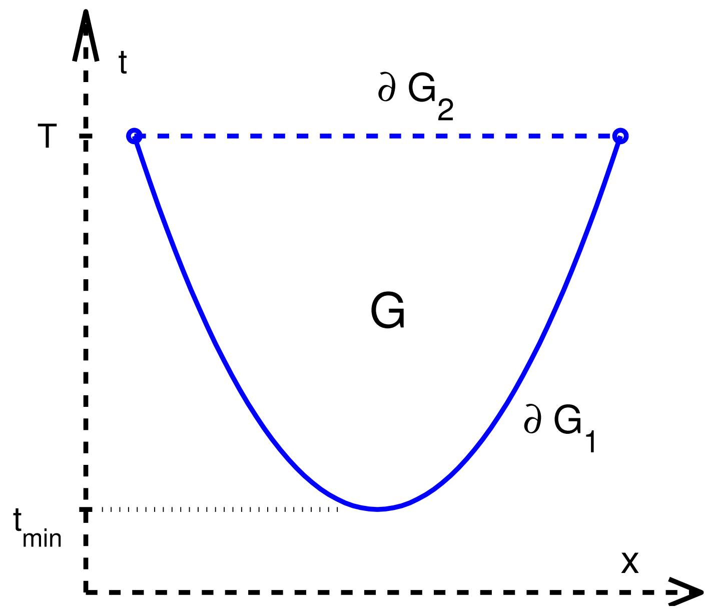
7. Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Als Beispiel für eine parabolische PDG betrachten wir die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x,t) \;=\; c\; u_{xx}(x,t), \qquad c > 0. \tag{7.1}$$

Den Schlüssel zur Beantwortung der Frage, welche Aufgabenstellungen für (7.1) sachgemäß sind liefert ein Maximum-Minimum Prinzip, vgl. (4.24).

Satz (7.2) (Maximum-Minimum Prinzip)
Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet wie in der folgenden Skizze, $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$, und ist $u = u(x,t)$ eine auf $\overline{G}$ stetige Funktion, die auf $G \cup \partial G_2$ die Wärmeleitung erfüllt, so liegen die Maxima und Minima von u (auch) auf ∂G_1.



Beweis: (indirekt) Sei $M := \max\{u(x,t) : (x,t) \in \partial G_1\}$. *Annahme:* Es gibt einen Punkt $(x_0, t_0) \in G \cup \partial G_2$ mit $u(x_0, t_0) \geq M + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Die Hilfsfunktion $v(x,t) := u(x,t) + k\,(t_0 - t)$ erfüllt dann die folgenden Eigenschaften

- $(x,t) \in \partial G_1 \quad \Rightarrow \quad v(x,t) \le M + k\,(T - t_{min}),$
- $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) \ge M + \varepsilon.$

Für hinreichend kleines $k > 0$ nimmt daher auch $v(x,t)$ sein Maximum in $G \cup \partial G_2$ (und nicht in ∂G_1) an:

$$\exists\,(x_1,t_1) \in G \cup \partial G_2 : \quad v(x_1,t_1) = \max\{v(x,t) : (x,t) \in \overline{G}\}.$$

Da (x_1,t_1) aber auch ein *lokales* Maximum von v ist und nicht in ∂G_1 liegt, gelten die notwendigen Bedingungen

$$v_x(x_1,t_1) = 0, \quad v_{xx}(x_1,t_1) \le 0, \quad v_t(x_1,t_1) \ge 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &\le v_t(x_1,t_1) - c\,v_{xx}(x_1,t_1) \\ &= (u_t - c\,u_{xx})|_{(x_1,t_1)} - k = -k < 0 \end{aligned}$$

Widerspruch! $\square$

Folgerung (7.3)

Schreibt man Anfangswerte für u auf ∂G_1 vor, d.h. betrachtet man die AWA

$$\begin{aligned} u_t &= c\, u_{xx}, && \text{für } (x,t) \in G \cup \partial G_2, \\ u(x,t) &= u_0(x,t), && \text{für } (x,t) \in \partial G_1 \end{aligned} \tag{7.4}$$

mit einer längs ∂G_1 stetigen Anfangsfunktion u_0, so folgt aus dem Maximum-Minimum Prinzip

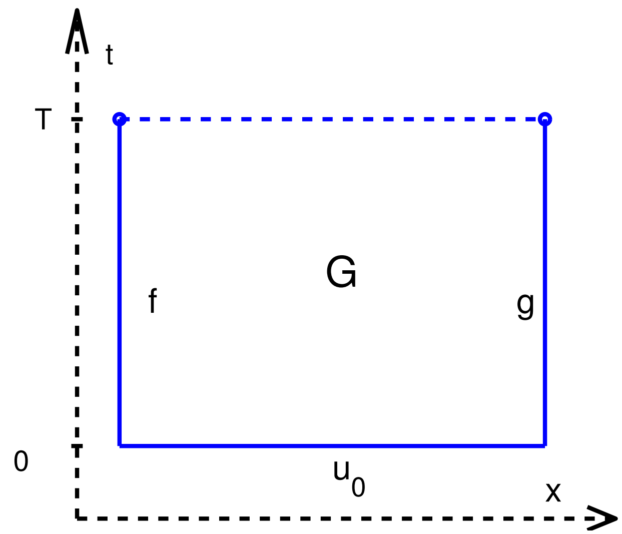
(a) Es gibt höchstens eine Lösung (**Eindeutigkeit**).

(b) Die Lösung (sofern existent) hängt stetig von der Anfangsfunktion u_0 ab: $|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| \leq \|\tilde{u}_0 - u_0\|_\infty$ (**Stabilität**).

Kann man noch die Existenz einer Lösung zeigen, so ist die obige AWA **sachgemäß gestellt**.

Zumeist „entartet“ das Gebiet G zu einem Streifen $G =]a,b[\times]0,T[$. Anstelle der AWA (7.4) erhält man dann eine ARWA

$$\begin{aligned} u_t &= c\,u_{x\,x}, && \text{für } (x,t) \in]a,b[\times]0,T], \\ u(x,0) &= u_0(x), && \text{für } a \le x \le b, \\ u(a,t) &= f(t), && u(b,t) = g(t), \quad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{7.5}$$



Hierbei sind u_0, f und g stetige Funktionen, die die Verträglichkeitsbedingungen $u_0(a) = f(0)$ und $u_0(b) = g(0)$ erfüllen. Als Grenzfall gilt das Maximum-Minimum Prinzip (7.2) und die Folgerung (7.3) analog.

Als physikalische Interpretation kann man sich die Temperaturverteilung in einem dünnen, nach außen isolierten Stab bei vorgegebener Anfangs-Temperaturverteilung und Wärmezu- bzw. -abfuhr an den Stabenden vorstellen.

Lösung der homogenen ARWA nach Fourier.

$$\begin{aligned} u_t &= c\, u_{xx}, && \text{für } 0 < x < \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,t) &= u_0(x), && \text{für } 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Wir verwenden wieder einen Produktansatz $u(x,t) = X(x)\,T(t)$, wobei u nicht identisch verschwinden soll. Aus der Wärmeleitungsgleichung folgt damit

$$X(x)\,T'(t) \;=\; c\,X''(x)\,T(t)$$

$$\Rightarrow\;\frac{T'(t)}{c\,T(t)} \;=\; \frac{X''(x)}{X(x)} \;=\; \lambda \;=\; \text{const.}$$

Wir erhalten also zwei gewöhnliche DGLen $X''(x) - \lambda\,X(x) = 0$ und $T'(t) - \lambda\,c\,T(t) = 0$.

Die Anpassung an die homogenen Randbedingungen ergibt zunächst die *Eigenwertaufgabe* $X''-\lambda X = 0,\; X(0) = X(\pi) = 0$.

Lösungen: $X_k(x) = a_k \sin(kx),\; k \in \mathbb{N}, \qquad \lambda = \lambda_k = -k^2$.

Zusammen mit der ersten Differentialgleichung $T' = -c\,k^2\,T$ ergeben sich die Lösungen: $u_k(x,t) = a_k\, e^{-c\,k^2\,t} \sin(k\,x)$.

Superposition dieser Lösungen ergibt schließlich die Reihendarstellung

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \mathrm{e}^{-c\,k^2\,t} \sin(k\,x). \tag{7.7}$$

Jede Funktion dieser Form - wobei die gleichmäßige Konvergenz der Reihe vorausgesetzt wird - liefert eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die die homogenen Randbedingungen erfüllt.

Abgleichung der Anfangsbedingung:

$$u(x,0) \;=\; u_0(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\,x). \tag{7.8}$$

Damit sind die a_k die Fourier-Koeffizienten der ungerade und $2\,\pi$-periodisch fortgesetzten Anfangsfunktion u_0.

$$a_k \;=\; \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(k\,x)\, dx. \tag{7.9}$$

Wegen der Verträglichkeitsbedingung $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ ist diese Fortsetzung stetig. Ist u_0 sogar eine C^1-Funktion, so ist die Fourier-Entwicklung (7.8) in $[0, \pi]$ absolut und gleichmäßig konvergent. Damit konvergiert aber auch die Reihe (7.7) absolut und lokal gleichmäßig auf $[0, \pi] \times [0, \infty[$.

Wir haben somit auch die **Existenz** einer Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe (7.6) gezeigt. Zusammen mit der Folgerung (7.3) ergibt sich also, dass die ARWA sachgemäß gestellt ist.

Beispiel (7.10)

Wir bestimmen die Lösung der ARWA (7.6) für $c = 1$ und

$$u_0(x) := \begin{cases} 1, & \pi/10 \leq x \leq \pi/5 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dazu berechnen wir

$$a_k \;=\; \frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/10}^{\pi/5} \sin(k\,x)\,dx \;=\; \frac{2}{\pi\,k}\,(\cos(k\,\pi/10)-\cos(k\,\pi/5))\,.$$

Die Lösung ist somit gegeben durch

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\,\pi}\Big(\cos(k\,\pi/10)-\cos(k\,\pi/5)\Big)\,\mathrm{e}^{-k^2\,t}\,\sin(k\,x).$$

Durch numerische Auswertung der Reihe ist die Lösung relativ leicht zu berechnen. Die Reihe konvergiert füt $t>0$ aufgrund des Faktors $\mathrm{e}^{-k^2\,t}$ relativ schnell. Natürlich ist die Konvergenz für $t=0$ sehr langsam, da die Anfangsfunktion unstetig ist.

Film: diffus1.m

Beliebige Ortsintervalle: Die ARWA

$$\begin{aligned} u_t &= c\, u_{x\,x}, && a < x < b,\ 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= u_0(x), && a \le x \le b, \\ u(a,t) &= u(b,t) = 0, && 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{7.11}$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \mathrm{e}^{-c\,\omega^2\, k^2\, t}\, \sin(k\,\omega\,(x-a)), \\ a_k &= \frac{2}{b-a} \int_a^b u_0(x)\, \sin(k\,\omega\,(x-a))\, dx, \quad \omega = \frac{\pi}{b-a}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Beweis: Man verwende die Transformation $\xi := \pi\, \dfrac{x-a}{b-a}$. $\square$

Integraldarstellung:

Setzt man die Fourier-Koeffizienten a_k in die Lösungsformel für u ein und vertauscht Integration und Summation, so erhält man

$$u(x,t) \;=\; \int_a^b G(x,\xi,t)\, u_0(\xi)\, d\xi \tag{7.13}$$

mit der **Greenschen Funktion**

$$G(x,\xi,t) \;=\; \frac{2}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-c\,\omega^2\,k^2\,t} \,\sin(k\,\omega\,(x-a))\,\sin(k\,\omega\,(\xi-a)). \tag{7.14}$$

Im Folgenden beschreiben wir noch, wie man mittels Superposition auch inhomogene ARWA für die Wärmeleitungsgleichung lösen kann.

Inhomogene Anfangs-Randwertaufgaben:

$$\begin{aligned} u_t &= c\, u_{xx} + h(x,t), \quad a < x < b,\ 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad a \le x \le b, \\ u(a,t) &= f(t),\ u(b,t) = g(t), \quad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Schritt 1: Wir transformieren die ARWA (7.15) in eine solche mit homogenen Randbedingungen. Dazu setzen wir

$$v(x,t) \;:=\; u(x,t) \;-\; \left\{ f(t) + \frac{x-a}{b-a}\,(g(t) - f(t)) \right\}. \tag{7.16}$$

Wir erhalten die folgende ARWP

$$\begin{aligned} v_t &= c\, v_{xx} + \tilde{h}(x,t), \quad a < x < b,\ 0 < t \le T, \\ v(x,0) &= v_0(x), \quad a \le x \le b, \\ v(a,t) &= v(b,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Hierbei ergibt sich die Anfangsfunktion v_0 aus (7.16) für $t = 0$; dabei ist $v_0(a) = v_0(b) = 0$.

Schritt 2: Wir bestimmen eine Lösung v^* der homogenen ARWA (7.17) ($\tilde{h} = 0$ setzen!). Hierzu lässt sich die Lösungsdarstellung (7.12) verwenden.

Schritt 3: Wir bestimmen eine Lösung v^{**} der inhomogenen ARWA (7.17), allerdings zu verschwindender Anfangsfunktion.

$$\begin{aligned} v_t &= c\, v_{xx} + \tilde{h}(x,t), \qquad a < x < b,\ 0 < t \leq T, \\ v(x,0) &= 0, \quad a \leq x \leq b, \\ v(a,t) &= v(b,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

Ein nützlicher Ansatz hierzu ist

$$v^{**}(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\,\sin(k\,\omega\,(x-a)), \qquad v_k(0) \;=\; 0. \tag{7.18}$$

Setzt man diesen in die inhomogene PDG ein und verwendet man die sin-Fourier-Entwicklung von $\tilde{h}$, so liefert Koeffizientenvergleich ein System (separierter) gewöhnlicher DGL für die v_k.

Schritt 4: Die gesuchte Lösung von (7.17) ergibt sich durch Überlagerung $v := v^* + v^{**}$. Hieraus erhält man u mittels (7.16).

Beispiel (7.19)

$$\begin{aligned} u_t \;&=\; u_{xx} + 1, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t, \\ u(x,0) \;&=\; u_0(x) \;=\; x + \sin x, \\ u(0,t) \;&=\; t,\; u(\pi,t) \;=\pi, \quad 0 \le t. \end{aligned}$$

Schritt 1: Setze

$$v(x,t) \;=\; u(x,t) \;-\; \left\{ t + \frac{x}{\pi}\,(\pi - t) \right\} \;=\; u(x,t) - t - x + \frac{x\,t}{\pi}.$$

Damit erhält für v die folgende ARWA

$$\begin{aligned} v_t \;&=\; v_{x\,x} + \frac{x}{\pi}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t, \\ v(x,0) \;&=\; v_0(x) \;=\; \sin x, \\ v(0,t) \;&=\; v(\pi,t) \;= 0, \quad 0 \le t. \end{aligned}$$

Schritt 2: Lösung der homogenen ARWA. Mit (7.7) und (7.8) folgt $\quad v^*(x,t) \;=\; \mathrm{e}^{-t}\,\sin x.$

Schritt 3: Lösung der inhomogenen ARWA mit verschwindender Anfangsfunktion. Der Ansatz (7.18) lautet

$$v^{**}(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\,\sin(k\,x), \qquad v_k(0) \;=\; 0.$$

Setzt man diesen Ansatz in die DGL ein, so folgt

$$v_t^{**} - v_{x\,x}^{**} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} (v_k'(t) \,+\, k^2 v_k(t)) \,\mathsf{sin}(kx) \;=\; \frac{x}{\pi}.$$

Ein Vergleich mit der sin–Fourier–Entwicklung von x/π

$$\frac{x}{\pi} \;=\; -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \,\mathsf{sin}(k\,x)$$

ergibt die folgenden AWA für die v_k:

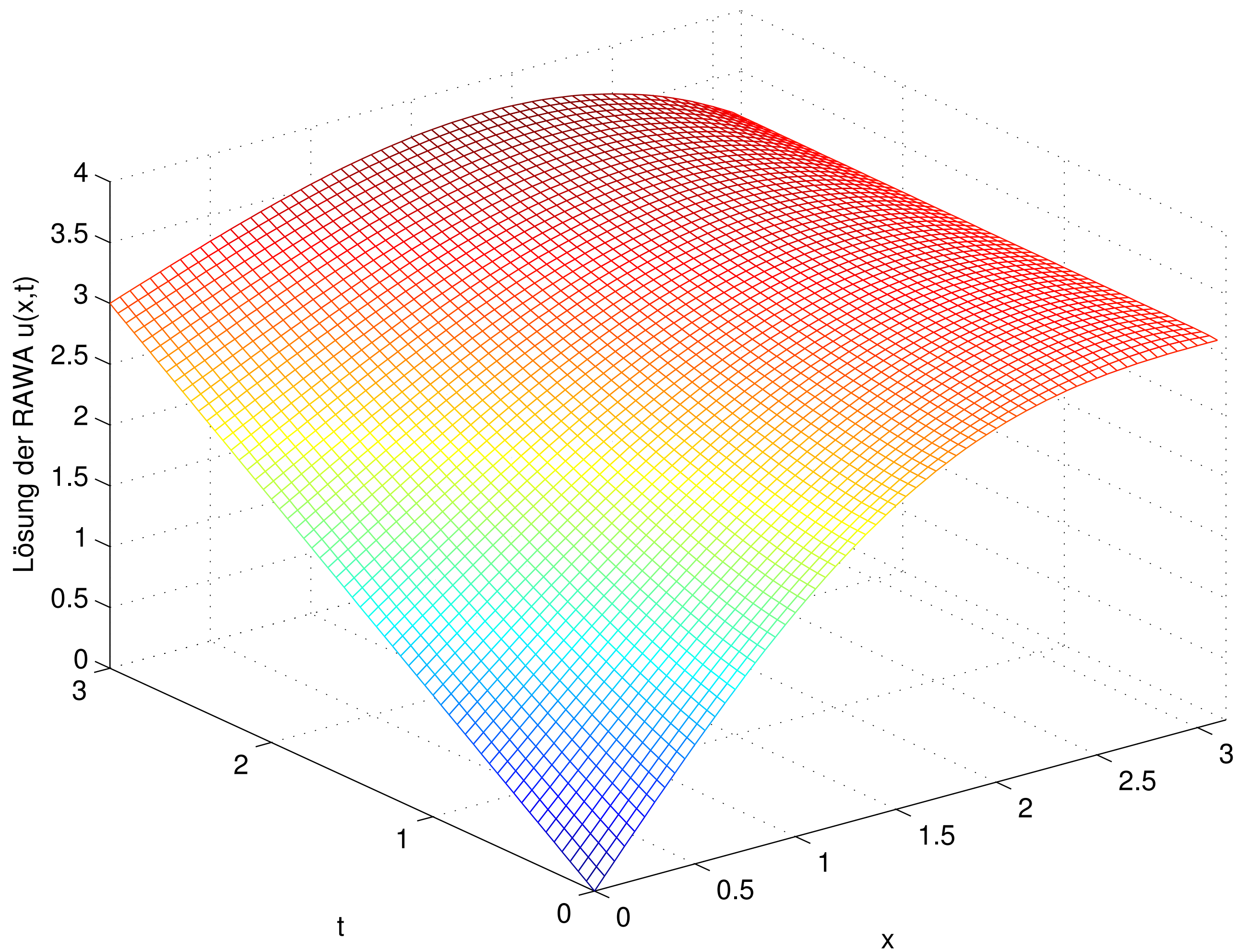
$$v_k'(t) \,+\, k^2 v_k(t) \,+\, (-1)^k \frac{2}{k\,\pi} \;=\; 0, \quad v_k(0) \;=\; 0.$$

Lösung mittels Variation der Konstanten liefert

$$v_k(t) \;=\; (-1)^k \frac{2}{k^3 \pi} \left(\mathrm{e}^{-k^2 t} - 1\right).$$

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= v(x,t) + t + x - \frac{x\,t}{\pi}, \\
v(x,t) &= v^*(x,t) + v^{**}(x,t), \\
v^*(x,t) &= \mathrm{e}^{-t} \sin x, \\
v^{**}(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin(k\,x), \\
v_k(t) &= (-1)^k \frac{2}{k^3\pi} \left(\mathrm{e}^{-k^2 t} - 1\right).
\end{aligned}$$


Lösung der RAWA u(x,t)
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
3
2
1
0
t
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x