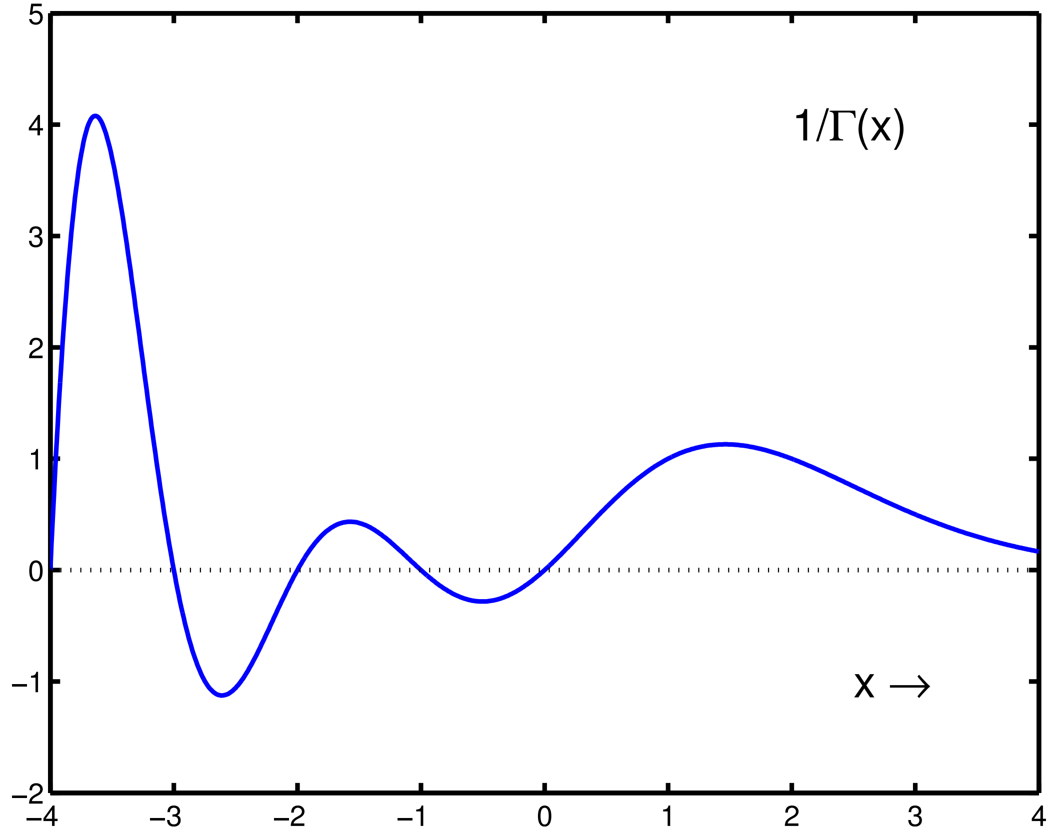
vgl. Lehrbuch (19.1.35).

Gaußsche Produktdarstellung:

$$\Gamma(z) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n^{z-1}\,n!}{z\,(z+1)\,\ldots\,(z+n-1)}\,. \tag{8.14}$$



Gammafunktion $\Gamma(x)$



Inverse Gammafunktion $1/\Gamma(x)$

Man beachte, dass $1/\Gamma$ auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch fortgesetzt werden kann. Die Berechnung von $\Gamma(x)$ mit Hilfe der (glatten) Funktion $1/\Gamma$ ist daher zu empfehlen. In Abramowitz, Stegun findet man die führenden Koeffizienten der Taylor-Entwicklung von $1/\Gamma$ um $z_0 = 0$. Für reelle z ist es jedoch günstiger, mit der Tschebyscheff-Entwicklung

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, T_k(2x-1), \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad (8.15)$$

zu arbeiten. Die führenden Koeffizienten dieser Entwicklung findet man beispielsweise in Clenshaw: Mathematical Tables, Vol.5, London, 1962.

$$\begin{array}{llllll}
c_0 = & 2.1275460156, & c_4 = & 0.0004166091, & c_8 = & -0.0000000334, \\
c_1 = & -0.0049855873, & c_5 = & -0.0000804814, & c_9 = & 0.0000000011, \\
c_2 = & -0.0641925436, & c_6 = & 0.0000029600, & c_{10} = & 0.0000000001 \\
c_3 = & 0.0050657986, & c_7 = & 0.0000002689, & &
\end{array}$$

Zylinderfunktionen.

Wir erinnern an die speziellen Lösungen der 3-D Wellengleichung, $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$, insbesondere an die Zylinderwellen. Der spezielle Ansatz hierfür $u(\mathbf{x}, t) = A\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, g(\mathbf{x})$ führte auf die Differentialgleichung

$$\omega^2 g(\mathbf{x}) + c^2 \Delta g(\mathbf{x}) = 0. \tag{8.16}$$

Wir nehmen an, dass die Lösung von x_3 unabhängig ist, verwenden Zylinderkoordinaten $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ und erhalten aus (8.16), vgl. Lehrbuch (17.2.26), mit $g = g(r, \varphi)$

$$g_{rr} + \frac{1}{r^2}\, g_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\, g_r + \frac{\omega^2}{c^2}\, g. = 0. \tag{8.17}$$

Wir verwenden wieder einen Produktansatz $g(r, \varphi) = p(r)\, q(\varphi)$. Einsetzen in (8.17) und Trennung der Variablen ergibt

$$r^2 \frac{p''}{p} + r\frac{p'}{p} + r^2 \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{q''}{q} = \lambda^2.$$

Die Differentialgleichung für q liefert die 2π–periodische Lösung

$$q(\varphi) \;=\; \mathrm{e}^{i\,\lambda\,\varphi}, \qquad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Die Differentialgleichung für p ergibt

$$p'' + \frac{1}{r}\,p' + \Big(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\lambda^2}{r^2}\Big)\,p \;=\; 0$$

und mit der Transformation $x = (\omega/c)\,r$ schließlich

$$x^2\,p''(x) + x\,p'(x) + (x^2 - \lambda^2)\,p(x) \;=\; 0. \tag{8.18}$$

(8.18) heißt *Besselsche Differentialgleichung*. Sie ist im Prinzip für alle λ, $x \in \mathbb{C}$ definiert.

Zur Lösung verwenden wir einen Potenzreihenansatz

$$p(x) \;=\; x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^{\lambda+k},$$

also $p' = \sum a_k(\lambda+k)x^{\lambda+k-1}$, $p'' = \sum a_k(\lambda+k)\,(\lambda+k-1)\,x^{\lambda+k-2}$.

Dies in die Besselsche Gleichung eingesetzt, ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \{(\lambda+k)(\lambda+k-1)+(\lambda+k)-\lambda^2\} x^{\lambda+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k+2} = 0$$

und nach Umformung

$$(2\lambda+1) a_1 x^{\lambda+k} + \sum_{k=0}^{\infty} [\, a_{k+2}(2\lambda+k+2)(k+2)+a_k \,] \, x^{\lambda+k+2} = 0.$$

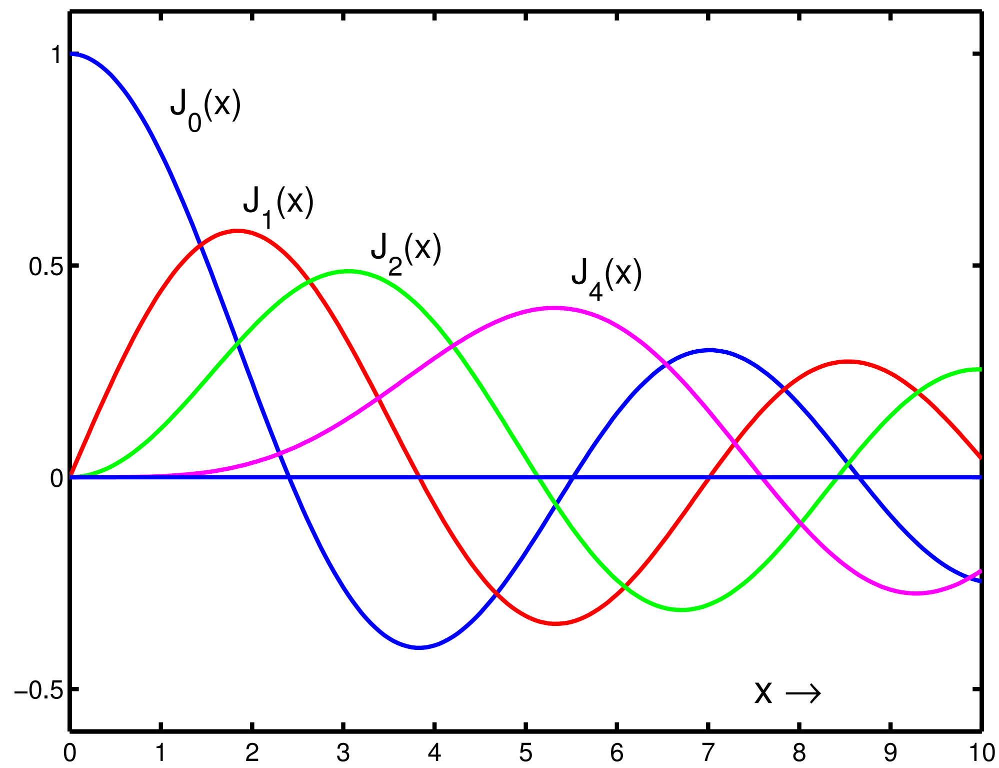
In dieser Potenzreihe müssen alle Koeffizienten verschwinden. Startet man mit $a_0 \neq 0$ (Normierung) und $a_1 = 0$ (damit sind auch alle $a_{2k+1} = 0$, so liefert vollständige Induktion die Lösung

$$a_{2k} := (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}\, k!\, (\lambda+1)\ldots(\lambda+k)}$$

Als Normierung wird verwendet $a_0 = \dfrac{1}{2^\lambda\, \Gamma(\lambda+1)}$. Damit ergibt sich schließlich die **Bessel-Funktion erster Art der Ordnung λ**

$$p(x) \;=\; J_\lambda(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\lambda+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2\,k} \qquad (8.19)$$

$J_\lambda(x)$ ist dabei für alle $\lambda,\, x \in \mathbb{C}$ definiert. Man beachte dazu, dass $1/\Gamma$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist.



Resumee: Schränken wir uns auf $\lambda \in \mathbb{Z}$ ein, so erhalten wir mit dem Superpositionsprinzip die folgende Lösung der 3D-Wellengleichung

$$u(\mathbf{x}, t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \, \mathrm{e}^{i(\omega t + k\varphi)} \, J_k((\omega/c)\, r). \tag{8.20}$$

Dabei sind (r, φ, z_3) die Zylinderkoordinaten von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Der Term für $k = 0$ liefert die schon früher gefundene Lösung (6.20).

Die Summanden für k und $-k$ lassen sich zusammenfassen. Es gilt nämlich

$$J_n(x) \;=\; (-1)^n \, J_{-n}(x), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{8.21}$$

Für $\lambda \notin \mathbb{Z}$ spannen J_λ und $J_{-\lambda}$ den Lösungsraum der Besselschen Differentialgleichung (8.18) auf; für $\lambda \in \mathbb{Z}$ jedoch nicht!

Beweis zu (8.21):

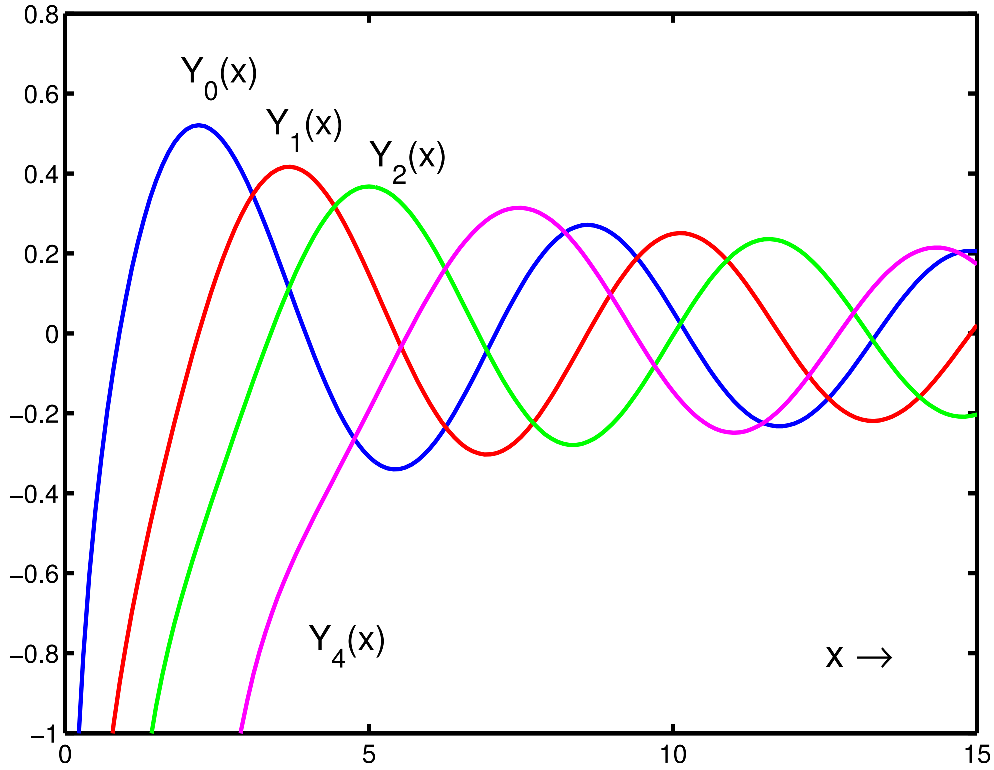
$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\,k} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\,k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+\ell}}{\Gamma(n+\ell+1)\,\Gamma(\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\,\ell} \quad = \quad (-1)^n\, J_n(x). \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen $1/\Gamma = 0$ auf $-\mathbb{N}_0$, das dritte mit $k =: n+\ell$. □

Zweite Lösung der Besselschen Differentialgleichung:

$$N_n(x) \;:=\; \lim_{\lambda\to n} \frac{J_\lambda(x)\,\cos(\lambda\,\pi) \;-\; J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda\,\pi)} \qquad (8.22)$$

Die Funktionen $N_n, \; n \in \mathbb{Z}$, heißen *Neumannsche Funktionen* oder auch *Bessel-Funktionen zweiter Art*. Sie werden häufig auch mit Y_n bezeichnet. Die Definition (8.22) lässt sich erweitern zu $N_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$.



Weitere abgeleitete Zylinderfunktionen sind:

Hankel-Funktionen (Zylinderfunktionen dritter Art) :

$$H_\lambda^{(1)}(x) \;:=\; J_\lambda(x) + i\, N_\lambda(x), \qquad H_\lambda^{(2)}(x) \;:=\; J_\lambda(x) - i\, N_\lambda(x).$$

Modifizierte Bessel-Funktionen:

$$I_\lambda(x) \;:=\; i^{-\lambda} J_\lambda(i\,x), \qquad K_\lambda(x) \;:=\; \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\lambda}(x) - I_\lambda(x)}{\sin(\lambda\,\pi)}\,.$$

Für $\lambda = n \in \mathbb{Z}$ ist die letzte Gleichung im Sinn eines Grenzwertes $\lambda \to n$ auszuwerten, analog zu (8.22).

Die modifizierten Bessel-Funktionen bilden dann linear unabhängige Lösungen der *modifizierte Besselschen Differentialgleichung*

$$x^2\, p''(x) + x\, p'(x) + (x^2 + \lambda^2)\, p(x) \;=\; 0. \tag{8.23}$$

Grundlegende Eigenschaften der Bessel-Funktionen

- Rekursionsformel (Dreiterm-Rekursion)

$$J_{\lambda+1}(x) = \frac{2\,\lambda}{x} J_{\lambda}(x) - J_{\lambda-1}(x) \tag{8.24}$$

- Normierung

$$J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2\,k}(x) = 1 \tag{8.25}$$

- Erzeugende Funktion

$$F(x,t) = \exp[\frac{x}{2}\,(t - \frac{1}{t})] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)\, t^k \tag{8.26}$$

- Ableitung

$$J_{\lambda}'(x) = 0.5\,(J_{\lambda-1}(x) - J_{\lambda+1}(x)) \tag{8.27}$$

- Integraldarstellung (8.28)

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin t - k\,t)\,dt$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t)\,\cos(k\,t)\,dt & : \; k \text{ gerade} \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x \sin t)\,\sin(k\,t)\,dt & : \; k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Kugelfunktionen.

Man schreibe die Laplace-Gleichung $\Delta u(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, in Kugelkoordinaten, vgl. Lehrbuch (17.2.29):

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} - \frac{\tan\theta}{r^2}u_\theta = 0. \qquad (8.29)$$

Verwendet man zur Lösung nun einen 3-D-Produktansatz

$$u(r,\varphi,\theta) \;=\; f(r)\,p(\varphi)\,q(\theta),$$

so erhält man nach Umformung

$$r^2\left[\frac{f''}{f} + \frac{2}{r}\,\frac{f'}{f}\right] + \left[\frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{p''}{p}\right] + \left[\frac{q''}{q} - \tan\theta\,\frac{q'}{q}\right] \;=\; 0. \quad (8.30)$$

Der erste Summand muss konstant sein. damit folgt

$$f''(r) + \frac{2}{r}\,f'(r) - \frac{\alpha}{r^2}\,f(r) \;=\; 0.$$

Für die Lösung dieser gew. Dgln. erhält man

- für $\alpha \neq -1/4$: $\quad f_{1,2}(r) = r^k, \quad k = \pm\sqrt{\alpha + 1/4} - 1/2,$
- für $\alpha = -1/4$: $\quad f_1(r) = r^{-1/2}, \quad f_2(r) = r^{-1/2}\ln r.$

Von (8.30) bleibt damit

$$\Big[\frac{p''}{p}\Big] + \Big[\cos^2\theta\,\frac{q''}{q} - \sin\theta\,\cos\theta\,\frac{q'}{q} + \alpha\,\cos^2\theta\Big] = 0.$$

Wieder müssen beide Summanden konstant sein. Aus der ersten Gleichung $p'' = -\omega^2 p$ ergeben sich die 2π–periodischen Lösungen

$$p_{1,2}(\varphi) = \mathrm{e}^{\pm i\,\omega\,\varphi}.$$

Schließlich bleibt

$$\cos^2\theta\,q'' - \sin\theta\cos\theta\,q' + (\alpha\cos^2\theta - \omega^2)\,q = 0. \tag{8.31}$$

Wir transformieren diese Differentialgleichung nun in zwei Schritten

- 1. Transformation: $x = \sin\theta,\ \eta(x) := q(\theta).$

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)\,\eta'' - 2\,x\,\eta' + (\alpha - \frac{\omega^2}{1-x^2})\,\eta = 0.$$

- 2. Transformation: $u_\omega(x) := (1-x^2)^{-\omega/2}\,\eta(x)$.

$$\Rightarrow \quad (1-x^2)\,u_\omega'' - 2\,(\omega+1)\,x\,u_\omega' + (\alpha - \omega\,(\omega+1))\,u_\omega \;=\; 0. \quad (8.32)$$

Differenziert man (8.32) nun nochmals nach x, so erhält man

$$(1-x^2)\,(u_\omega')'' - 2\,(\omega+2)\,x\,(u_\omega')' + (\alpha - (\omega+1)\,(\omega+2))\,(u_\omega') \;=\; 0,$$

d.h. u_ω' löst die Differentialgleichung (8.32), wobei dort ω durch $\omega+1$ zu ersetzen ist. Somit gilt $u_\omega' = u_{\omega+1}$, bzw. allgemeiner

$$u_{\omega+m}(x) \;=\; u_\omega^{(m)}(x), \quad m \;=\; 0, 1, 2, \ldots$$

Wegen $\omega \in \mathbb{N}_0$ genügt es daher, die Differentialgleichung (8.32) für $\omega = 0$, $u(x) := u_0(x)$, zu lösen.

Dies ist die *Legendresche Differentialgleichung*

$$(1-x^2)\,u''(x) \;-\; 2\,x\,u'(x) \;+\; \alpha\,u(x) \;=\; 0. \qquad (8.33)$$

Zu Lösung von (8.33) verwenden wir wieder einen Potenzreihenansatz $u(x) = \sum_0^\infty a_k\, x^k$. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
2\, a_2 \;+\; \alpha\, a_0 \;&=\; 0, \\
6\, a_3 \;+\; (\alpha - 2)\, a_1 \;&=\; 0, \\
(k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} \;+\; (\alpha - k\,(k+1))\, a_k \;&=\; 0, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Man erkennt sofort anhand dieser Rekursion:

Ist $a_0 = 0$, so sind auch alle $a_k = 0$ mit k gerade, d.h. u ist eine ungerade Funktion. Genauso: Ist $a_1 = 0$, so verschwinden alle a_k mit k ungerade und u ist eine gerade Funktion.

Wir betrachten nun den Spezialfall

$$
\alpha \;=\; n\,(n+1); \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{8.34}
$$

Mit obiger Rekursion ist dann $a_{n+2} = a_{n+4} = \ldots = 0$.

Ferner wählen wir (a_0, a_1) so, dass auch die anderen Indizes $a_{n+1} = a_{n+3} = \ldots$ verschwinden, genauer

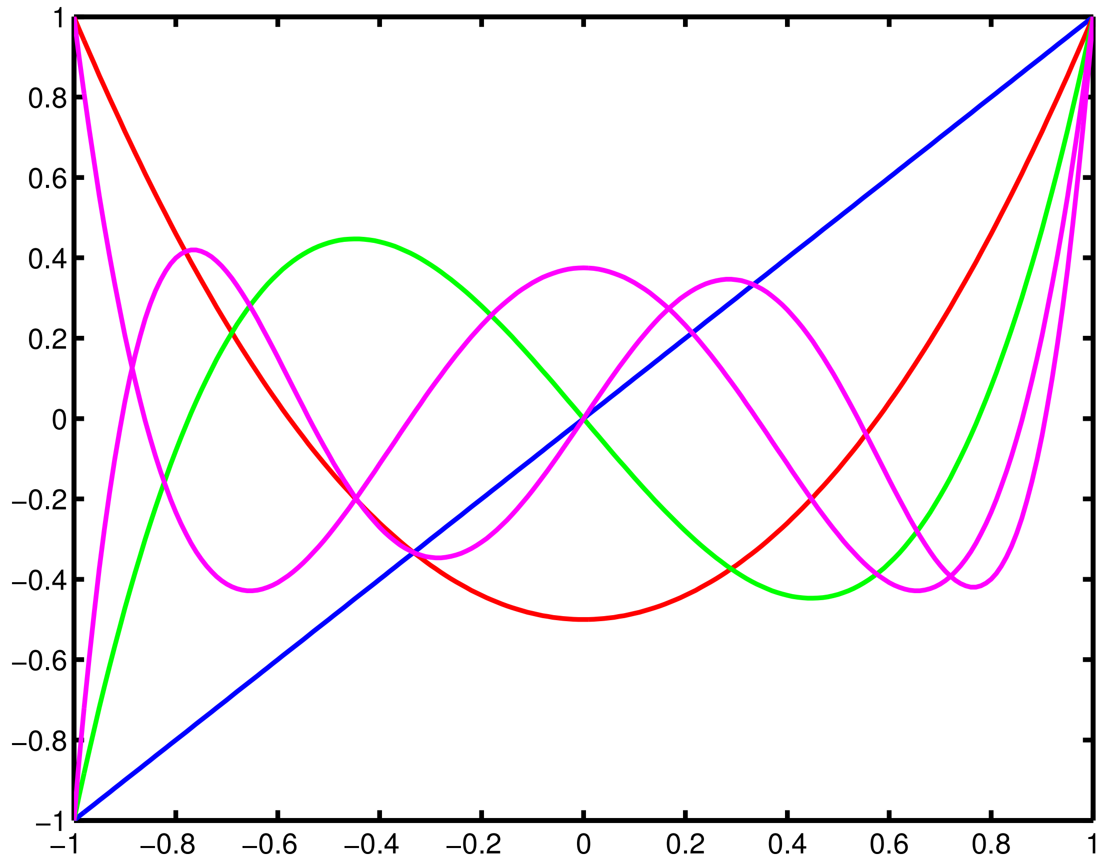
$$\begin{array}{lll} n \text{ gerade}: & a_0 \neq 0, & a_1 = 0, \\ n \text{ ungerade}: & a_0 = 0, & a_1 \neq 0. \end{array}$$

Damit wird u nun ein Polynom n-ten Grades, das so genannte *Legendre–Polynom* $P_n(x)$. Die Normierung (Wahl von a_0 bzw. a_1) ist so gewählt, dass

$$a_n > 0, \quad \int_{-1}^{1} P_n(x)^2\, dx = \frac{2}{2\,n + 1}\,.$$

Erste Legendre-Polynome:

$$\begin{array}{ll} P_0 = 1, & P_1 = x, \\ P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, & P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\ P_4 = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, & P_5 = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x. \end{array}$$



Legendre-Polynome $P_1, \ldots, P_5$

Rücktransformation:

$$
\begin{aligned}
u_m(x) &:= P_n^{(m)}(x), \\
\eta(x) &:= (1-x^2)^{m/2}\, P_n^{(m)}(x) \;\; =: \;\; P_{n,m}(x) \\
u_{n,m}(r,\varphi,\theta) &:= r^{k_{1,2}}\, \mathrm{e}^{\pm\, i\, m\, \varphi}\, P_{n,m}(\sin\theta) \\
k_{1,2} &:= \pm\sqrt{n(n+1) \,+\, 1/4} \,-\, 1/2; \\
& \quad\; n \in \mathbb{N}_0, \quad m = 0, 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Die Funktionen $P_{n,m}$ heißen *zugeordnete Kugelfunktionen*.

Grundlegende Eigenschaften der Legendre-Polynome

- P_n ist ein Polynom n-ten Grades, P_n ist gerade, falls n gerade ist, andernfalls ungerade.

- Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad n \neq m, \\ \dfrac{2}{2\,n+1}, & \text{falls} \quad n = m \end{cases} \tag{8.35}$$

- Dreiterm-Rekursion (Bonnetsche Rekursion)

$$P_{n+1}(x) \;=\; \frac{2\,n+1}{n+1}\, x\, P_n(x) \;-\; \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \tag{8.36}$$

- Formel von Rodrigues

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \tag{8.37}$$

- Explizite Darstellung

$$P_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \, \frac{(2\,(n-k))!}{2^n\, k!\,(n-k)!\,(n-2\,k)!}\, x^{n-2\,k} \qquad (8.38)$$

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846); Königsberg

Adrien-Marie Legendre (1752-1833); Paris