Universität Hamburg Fachbereich Mathematik

Differentialgleichungen II

Hans Joachim Oberle

Vorlesung an der TUHH im Sommersemester 2013

http://www.math.uni-hamburg.de/home/oberle/diffgln2-13/Vorlesung/diffgln2-13.html

1. Klassifikation und Beispiele

Definition (1.1)

Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}\right) = \mathbf{0}$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \supset G \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (also $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$) heißt ein *System partieller Differentialgleichungen (PDG)* für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_m(\mathbf{x})$.

Die höchste Ordnung p einer der partiellen Ableitungen

$$\mathbf{u}_{x_1^{p_1} \ldots\, x_n^{p_n}} := \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}}, \quad \text{mit} \quad p = p_1 + \ldots + p_n,$$

die in der PDG explizit auftritt, heißt die *Ordnung* der PDG.

Ein Standardbeispiel für eine PDG erster Ordnung ist die

- *Burgers Gleichung:* $u_t(x,t) + u(x,t)\, u_x(x,t) = 0.$

Standardbeispiele für PDG zweiter Ordnung sind

- *Potentialgleichung:* $\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- *Wellengleichung:* $u_{t\,t}(\mathbf{x},t) = c^2\, \Delta u(\mathbf{x},t), \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ t \geq 0$
- *Wärmeleitungsgleichung:* $u_t(\mathbf{x},t) = k\, \Delta u(\mathbf{x},t)$

In den Anwendungen hat man es häufig mit echten Systemen von PDG zu tun (*Euler-Gleichungen, Navier-Stokes Gleichungen, Maxwell-Gleichungen.*)

Euler Gleichungen für ein strömendes Fluid (1.2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} \quad &+ \frac{\partial q_2}{\partial y} &&+ \frac{\partial q_3}{\partial z} &&= 0\\
\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho} q_1 q_1 + p\right) &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho} q_1 q_2\right) &&+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho} q_1 q_3\right) &&= 0\\
\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho} q_2 q_1\right) &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho} q_2 q_2 + p\right) &&+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho} q_2 q_3\right) &&= 0\\
\frac{\partial q_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho} q_3 q_1\right) &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho} q_3 q_2\right) &&+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho} q_3 q_3 + p\right) &&= 0\\
\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E+p}{\varrho} q_1\right) &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E+p}{\varrho} q_2\right) &&+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E+p}{\varrho} q_3\right) &&= 0
\end{aligned}
$$

$\rho(\mathbf{x}, t)$: Dichte, $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$: Impulsdichte, $E(\mathbf{x}, t)$: Energiedichte,

$p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{\|\mathbf{q}\|^2}{2\rho}\right)$, $\gamma > 1$ (Zustandsgleichung)

Maxwell Gleichungen für ein elektromagnetisches Feld (1.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\varrho, & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$: magnetische Feldstärke, $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$: elektrische Feldstärke, $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) := \mu\mathbf{H}$: magnetische Induktion, $\mathbf{D}(\mathbf{x},t) := \varepsilon\,\mathbf{E}$: dielektrische Verschiebung, $\varrho(\mathbf{x},t)$: Ladungsdichte, $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$: Leitungsstrom, ε : Dielektrizitätskonstante, μ : magnetische Permeabilität, c : Lichtgeschwindigkeit.

Im Lehrbuch findet man eine Herleitung der Maxwell Gleichungen aus der integralen Form (Seiten 135/136) und den Zusammenhang zur 3D-Wellengleichung (Seiten 327/328).

Leonhard Euler (1707 - 1783); Basel, Berlin, St. Petersburg

George Gabriel Stokes (1819 - 1903); Cambridge

James Clerk Maxwell (1831 - 1879); Aberdeen, London, Cambridge

Definition (1.4)

- Eine PDG (1.1) heißt *linear*, falls $F(x, u, \ldots)$ affin-linear ist in allen abhängigen Variablen $u, u_{x_1}, \ldots u_{x_n^p}$.

  Die Koeffizienten dürfen dabei nur von den unabhängigen Variablen $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ abhängen.

- Eine PDG heißt *halblinear*, falls F affin-linear ist in den Ableitungen höchster Ordnung $u_{x_1^p}, \ldots, u_{x_n^p}$ und deren Koeffizienten zudem nur von den unabhängigen Variablen x abhängen.

- Schließlich heißt die PDG (1.1) *quasilinear*, falls F affin-linear in den Ableitungen höchster Ordnung ist, wobei die Koeffizienten aber auch von u und deren Ableitungen niedrigerer Ordnung – d.h. bis zur Ordnung $(p-1)$ – abhängen dürfen.

- In allen anderen Fällen heißt die PDG *nichtlinear*.

Beispiele (1.5) $(m = 1,\, n = 2,\, u = u(x, y))$

a) Eine lineare PDG erster Ordnung in zwei Variablen lautet:

$$a_1(x, y)u_x + a_2\,(x, y)u_y + b\,(x, y)u = h\,(x, y)$$

Eine quasilineare PDG erster Ordnung in x, y lautet:

$$a_1\,(x, y, u)u_x + a_2\,(x, y, u)u_y = h\,(x, y, u)$$

b) Eine lineare PDG zweiter Ordnung in x_1, x_2 lautet:

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_1, x_2)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{2} b_i(x_1, x_2)\, u_{x_i} + c(x_1, x_2)\, u = h\,(x_1, x_2)$$

Schließlich lässt sich eine quasilineare PDG zweiter Ordnung in zwei Variablen folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2})\, u_{x_i x_j} \;=\; h\,(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}).$$

Bemerkungen (1.6).

a) Im Allgemeinen verlangt man, dass die Lösung $u(x_1, x_2)$ einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung auch zweifach stetig differenzierbar ist. Nach dem Satz von Schwarz folgt hieraus $u_{xy} = u_{yx}$, so dass die Matrix $A := (a_{ij})$ in Beispiel (1.5)b) als *symmetrisch* angenommen werden kann.

b) In den Anwendungen wird mit n zumeist die Zahl der *Ortsvariablen* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ eines Problems bezeichnet. Hinzu tritt dann eventuell noch die *Zeit* t. Differentialausdrücke wie etwa

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T, \ \text{div}\,, \ \text{rot}\,, \ \triangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

beziehen sich dann i. Allg. *nur auf die Ortsvariablen*.

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung (1.7).

Wir betrachten einen (glatt berandeten) Körper $D \subset \mathbb{R}^3$. Dieser möge zur Zeit t an der Stelle $\mathbf{x}$ die Temperatur $u(\mathbf{x}, t)$ besitzen.

In einem (ebenfalls glatt berandeten) kleinen Testkörper $D_0 \subset D$ ist dann zur Zeit t eine *Wärmemenge* Q gespeichert, die zur *Massendichte* $\rho(\mathbf{x})$ und zur Temperatur u proportional ist, genauer

$$Q = \int_{D_0} c\,\rho(\mathbf{x})\,u(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} \tag{1.8}$$

mit c : *spezifische Wärme*.

Die zeitliche Änderung der sich in D_0 befindenden Wärmemenge erfolgt durch einen Wärmefluss durch die Oberfläche ∂D_0 des Testkörpers. Dieser ist proportional zur räumlichen Temperaturänderung am Rand des Testkörpers, genauer zur Normalkomponente des Temperaturgradienten. Damit ergibt sich

$$\frac{d}{dt} Q \; = \; \lambda \oint_{\partial D_0} \nabla u(\mathbf{x}, t) \, do \; = \; \lambda \oint_{\partial D_0} \langle \nabla u, \mathbf{n} \rangle \, do. \tag{1.9}$$

Dabei bezeichnet λ die *Wärmeleitfähigkeit*, die für einen hinreichend kleinen Testkörper als konstant angenommen werden kann. Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes ergibt nun

$$\frac{d}{dt} Q \; = \; \lambda \int_{D_0} \operatorname{div} \left(\nabla u(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x} \; = \; \lambda \int_{D_0} \Delta u(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}$$

und zusammen mit (1.8)

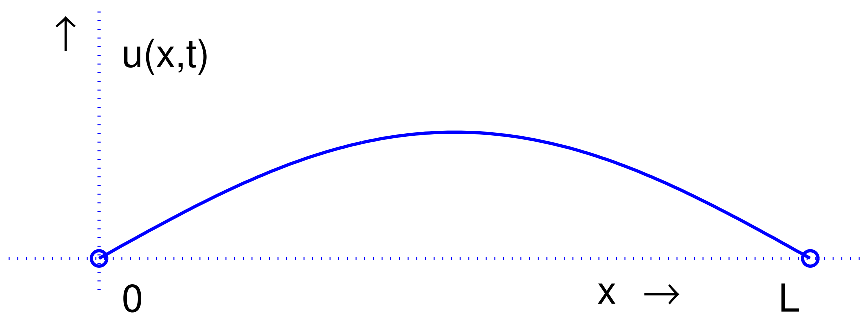
$$\int_{D_0} \left(\lambda \, \Delta u(\mathbf{x}, t) \; - c \, \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) \right) \, d\mathbf{x} \; = \; 0.$$

Der Integrand in dieser Relation wird als stetig angenommen; die Gleichung selbst gilt für *jeden* Testkörper D_0.

Das ist aber nur möglich, wenn der Integrand verschwindet:

$$u_t = k\,\Delta u, \quad k := \frac{\lambda}{c\,\rho} : \textit{Temperaturleitfähigkeit}. \tag{1.10}$$

Herleitung der Wellengleichung (1.11).
Wir leiten die *eindimensionale* Wellengleichung anhand des Schwingungsverhaltens einer eingespannten Saite her.



Es bezeichne q die (kleine) Querschnittsfläche, L die Länge der Saite und $u(x,t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage.

Zu einer *festen* Zeit t wird die Gestalt der Saite durch die Kurve $\mathbf{c}_t(x) := (x, u(x,t))^{\mathsf{T}}$, $0 \le x \le L$, beschrieben. Der Tangenteneinheitsvektor lautet daher

$$\mathbf{T}_t(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x,t)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x,t) \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man ein kleines Teilstück $[x, x + \Delta x]$ der Saite, so wirkt auf dieses die Rückstellkraft

$$\Delta\mathbf{K} = -q\,\sigma\,\mathbf{T}_t(x) + q\,\sigma\,\mathbf{T}_t(x + \Delta x),$$

wobei σ die (räumlich konstante) Spannung der Saite bezeichnet.

Nimmt man an, dass u_x klein ist und gegenüber 1 vernachlässigt werden kann, so ergibt sich in erster Ordnung bzgl. Δx

$$\Delta \mathbf{K} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ q\,\sigma\, u_{x\,x}(x,t)\,\Delta x \end{pmatrix}.$$

Nach Newton ist diese Rückstellkraft gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung dieses Teilstücks, also (nur zweite Komponente)

$$q\,\sigma\, u_{x\,x}(x,t)\,\Delta x = \rho(x)\; u_{t\,t}(x,t)\,\Delta s,$$

wobei ρ die Dichte und Δs die Bogenlänge des Teilstücks bezeichnet, $\Delta s \approx (1 + u_x^2)^{1/2}\,\Delta x$. Nimmt man wieder an, dass u_x klein ist gegen 1, so ergibt sich die folgende *Anfangs– Randwertaufgabe* für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{t\,t}(x,t) &= c^2\, u_{x\,x}(x,t), \quad c := \sqrt{q\,\sigma/\rho}, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Telegraphengleichung (1.13).

Zumeist wird bei der Untersuchung elektrischer Schaltungen der Einfluss der Leitungen nicht weiter berücksichtigt. Beachtet man hingegen, dass auch die Leitungen eine gewisse Kapazität C, eine Induktivität L, einen Ohmschen Widerstand R und schliesslich eine Ohmsche Ableitung G (Verlust durch umvollkommene Isolation) besitzen, so wird man auf das folgende System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für Stromstärke $I(x,t)$ und Spannung $U(x,t)$ geführt

$$\begin{aligned} U_x + L\,I_t + R\,I &= 0, \\ I_x + C\,U_t + G\,U &= 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Diese heißen Leitungs- oder Telegraphengleichungen.

Durch Differentiation der ersten Gleichung nach x und der zweiten Gleichung nach t lässt sich I eliminieren und wir erhalten

$$U_{xx} - LC\,U_{tt} - (RC + LG)\,U_t - RG\,U = 0.$$

Diese Gleichung nach U_{tt} aufgelöst ergibt mit den Konstanten $\alpha := R/L$, $\beta := G/C$ und $c^2 := 1/(LC)$

$$U_{tt} + (\alpha + \beta)\,U_t + \alpha\beta\,U = c^2\,\Delta U. \tag{1.15}$$

Die Ähnlichkeit dieser linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Wellengleichung ist offensichtlich. Man spricht bei (1.15) auch von einer *Wellengleichung mit Dispersion*, d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Wellenlänge sind nicht mehr unabhängig voneinander.

Plattengleichung (1.16).

Durch die folgende partielle Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{1}{K}\,p(x,y) \tag{1.17}$$

werden kleine Durchbiegungen einer dünnen Platte beschrieben. Die Konstante K bezeichnet die *Plattensteifigkeit*, p beschreibt die Dichte der in z-Richtung auf die Platte einwirkenden *Flächenbelastung*. Für eine eingespannte Rechteckplatte hat man dann beispielsweise die *Randbedingungen*

$$\begin{aligned} u(0,y) &= u(a,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0, \\ u_x(0,y) &= u_x(a,y) = u_y(x,0) = u_y(x,b) = 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$