2. Quasilineare PDG erster Ordnung

Eine skalare PDG erster Ordnung hat die allgemeine Form

$$F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), u_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})) \;=\; 0. \tag{2.1}$$

Dabei ist $u : \mathbb{R}^n \supset G \longrightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion. Mit $u_{\mathbf{x}}$ wird hier der Gradient der Funktion u bezeichnet.

Die PDG (2.1) heißt *quasilinear*, falls sie die Form hat

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u)\, u_{x_i}(\mathbf{x}) \;=\; h\,(\mathbf{x}, u), \quad \forall\ \mathbf{x} \in G, \tag{2.2}$$

sie heißt *linear*, falls sie die Form hat

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x})\, u_{x_i}(\mathbf{x}) \;+\; a_0(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}) \;=\; h\,(\mathbf{x}), \quad \forall\ \mathbf{x} \in G. \tag{2.3}$$

Die Funktion h heißt die *Inhomogenität* der linearen PDG (2.3).

Wieder gilt: Die allgemeine Lösung von (2.3) ergibt sich durch Addition einer *partikulären Lösung* zur allgemeinen Lösung der zugehörigen *homogenen PDG*: $u(\mathbf{x}) = u_{\mathsf{hom}}(\mathbf{x}) + u_{\mathsf{part}}(\mathbf{x})$.

Das im Folgenden beschriebene Verfahren zur Lösung quasilinearer PDG (2.2) arbeitet mit einer Rückführung auf gewöhnliche DGL. Es heißt **Charakteristikenverfahren**.

A. Wir beginnen mit einem Spezialfall einer **linearen, homogenen PDG erster Ordnung**. Man beachte, dass $a_0 = 0$ ist.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x})\, u_{x_i}(\mathbf{x}) \;=\; 0, \quad x \in G. \tag{2.4}$$

Wir versuchen, die linke Seite als vollständige Ableitung von $u(\mathbf{x}(t))$ nach einer neuen Variablen t (Zeit) zu deuten und setzen

$$x_i'(t) \;=\; a_i(\mathbf{x}(t)), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

(2.5) heißt *die charakteristische DGL* zur PDG (2.4). Es ist ein *autonomes* System gewöhnlicher DGL. Seine Lösungen heißen *Charakteristiken*, genauer *Grundcharakteristiken*.

Setzt man (2.5) in (2.4) ein, so sieht man: $u = u(\mathbf{x})$ löst genau dann die PDG (2.4), wenn $u(\mathbf{x}(t))$ für jede Charakteristik $\mathbf{x}(t)$ konstant ist:

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(\mathbf{x}(t))\, x_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(\mathbf{x}(t))\, a_i(\mathbf{x}(t)) = 0.$$

Funktionen $u(\mathbf{x})$ mit dieser Eigenschaft heißen *erste Integrale*. Es bleibt also die Aufgabe, die ersten Integrale, genauer *das allgemeine erste Integral* der charakteristischen DGL (2.5) zu bestimmen.

Wir geben zwei Wege an:

1. Weg:

a) Man bestimme die allgemeine Lösung der DGL $\mathbf{x}' = \mathbf{a}(\mathbf{x})$. Diese hat die Form $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t + C_n; C_1, \ldots, C_{n-1})$ mit den Integrationskonstanten $C_1, \ldots, C_n$.

b) Aus diesen n Gleichungen wird $t + C_n$ eliminiert. Die verbleibenden $n-1$ Gleichungen werden nach den $C_1, \ldots, C_{n-1}$ aufgelöst. Man hat dann erste Integrale der Form

$$C_j = \varphi_j(\mathbf{x}), \; j = 1, \ldots, n-1, \tag{2.6}$$

wobei die Unabhängigkeit der φ_j mittels der Rangbedingung $\text{Rang}(\partial\varphi_j/\partial x_k) = n-1$ zu überprüfen ist.

c) Das *allgemeine erste Integral* der charakteristischen DGL ist dann gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \Phi(\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_{n-1}(\mathbf{x})) \tag{2.7}$$

wobei $\Phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine beliebige C^1–Funktion ist.

2. Weg:

a) Man stelle zunächst die Phasen-DGL zu $\mathbf{x}' = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ auf, indem man von t z.B. auf die Variable x_n transformiert (dabei sei $a_n \neq 0$ vorausgesetzt)

$$\frac{d\,x_j}{d\,x_n} = \frac{a_j(\mathbf{x})}{a_n(\mathbf{x})}, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

b) Zu diesem DGLsystem ist sodann die allgemeine Lösung zu bestimmen

$$x_j(x_n) = \psi_j(x_n; C_1, \ldots, C_{n-1}), \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Durch Auflösung dieser $(n-1)$ Gleichungen nach den Integrationskonstanten $C_1, \ldots, C_{n-1}$ erhält man die Relationen (2.6).

c) Wie oben.

Beispiel (2.8)

Gesucht ist die allgemeine Lösung der PDG

$$x\,u_x + y\,u_y + (x^2 + y^2)\,u_z \;=\; 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Das zugehörige charakteristische System lautet

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = x^2 + y^2.$$

Dieses besitzt die allgemeine Lösung

$$x = C_1\,\mathrm{e}^t, \quad y = C_2\,\mathrm{e}^t, \quad z = 0.5\,(C_1^2 + C_2^2)\,\mathrm{e}^{2t} + C_3.$$

Elimination von $C_1\mathrm{e}^t$ ergibt

$$y = \tilde{C}_2\,x, \quad z = 0.5\,(x^2 + y^2) + C_3$$

Diese Relationen werden nach den Integrationskonstanten aufgelöst

$$\tilde{C}_2 = \varphi_1(x,y,z) := y/x, \quad C_3 = \varphi_2(x,y,z) := z - 0.5\,(x^2 + y^2).$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der vorgegebenen PDG

$$u(x,y,z) := \Phi(y/x, z - 0.5\,(x^2 + y^2)), \quad x \neq 0,$$

wobei $\Phi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ eine beliebige Funktion ist.

Aufgabe: Machen Sie für das obige Beispiel die Probe! Zeigen Sie dazu zunächst, dass $u = \varphi_1$ und $v = \varphi_2$ spezielle Lösungen der PDG sind und weiter allgemein, dass mit u und v auch $\Phi(u,v)$ für eine beliebige (differenzierbare) Funktion Φ eine Lösung bildet.

Merkregel: Die *allgemeine Lösung* einer PDG erster Ordnung ist eine Lösungsschar, die von einer *beliebig wählbaren* C^1–Funktion Φ abhängt.

B. Wir übertragen nun die Charakteristikenmethode auf den Fall einer allgemeinen **quasilinearen PDG erster Ordnung**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u)\, u_{x_i}(\mathbf{x}) \;=\; h\,(\mathbf{x}, u), \qquad \mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^n. \tag{2.9}$$

Anstelle von (2.9) betrachten wir dazu das **Hilfsproblem**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u)\, U_{x_i} \;+\; h\,(\mathbf{x}, u)\, U_u \;=\; 0, \qquad (\mathbf{x}, u) \in G \times \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

zur Bestimmung einer C^1–Funktion $U = U(\mathbf{x}, u)$.

Satz (2.11) Ist U eine Lösung von (2.10) mit $U_u \neq 0$ und ist für einen Punkt $U(\mathbf{x}_0, u_0) = 0$, so ist (in einer Umgebung von $(\mathbf{x}_0, u_0)$) durch $U(\mathbf{x}, u) = 0$ implizit eine Lösung $u = u(\mathbf{x})$ der Ausgangsgleichung (2.9) definiert.

Beweis. Durch die Gleichung $U(\mathbf{x}, u) = 0$ wird aufgrund der Voraussetzungen und des Satzes über implizite Funktionen lokal bei $(\mathbf{x}_0, u_0)$ eine eindeutig bestimmte C^1–Funktion $u = u(\mathbf{x})$ definiert. Differentiation nach x_i liefert $U_{x_i} + U_u\, u_{x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Dies in die PDG (2.10) für U eingesetzt, ergibt

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u)\, u_{x_i}\, U_u \;+\; h\,(\mathbf{x}, u)\, U_u \;=\; 0$$

und somit nach Kürzen durch $U_u \neq 0$ die behauptete PDG (2.9) für $u(\mathbf{x})$.

$\square$

Wir merken noch an, dass sich auf diese Weise auch alle Lösungen von (2.9) ergeben. Mithin gilt: Ist $U(\mathbf{x}, u) = \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ die allgemeine Lösung von (2.10), so ist

$$\Phi(\varphi_1(\mathbf{x}, u), \ldots, \varphi_n(\mathbf{x}, u)) \;=\; 0 \tag{2.12}$$

eine implizite Darstellung der allgemeinen Lösung von (2.9).

Beispiel (2.13)

Gesucht sei die allgemeine Lösung der quasilinearen PDG

$$(1+x)\,u_x \;-\; (1+y)\,u_y \;=\; y-x, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Wir stellen zunächst die erweiterte PDG (2.10) auf:

$$(1+x)\,U_x \;-\; (1+y)\,U_y \;+\; (y-x)\,U_u \;=\; 0.$$

Das zugehörige charakteristische DGL-System lautet $x' = 1+x$, $y' = -(1+y)$, $u' = y-x$. Es besitzt die allgemeine Lösung

$$x \;=\; C_1\,\mathrm{e}^t - 1, \quad y \;=\; C_2\,\mathrm{e}^{-t} - 1, \quad u \;=\; C_3 \;-\; C_2\,\mathrm{e}^{-t} \;-\; C_1\,\mathrm{e}^t.$$

Elimination von $C_1\,\mathrm{e}^t = x+1$ liefert

$$y \;=\; \tilde{C}_2\,\frac{1}{x+1} \;-\; 1, \quad u \;=\; C_3 \;-\; (y+1) \;-\; (x+1),$$

und damit

$\tilde{C}_2 = \varphi_1(x,y,u) := (x+1)\,(y+1),\ C_3 = \varphi_2(x,y,u) := x+y+u.$

Die allgemeine Lösung der erweiterten PDG ist also gegeben durch $U = \Phi((x+1)\,(y+1), x+y+u)$ und die der Ausgangsgleichung daher implizit durch

$$0 = \Phi((x+1)\,(y+1), x+y+u).$$

Nehmen wir an, dass sich $\Phi = 0$ nach der zweiten Variablen auflösen lässt (das ist gegeben, falls $U_u \neq 0$), so erhalten wir auch eine explizite Darstellung der allgemeinen Lösung

$$u(x,y) = \varphi((x+1)\,(y+1)) - x - y,$$

wobei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige C^1-Funktion bezeichnet.

Beispiel (2.14) (Burgers-Gleichung)

Die folgende quasilineare partielle Differentialgleichung

$$v_t + v\, v_x = 0 \tag{2.15}$$

hat Anwendungen z.B. in der Aerodynamik und bei der Untersuchung von Flachwasserwellen. Sie beschreibt auch die eindimensionale (zeitabhängige) Bewegung eines kompressiblen Gases mit der Geschwindigkeit $v(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Man erhält (2.15) aus der Annahme, dass sich ein Teilchen am Ort $x(t)$ mit der Geschwindigkeit $x'(t) = v(x(t),t)$ *beschleunigungsfrei* bewegt. Dann folgt nämlich

$$0 = x''(t) = v_x\, x' + v_t = v_x\, v + v_t.$$

(2.15) stellt eine nichtlineare, allerdings quasilineare PDG dar.

Das erweiterte Problem $V_t + v\,V_x = 0$ für $V = V(x,t,v)$ führt auf die charakteristischen Differentialgleichungen (Phasendifferentialgleichungen)

$$\frac{d\,x}{d\,t} = v, \quad \frac{d\,v}{d\,t} = 0.$$

Integration und Auflösung nach den Integrationskonstanten ergibt für die allgemeine Lösung von (2.15) die Darstellung $\Phi(v,\, x - v\,t) = 0$, oder – wenn die Auflösbarkeit von Φ nach der ersten Variablen vorausgesetzt wird

$$v = \varphi(x - v\,t). \tag{2.16}$$

(2.16) ist eine *implizite* Gleichung zur Bestimmung der allgemeinen Lösung $v(x,t)$. Die Funktion φ beschreibt zugleich die Anfangsverteilung der Geschwindigkeit: $v(x,0) = \varphi(x)$. Ist diese also vorgegeben *(Anfangswertaufgabe)*, so liegt φ fest und man hat v aus (2.16) zu ermitteln.

a) Betrachten wir den Fall einer affin-linearen Anfangsgeschwindigkeitsverteilung $\varphi(x) = \alpha\, x + v_0$. Nach (2.16) ist dann

$$v(x,t) \;=\; \frac{\alpha\, x + v_0}{1 + \alpha\, t}.$$

Für $\alpha = 0$ ist v konstant. Für $\alpha > 0$ existiert $v(x,t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$. Ferner verschwindet die Geschwindigkeit an jeder festen Stelle x für $t \to \infty$. Der Gasstrom verdünnt sich. Die *Grundcharakteristiken* (Projektionen der Charakteristiken in die (x,t)-Ebene) sind auseinanderlaufende Geraden.

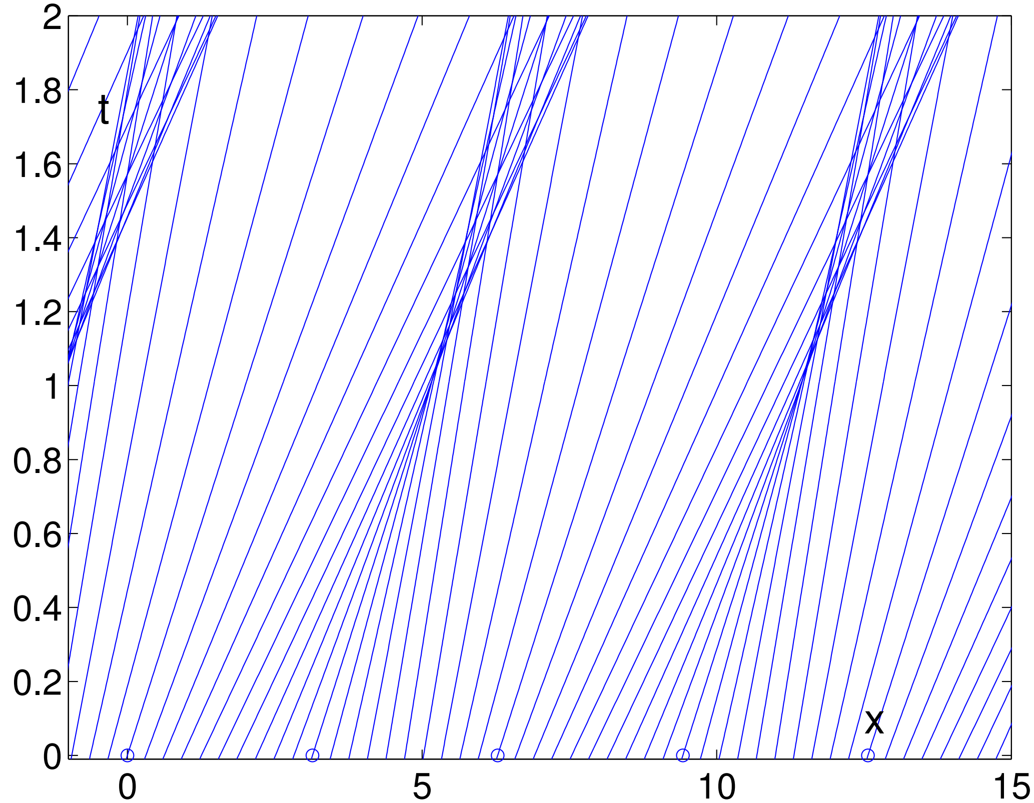
Für $\alpha < 0$ existiert die Lösung jedoch nur bis zum Zeitpunkt $t_\infty = -1/\alpha > 0$. Zu diesem Zeitpunkt „implodiert" der Gasstrom, es tritt ein *Schock* auf. Die Grundcharakteristiken sind Geraden, die sich alle im Punkt $(-v_0/\alpha,\, t_\infty)$ schneiden.

b) Wir untersuchen die Aufgabe nun für die oszillatorische Anfangsgeschwindigkeitsverteilung $v(x,0) = 2 + \sin x$. Nach (2.16) ist die Lösung gegeben durch die implizite Gleichung

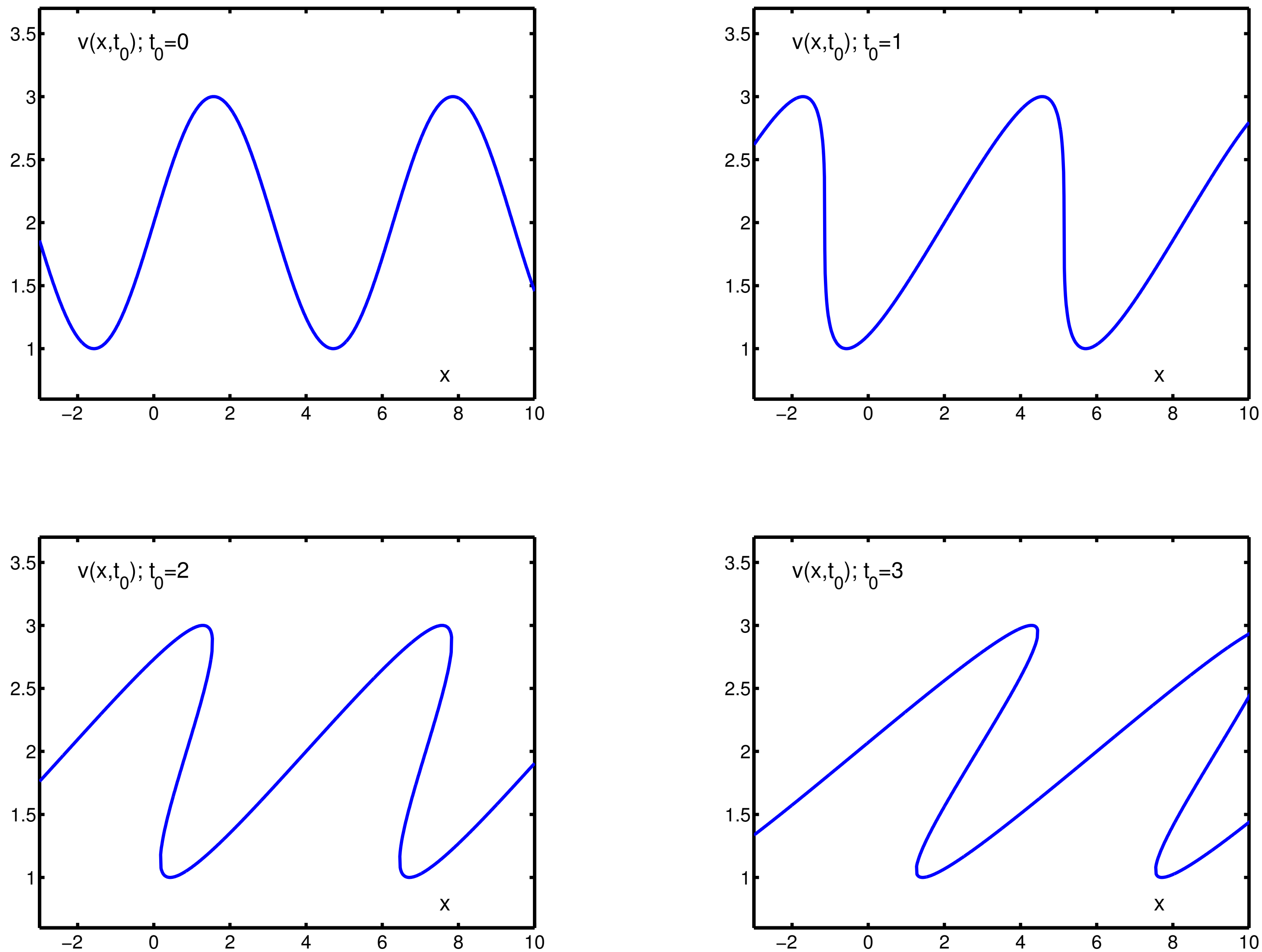
$$v \; = \; 2 + \sin(x - v\,t). \tag{2.17}$$

Diese Relation lässt sich bei vorgebenen (x,t) nur numerisch nach v auflösen, dies jedoch für $t > 1$ nicht mehr eindeutig. Die Grundcharakteristiken sind wiederum Geraden; sie sind gegeben durch $x(t) = (2+\sin x_0)\,t + x_0$. Auch hier schneiden sich die Grundcharakteristiken, wobei die Schnittpunkte für beliebige Zeiten $t > 1$ angenommen werden. Eine klassische Lösung in Form einer *Funktion* $v(x,t)$ existiert also nur für $t \leq 1$.

Trägt man die Lösungen von (2.17) auch für $t > 1$ auf, so ergeben sich die folgenden Darstellungen.



Grundtrajektorien bei der Burgers-Gleichung


v(x,t0); t0=0
x
v(x,t0); t0=1
x
v(x,t0); t0=2
x
v(x,t0); t0=3
x

Cauchysche Anfangswertaufgaben (2.18).

Um aus der Vielfalt der Lösungen einer PDG eine spezielle Lösung zu kennzeichnen, schreibt man, wie im Fall einer gewöhnlichen DGL, Anfangs– oder Randbedingungen vor.

Der Einfachheit halber betrachten wir eine quasilineare PDG erster Ordnung in *zwei* Variablen

$$a_1(x,y,u)\,u_x + a_2(x,y,u)\,u_y \;=\; h(x,y,u). \tag{2.19}$$

Wir suchen eine Lösung $u = u(x,y)$, die durch eine vorgegebene *Anfangskurve* $\mathbf{c}_0(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))^{\mathsf{T}}$, $0 \le s \le 1$, geht, d.h. für die gilt

$$u(x_0(s), y_0(s)) \;=\; u_0(s),\ 0 \le s \le 1. \tag{2.20}$$

Die Grundidee besteht darin, die gesuchte Lösungsfläche durch Charakteristiken aufzubauen. Wir beschreiben zwei Wege.

1. Weg:

Man bestimme die Lösung $(x(t,s), y(t,s), u(t,s))$ der charakteristischen AWA (s ist Parameter!)

$$\begin{aligned}
x'(t,s) &= a_1(x,y,u), \qquad & x(0,s) = x_0(s) \\
y'(t,s) &= a_2(x,y,u), \qquad & y(0,s) = y_0(s) \\
u'(t,s) &= h\,(x,y,u), \qquad & u(0,s) = u_0(s)
\end{aligned}$$

Hat die Abbildung $(t,s) \mapsto (x,y)$ für $t = 0$ und $s \in [0,1]$ eine reguläre Jacobi-Matrix, so ist sie lokal invertierbar. Setzt man nun die Umkehrabbildung in u ein, $u = u(t(x,y), s(x,y))$, so erhält man die lokal eindeutig bestimmte Lösung der Cauchyschen Anfangswertaufgabe.

Beispiel (2.21)

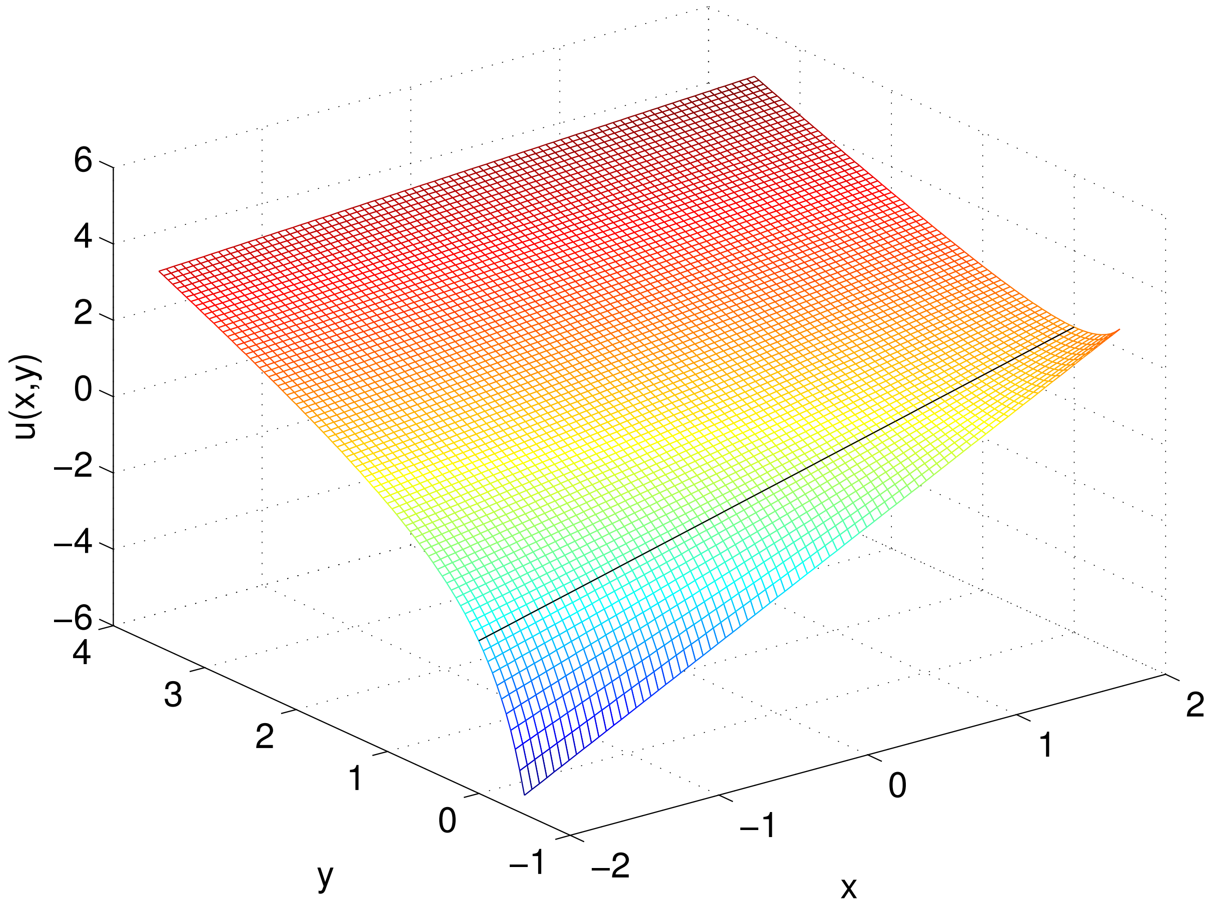
$$\begin{aligned} u\,u_x + u_y &= 2, \\ (x_0(s), y_0(s), u_0(s)) &= (s, 0, s), \quad -2 \le s \le 2. \end{aligned}$$

Die charakteristische AWA lautet

$$\begin{aligned} x' &= u, & x(0,s) &= s \\ y' &= 1, & y(0,s) &= 0 \\ u' &= 2, & u(0,s) &= s. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser AWA lautet $x(t,s) = t^2 + s\,t + s$, $y(t,s) = t$, $u(t,s) = 2\,t + s$. Die Abbildung $(t,s) \mapsto (x,y)$ lässt sich explizit invertieren: $s = (x - y^2)/(y+1)$, $t = y$. Damit ergibt sich die Lösung der Cauchyschen AWA zu

$$u(x,y) = \frac{y^2 + 2\,y + x}{y+1}, \qquad y > -1.$$



Lösung der Cauchyschen AWA

2. Weg:

Man bestimmt zunächst die ersten Integrale, wie in (2.6)

$$C_j = \varphi_j(x, y, u), \quad j = 1, 2. \tag{2.22}$$

Für feste Integrationskonstante C_1, C_2 beschreibt (2.22) eine Charakteristik $(x(t; C_1, C_2), y(t; C_1, C_2), u(t; C_1, C_2))$ mit Kurvenparameter $t \in I \subset \mathbb{R}$. Wir wählen die Integrationskonstanten so, dass diese Charakteristiken jeweils durch den vorgegebenen Kurvenpunkt $\mathbf{c}_0(s)$ gehen, setzen also ein

$$C_j(s) := \varphi_j(x_0(s), y_0(s), u_0(s)), \quad j = 1, 2. \tag{2.23}$$

Durch Elimination von s aus den beiden Gleichungen

$$C_j(s) = \varphi_j(x, y, u), \quad j = 1, 2 \tag{2.24}$$

erhalten wir eine (ev. *implizite*) Darstellung der Lösung $u = u(x, y)$.

Eindeutigkeit liegt vor, falls die obigen Eliminationsprozesse eindeutig durchführbar sind. I. Allg. wird keine Eindeutigkeit vorliegen, falls die vorgegebene Anfangskurve mit einer Charakteristik (2.22) übereinstimmt. Auch darf die Projektion der Anfangskurve auf die (x, y)–Ebenen nicht mit einer Grundcharakteristik übereinstimmen. I.Allg. existiert dann keine Lösung.

Beispiel (2.25)

$$u_x - 2\,u_y = 0.$$

Die Charakteristiken dieser PDG sind gegeben durch

$$C_1 = 2\,x + y, \quad C_2 = u,$$

mithin lautet die allgemeine Lösung $u = \Phi(2\,x + y),\ \Phi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$.

a) $\mathbf{c}_0(s) = (s, 0, s^2)^\top$. Durch Einsetzen findet man $C_1(s) = 2\,s,\ C_2(s) = s^2$. Elimination von s aus $2\,s = 2\,x + y$ und $s^2 = u$ liefert die (eindeutig bestimmte) Lösung $u = (x + y/2)^2$.

b) $\mathbf{c}_0(s) = (s, -2\,s+1, 1)^{\mathsf{T}}$. Die Anfangskurve ist eine Charakteristik. Jede Lösung $u = \Phi(2\,x+y)$, mit $\Phi(1) = 1$ enthält die Anfangskurve.

c) $\mathbf{c}_0(s) = (s, -2\,s+2, s)^{\mathsf{T}}$. Die (x, y)-Projektion der Anfangskurve ist eine Grundcharakteristik, die Anfangskurve jedoch keine Charakteristik. Es gibt keine Lösung der Cauchyschen Anfangswertaufgabe.