3. Normalform linearer PDG zweiter Ordnung

Wir beschreiben in diesem Abschnitt Verfahren zur Transformation linearer oder auch halblinearer PDG *zweiter* Ordnung in *Normalform*. Zugleich gelangen wir damit zu einer *Typeneinteilung* dieser Differentialgleichungen, die insbesondere für die Frage, welche Rand– oder Anfangsbedingungen sinnvollerweise an die Aufgabe gestellt werden können, wesentlich ist.

Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall zweier unabhängiger Variablen (x_1, x_2) oder (x, y) und beginnen mit dem Fall konstanter Koeffizienten der Ableitungen zweiter Ordnung.

A. Konstante Koeffizienten

Eine lineare PDG zweiter Ordnung hat die Gestalt

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i\, u_{x_i} + c\, u \;=\; h. \tag{3.1}$$

Dabei sind die a_{ij}, b_i, c, h i.Allg. Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathsf{T}}$. Der erste Summand in (3.1) heißt der *Hauptteil* der PDG. Es lässt sich stets $a_{12} = a_{21}$ annehmen, d.h. die Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ ist *symmetrisch*. Ferner sei natürlich stets $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ vorausgesetzt.

Im Folgenden sei $\mathbf{A}$ konstant. (3.1) lautet dann in Matrixschreibweise

$$\left(\nabla^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \nabla\right) u + \left(\mathbf{b}^{\mathsf{T}} \nabla\right) u + c\, u \;=\; h, \tag{3.2}$$

wobei $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\mathsf{T}}$ den Nabla-Operator bezeichnet.

1. Transformationsschritt: (Drehung)

Wir transformieren $\mathbf{A}$ mittels einer orthogonalem Transformation (Drehung) auf Diagonalform (*Hauptachsentransformation*).

- λ_1, λ_2: Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit $\lambda_1 \geq \lambda_2$.
- $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ orthogonale Matrix aus Eigenvektoren von $\mathbf{A}$; $\det \mathbf{S} = 1$, $\mathbf{S}^\top \mathbf{A}\,\mathbf{S} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) =: \mathbf{\Lambda}$.

Damit definieren wir neue unabhängige Variable $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathbf{y} := \mathbf{S}^\top \mathbf{x}; \qquad \mathbf{x} = \mathbf{S}\,\mathbf{y}. \tag{3.3}$$

Für die transformierte Funktion

$$\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(\mathbf{S}\mathbf{y}) = u(s_{11}\,y_1 + s_{12}\,y_2\,,\, s_{21}\,y_1 + s_{22}\,y_2)$$

gilt dann die folgende Differentiationsregel

$$\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{u} = \mathbf{S}^\top \nabla_{\mathbf{x}} u, \qquad \nabla_{\mathbf{y}} : \text{ Ableitung nach } \mathbf{y}.$$

Dies in die PDG (3.2) eingesetzt ergibt

$$\left(\nabla_{\mathbf{y}}^{\top}\mathbf{S}^{\top}\mathbf{A}\,\mathbf{S}\,\nabla_{\mathbf{y}}\right)\tilde{u} + \left(\tilde{\mathbf{b}}^{\top}\mathbf{S}\,\nabla_{\mathbf{y}}\right)\tilde{u} + \tilde{c}\,\tilde{u} \;=\; \tilde{h},$$

wobei alle auftretenden Funktionen in den neuen Variablen $\mathbf{y}$ ausgedrückt werden müssen. Dies wird durch die Tilde angedeutet, also $\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{y}) := \mathbf{b}(\mathbf{S}\mathbf{y})$, $\tilde{c}(\mathbf{y}) := c(\mathbf{S}\mathbf{y})$, $\tilde{h}(\mathbf{y}) := h(\mathbf{S}\mathbf{y})$. Setzt man also $\mathbf{p} := \mathbf{S}^{\top}\tilde{\mathbf{b}}$ und $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{\top}\mathbf{A}\,\mathbf{S}$ ein, so lautet die transformierte PDG

$$\lambda_1\,\tilde{u}_{y_1y_1} + \lambda_2\,\tilde{u}_{y_2y_2} + p_1\,\tilde{u}_{y_1} + p_2\,\tilde{u}_{y_2} + \tilde{c}\,\tilde{u} \;=\; \tilde{h}. \tag{3.4}$$

Definition (3.5) Die PDG (3.1) heißt *elliptisch*, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, *hyperbolisch*, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, und *parabolisch*, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

2. Transformationsschritt: (Streckung)

a) Im elliptischen/hyperbolischen Fall setzt man

$$\widehat{x}_1 := y_1/\sqrt{|\lambda_1|}, \quad \widehat{x}_2 := y_2/\sqrt{|\lambda_2|}.$$

(3.4) transformiert sich dadurch in

$$\tilde{u}_{\widehat{x}_1\widehat{x}_1} \pm \tilde{u}_{\widehat{x}_2\widehat{x}_2} + p_1/\sqrt{|\lambda_1|}\,\tilde{u}_{\widehat{x}_1} + p_2/\sqrt{|\lambda_2|}\,\tilde{u}_{\widehat{x}_2} + \tilde{c}\,\tilde{u} = \tilde{h}.$$

oder – bei Verwendung der ursprünglichen Namen – in die **Normalform**

$$u_{x_1 x_1} \pm u_{x_2 x_2} + b_1 u_{x_1} + b_2 u_{x_2} + c\,u = h. \tag{3.5}$$

b) Im parabolischen Fall sei $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 > 0$. O.B.d.A. kann ferner $p_2 \neq 0$ angenommen werden. Daher lässt sich (3.4) nach u_{y_2} auflösen und man erhält (bei Umbenennung) die folgende **Normalform**

$$u_t = a\,u_{x\,x} + b\,u_x + c\,u + h. \tag{3.6}$$

B. Halblineare partielle Differentialgleichungen

Wenn die Koeffizienten der zweiten Ableitungen vom Ort (x_1, x_2) bzw. (x, y) abhängen, genügt es nicht, nur lineare bzw. affin-lineare Transformationen zu betrachten. Vielmehr muss man allgemeine nichtlineare Transformationen heranziehen.
Gegeben sei die halblineare PDG

$$a\, u_{x\,x} + 2\,b\,u_{x\,y} + c\,u_{y\,y} \;=\; h(x, y, u, u_x, u_y). \tag{3.7}$$

Die Differentialgleichung heißt *hyperbolisch*, falls $D := a\,c - b^2 < 0$, sie heißt *elliptisch*, falls $D > 0$, und sie heißt *parabolisch*, falls $D = 0$. Beachte, dass der Typ der PDG (3.7) nun vom Ort abhängen kann. Wir betrachten eine allgemeine Koordinatentransformation:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \text{mit} \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \;:=\; \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0. \tag{3.8}$$

Nach dem Umkehrsatz dürfen wir annehmen, dass diese Transformation ein C^1–Diffeomorphismus zwischen einem (x, y)–Gebiet und einem (ξ, η)–Gebiet beschreibt.

Wir bilden die Ableitungen von $u(x, y) =: \tilde{u}\,(\xi(x, y), \eta(x, y))$:

$$
\begin{aligned}
u_x &= \tilde{u}_\xi \cdot \xi_x + \tilde{u}_\eta \cdot \eta_x, \\
u_y &= \tilde{u}_\xi \cdot \xi_y + \tilde{u}_\eta \cdot \eta_y, \\
u_{xx} &= \tilde{u}_{\xi\xi}\, \xi_x^2 + 2\, \tilde{u}_{\xi\eta}\, \xi_x \eta_x + \tilde{u}_{\eta\eta}\, \eta_x^2 + \Big(\tilde{u}_\xi \xi_{xx} + \tilde{u}_\eta \eta_{xx} \Big), \\
u_{xy} &= \tilde{u}_{\xi\xi}\, \xi_x \xi_y + \tilde{u}_{\xi\eta}\, (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + \tilde{u}_{\eta\eta}\, \eta_x \eta_y + \Big(\tilde{u}_\xi \xi_{xy} + \tilde{u}_\eta \eta_{xy} \Big), \\
u_{yy} &= \tilde{u}_{\xi\xi}\, \xi_y^2 + 2 \tilde{u}_{\xi\eta}\, \xi_y \eta_y + \tilde{u}_{\eta\eta}\, \eta_y^2 + \Big(\tilde{u}_\xi \xi_{yy} + \tilde{u}_\eta \eta_{yy} \Big),
\end{aligned}
$$

und setzen diese in die Ausgangsgleichung (3.7) ein. Umgeformt ergibt sich eine PDG gleicher Gestalt

$$
A\, \tilde{u}_{\xi\xi} \;+\; 2\, B\, \tilde{u}_{\xi\eta} \;+\; C\, \tilde{u}_{\eta\eta} \;=\; \tilde{h}(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) \qquad (3.9)
$$

mit den transformierten Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
A &= a\,\xi_x^2 + 2\,b\,\xi_x\xi_y + c\,\xi_y^2 \\
B &= a\,\xi_x\,\eta_x + b\,(\xi_x\,\eta_y + \xi_y\,\eta_x) + c\,\xi_y\,\eta_y \\
C &= a\,\eta_x^2 + 2\,b\,\eta_x\,\eta_y + c\,\eta_y^2
\end{aligned}
$$

Mit etwas Mühe rechnet man nach, dass

$$(A\,C - B^2) = (a\,c - b^2) \cdot \left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right)^2$$

gilt, d.h. der Typ der PDG (3.7) wird durch die allgemeine Transformation nicht verändert!

Die *Idee* ist nun, die Transformation so zu wählen, dass die Koeffizienten A und C verschwinden. Dazu hat man $\xi(x,y)$ und $\eta(x,y)$ als unabhängige Lösungen der folgenden PDG erster Ordnung zu wählen

$$a\,z_x^2 + 2\,b\,z_x\,z_y + c\,z_y^2 = 0. \tag{3.10}$$

(3.10) heißt die charakteristische PDG zu (3.7). Die zu einer Lösung $z(x,y)$ dieser charakteristischen PDG zugehörigen Höhenlinien $z(x,y) = \text{const.}$ heißen die Charakteristiken der PDG (3.7).

Beispiel (3.11)

Die charakteristische PDG der Wellengleichung $u_{t\,t} - c^2\,u_{x\,x} = 0$ lautet $z_t^2 - c^2\,z_x^2 = 0$, oder (Wurzel ziehen) $z_t \pm c\,z_x = 0$. Die zugehörigen charakteristischen (gewöhnlichen) DGL lauten nach Abschnitt 2 (Phasen-DGL) $d\,x/d\,t = \pm c$. Die Lösungen der charakteristischen PDG sind damit $z(x,t) = \Phi(x \pm c\,t)$, die Charakteristiken sind die beiden Geradenscharen $x \pm c\,t = \text{const.}$

Merke: Durch jeden Punkt (t_0, x_0) verlaufen genau *zwei* Charakteristiken.

Wir fahren mit der Untersuchung der charakteristischen PDG

$$a\, z_x^2 + 2\, b\, z_x\, z_y + c\, z_y^2 \;=\; 0 \tag{3.10}$$

fort. Diese lässt sich für $a \neq 0$ folgendermaßen faktorisieren

$$(z_x - w_1 z_y) \cdot (z_x - w_2 z_y) = 0, \quad w_{1,2} = -\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - ac}\,,$$

so dass lediglich zwei homogene lineare PDG erster Ordnung

$$z_x \;-\; w_j\, z_y \;=\; 0, \quad j = 1, 2.$$

zu untersuchen sind. Die zugehörigen charakteristischen gewöhnlichen Differentialgleichung lauten $dx/dt = 1$, $dy/dt = -w_j$, bzw. die Phasendifferentialgleichung $dy/dx \;=\; y' \;=\; -w_j$, $j = 1, 2$. Die Lösungen dieser *beiden* Differentialgleichungen lassen sich zusammenfassen

$$a\,(y' + w_1)\,(y' + w_2) \;=\; 0 \iff a\,(y')^2 \;-\; 2\,b\,y' \;+\; c \;=\; 0.$$

Definition Die gewöhnliche (implizite) DGL

$$a\,(y')^2 - 2\,b\,y' + c \;=\; 0 \tag{3.12}$$

heißt die *charakteristische gewöhnliche DGL* zu (3.10) bzw. zur PDG (3.7).

Sind $\varphi_j(x,y) = C_j,\ j = 1,2$ die allgemeinen Lösungen von (3.12) (Grundcharakteristiken), so sind durch $z = \Phi_j(\varphi_j(x,y))$ Lösungen von (3.10) gegeben, $\Phi_j \in \mathrm{C}^1$ beliebig.

1.) Hyperbolischer Fall: $D = ac - b^2 < 0.$

Die beiden Wurzeln $w_{1,2}$ sind reell, es gibt daher zwei (reelle) Charakteristikenscharen $\varphi_j(x,y) = C_j,\ j = 1,2.$

Die Substitution $\xi := \varphi_1(x,y),\ \eta := \varphi_2(x,y)$ transformiert die Ausgangsgleichung in die *Normalform* (statt $\tilde{u}$ schreiben wir u)

$$u_{\xi\eta} \;=\; g(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta). \tag{3.13}$$

Die weitere Transformation $\xi =: x+y$, $\eta =: x-y$ liefert hieraus die schon bekannte Normalform (vgl. (3.5))

$$u_{xx} - u_{yy} = G(x, y, u, u_x, u_y). \tag{3.14}$$

Beispiel (3.15) $\quad y\,u_{xx} + (x+y)\,u_{xy} + x\,u_{yy} = 0.$

Wegen $D = ac - b^2 = xy - \frac{1}{4}(x+y)^2 = -\frac{1}{4}(x-y)^2 < 0$ ist die PDG für $x \neq y$ hyperbolisch.

Die charakt. gewöhnl. DGL lautet $y\,(y')^2 - (x+y)\,y' + x = 0$ oder $y_1' = x/y_1$, $y_2' = 1$. Die Grundcharakteristiken lauten somit $y^2 - x^2 = C_1$ und $y - x = C_2$. Wir verwenden also die folgende Transformation: $\xi := y^2 - x^2$, $\eta := y - x$.

Zur Regularität:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -2x & 2y \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(y - x) \neq 0, \quad \text{für} \quad x \neq y.$$

Umrechnung der Ableitungen:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \tilde{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(y^2 - x^2\,,\, y - x)\\
u_x &= -2\,x\,\tilde{u}_\xi - \tilde{u}_\eta\\
u_y &= 2\,y\,\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta\\
u_{xx} &= 4\,x^2\,\tilde{u}_{\xi\xi} + 4\,x\,\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta} - 2\,\tilde{u}_\xi\\
u_{xy} &= -4\,x\,y\,\tilde{u}_{\xi\xi} - 2\,(x+y)\,\tilde{u}_{\xi\eta} - \tilde{u}_{\eta\eta}\\
u_{yy} &= 4\,y^2\,\tilde{u}_{\xi\xi} + 4\,y\,\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta} + 2\,\tilde{u}_\xi
\end{aligned}$$

Diese in die PDG eingesetzt liefert

$$y\,u_{xx} + (x+y)\,u_{xy} + x\,u_{yy} = -2\left(\eta^2\,\tilde{u}_{\xi\eta} + \eta\,\tilde{u}_\xi\right) = 0.$$

Damit lautet die transformierte PDG:

$$\eta\,\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_\xi = \left(\eta\,\tilde{u}_\xi\right)_\eta = 0.$$

Hier ist direkte Integration möglich: $\tilde{u} = \Phi_1(\xi)/\eta + \Phi_2(\eta)$.

Die Rücktransformation ergibt:

$$u(x,y) \;=\; \Phi_1(y^2-x^2)/(y-x) \;+\; \Phi_2(y-x),$$

mit beliebigen C^2-Funktionen Φ_1, Φ_2.

2.) Parabolischer Fall: $\qquad D = ac - b^2 \;=\; 0.$

Wegen $w_1 \;=\; w_2$ fallen die Charakteristikenscharen zusammen: $\varphi(x,y) = C$. Man setze nun $\xi := \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ mit irgendeiner Funktion ψ, für die die Regularitätsbedingung $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$ erfüllt ist. Damit ergibt sich die Normalform:

$$u_{\eta\eta} \;=\; g(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta). \tag{3.16}$$

Häufig ist $\psi(x,y) = x$ oder $\psi(x,y) = y$ eine geeigneter zweiter Transformationsteil.

Beispiel (3.17) $y^2\, u_{xx} - 2\, x\, y\, u_{xy} + x^2\, u_{yy} = 0.$

Charakt. gew. Diffgln.: $y^2\,(y')^2 + 2\,x\,y\,y' + x^2 = 0$

Charakteristikenschar: $x^2 + y^2 = C$

Transformation: $\xi := x^2 + y^2, \;\; \eta := x,$

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0 \quad \text{für} \quad y \neq 0$$

Normalform: $\tilde{u}_{\eta\eta} + 2\,\dfrac{\xi}{\xi - \eta^2}\,\tilde{u}_\xi = 0.$

3.) Elliptischer Fall: $D = ac - b^2 > 0.$

Die Wurzeln der charakt. gewöhnl. DGL sind konjugiert komplex:

$$C_j = \varphi_1(x,y) \pm i\,\varphi_2(x,y), \quad j = 1,2.$$

Insbesondere gibt es keine (reellen) Charakteristiken!

Mit der Transformation $\xi := \varphi_1(x,y), \quad \eta := \varphi_2(x,y)$ ergibt sich die folgende Normalform:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{3.18}$$

Beispiel (3.19) $\qquad u_{xx} + 4\,x\,u_{xy} + 5\,x^2\,u_{yy} = 0, \quad x > 0.$

Charakt. gew. Diffgln.:	$(y')^2 - 4\,x\,y' + 5\,x^2 = 0$
Wurzeln:	$y' = (2 \pm i)\,x$
kompl. Charakteristiken:	$C_j = (y - x^2) \pm i\,x^2/2, \quad j = 1, 2,$
Transformation:	$\xi := y - x^2, \ \eta := x^2/2,$
Normalform:	$\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} + \dfrac{1}{2\,\eta}\left(\tilde{u}_\eta - 2\,\tilde{u}_\xi\right) = 0.$