7. Lineare DGLen höherer Ordnung

A. Allgemeines.

Wir betrachten eine skalare, lineare DGL n–ter Ordnung:

$$L\,[y] \;:=\; y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)\,y(t) \;=\; b(t). \tag{7.1}$$

Wir sagen:
$$L \;:=\; \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\,\frac{d^k}{dt^k}\,, \qquad a_n \;\equiv\; 1\,, \tag{7.2}$$

ist ein **linearer Differentialoperator der Ordnung n**.

Die $a_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, seien stetige Funktionen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

Vermöge der Definition $y_k(t) := y^{(k-1)}(t), k = 1, \ldots, n,$ lässt sich die DGL (7.1) in ein äquivalentes DGL-System erster Ordnung transformieren. Man erhält

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} . \tag{7.3}
$$

Die Matrix in (7.3) wird auch **Begleitmatrix** genannt. Damit lassen sich die Ergebnisse aus Abschnitt 6 auf den Fall einer skalaren, linearen DGL n–ter Ordnung übertragen. An einigen Stellen ergeben sich Besonderheiten, die auf die spezielle Struktur der Begleitmatrix zurück zu führen sind.

Nachfolgend geben wir die wesentlichen Resultate für lineare DGLn n–ter Ordnung an.

B. Die homogene DGL.

Ein Funktionensystem $(y_1, \ldots, y_n)$, $y_k \in C^n(\mathbb{R})$, heißt ein **Fundamentalsystem** der DGL $L[y] = b$, falls die folgenden Eigenschaften gelten:

a) y_k löst die homogene DGL, $L[y_k] = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

b) Die **Wronski–Determinante** verschwindet nicht

$$w(t) := \det \begin{pmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{7.4}$$

Nach (6.10) genügt $w(t)$ der DGL $w'(t) = -a_{n-1}(t) \cdot w(t)$ und besitzt daher die Darstellung

$$w(t) = w(t_0) \cdot \exp\left(- \int_{t_0}^{t} a_{n-1}(\tau)\, d\tau \right). \tag{7.5}$$

Ist also $w(t)$ an einer Stelle t_0 von Null verschieden, so verschwindet $w(t)$ nirgends. Die Bedingung (7.4) braucht also nur an einer Stelle t_0 überprüft zu werden.

Ein Fundamentalsystem $(y_1, \ldots, y_n)$ lässt sich durch Lösung von n AWAen gewinnen:

$$\begin{aligned} L[y_k] &= 0, && (k = 1, \ldots, n) \\ y_k^{(i)}(t_0) &= \begin{cases} 0, & i \neq k-1 \\ 1, & i = k-1 \end{cases} && (i = 0, 1, \ldots, n-1)\,. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Satz: Ist $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Fundamentalsystem, so lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL (7.1):

$$y(t) \;=\; y_p(t) + \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_k(t), \qquad C_k \in \mathbb{R}. \tag{7.7}$$

Dabei ist $y_p(t)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Beispiel (7.8)

Gegeben sei die homogene DGL $y''(t) - \frac{1}{t}\, y'(t) - \frac{3}{t^2}\, y(t) = 0$, $t > 0$.

Man stellt fest, dass $y_1(t) = t^3$ und $y_2(t) = 1/t$ Lösungen dieser DGL sind (Ansatz: $y = t^\alpha$). Wegen

$$w(t) \;=\; \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (t > 0)$$

ist $(y_1,\, y_2)$ auch ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung der DGL lautet somit $y(t) = C_1\, t^3 + C_2\, (1/t)$.

Das Reduktionsverfahren.

Wir beschreiben das Verfahren wiederum nur für den Fall einer linearen DGL zweiter Ordnung. Sei $u \neq 0$ eine Lösung der homogenen DGL

$$L\,[y] \;=\; y''(t) + a_1(t)\,y'(t) + a_0(t)\,y(t) \;=\; 0.$$

Zur Bestimmung einer weiteren, linear unabhängigen Lösungen verwenden wir den **Produktansatz**

$$y(t) \quad := \quad u(t) \cdot z(t)\,. \tag{7.9}$$

Differentiation ergibt:

$$y \;=\; u\,z, \quad y' \;=\; u'\,z + u\,z', \quad y'' \;=\; u''\,z + 2\,u'\,z' + u\,z''.$$

Dieser Ausdruck wird nun in $L\,[y] = y'' + a_1\,y' + a_0\,y$ eingesetzt.

Man erhält:

$$
\begin{aligned}
L\,[y] \;&=\; [u'' + a_1\,u' + a_0\,u]\,z \;+\; (2\,u' + a_1\,u)\,z' \;+\; u\,z'' \\
&=:\; 0\,z \;+\; b_0\,z' \;+\; b_1\,z'', \qquad\qquad b_1 \neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Setzt man nun $w := z'$, so wird aus $L\,[y] = 0$: $\quad b_1\,w' + b_0\,w = 0$.
Dies ist eine homogene DGL erster Ordnung, deren Lösungen sich durch Trennung der Variablen bestimmen lässt. Mit einer beliebigen Lösung $w \neq 0$ erhält man mit

$$
z(t) \quad := \quad \int\limits_{t_0}^{t} w(\tau)\,d\tau
$$

das Fundamentalsystem $(u, z\,u)$ der Ausgangsgleichung $L\,[y] = 0$.

Beispiel (7.10)

Die DGL $y'' + t\,y' + y \;=\; 0$ besitzt die Lösung $u(t) \;=\; \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

Mit dem Produktansatz (7.9) finden wir

$$y \;=\; u\,z, \quad y' \;=\; u'\,z \;+\; u\,z', \quad y'' \;=\; u''\,z \;+\; 2\,u'\,z' \;+\; u\,z''\,.$$

Dies in die Differentialgleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned}
& y'' + t\,y' + y \;=\; (u'' + t\,u' + u)\,z + (2\,u' + t\,u)\,z' + u\,z'' \;=\; 0 \\
\Rightarrow\quad & u\,w' + (2\,u' + t\,u)\,w \;=\; 0, \qquad w \;=\; z' \\
\Rightarrow\quad & (w' - t\,w)\,\mathrm{e}^{-t^2/2} \;=\; 0 \\
\Rightarrow\quad & w \;=\; \mathrm{e}^{t^2/2}, \qquad z \;=\; \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\tau^2/2}\,d\tau\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir das folgende Fundamentalsystem der DGL

$$y_1(t) \;=\; \mathrm{e}^{-t^2/2}, \quad y_2(t) \;=\; \mathrm{e}^{-t^2/2} \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\tau^2/2}\,d\tau\,.$$

C. Die inhomogene DGL.

Zur Konstruktion einer partikulären Lösung der DGL (7.1) verwenden wir die **Methode der Variation der Konstanten**. Dazu sei $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Fundamentalsystem.

Ansatz:

$$y_p(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, y_i(t)\,. \tag{7.11}$$

Für die unbekannten Funktionen $C_i(t)$ fordern wir:

$$\begin{array}{lcccl} C_1'(t)\, y_1(t) & + \;\ldots\; + & C_n'(t)\, y_n(t) & = & 0 \\ C_1'(t)\, y_1'(t) & + \;\ldots\; + & C_n'(t)\, y_n'(t) & = & 0 \\ \quad\vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_1'(t)\, y_1^{(n-2)}(t) & + \;\ldots\; + & C_n'(t)\, y_n^{(n-2)}(t) & = & 0\,. \end{array} \tag{7.12}$$

Damit folgt:

$$y^{(k)}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, y_i^{(k)}(t), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$y^{(n)}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, y_i^{(n-1)}(t) \;+\; \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, y_i^{(n)}(t)\,,$$

und somit

$$\begin{aligned} L\,[y] &= \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y^{(k)}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_i^{(k)}(t) \right)}_{=\;0} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, y^{(n-1)}(t) \\ &= b(t)\,. \end{aligned}$$

Zusammen mit (7.12) hat man somit das folgende lineare Gleichungssystem für die $C_i' = C_i'(t)\,,\, i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)}(t) & \ldots & y_n^{(0)}(t) \\ y_1^{(1)}(t) & \ldots & y_n^{(1)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ \vdots \\ C_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} . \qquad (7.13)$$

Die Koeffizientenmatrix ist regulär, vgl. (7.4). Somit ist das Gleichungssystem (7.13) eindeutig lösbar.

Durch Integration der Lösung erhält man schließlich die $C_1, \ldots, C_n$. Man beachte, dass es hierbei genügt, eine beliebige Stammfunktion der C_i' zu bestimmen. Mit (7.11) hat man dann eine partikuläre Lösung gefunden.

Beispiel (7.14) $$y'' - 2\,y' + y = \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}$$

Ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen DGL ist gegeben durch $y_1(t) = \mathrm{e}^t$, $y_2(t) = t\mathrm{e}^t$. (Wir man hierauf kommt, wird in Abschnitt D erläutert.)

Für die inhomogene Differentialgleichung liefert die *Variation der Konstanten* das lineare Gleichungssystem (7.12):

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\,\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t & (1+t)\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t/t^2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung hiervon ergibt $C_1' = -1/t$, $C_2' = 1/t^2$, und daher (eine Stammfunktion genügt) $C_1 = -\ln|t|$ und $C_2 = -1/t$.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL lautet damit

$$y_p(t) = -(\ln|t| + 1)\,\mathrm{e}^t\,.$$

D. Systeme mit konstanten Koeffizienten.

i) Die homogene DGL.

Wir betrachten die homogene, lineare DGL

$$L\,[y] \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)}(t) \;=\; 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_n = 1$.

Mit dem **Ansatz** $y(t) := \mathrm{e}^{\lambda t}$ folgt

$$L[y] \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, \lambda^k \right) \mathrm{e}^{\lambda t} \;=\; 0.$$

Der Ansatz liefert also eine Lösung der homogenen DGL, wenn λ eine Nullstelle der **charakteristischen Gleichung** ist:

$$p(\lambda) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, \lambda^k \;=\; 0\,. \tag{7.15}$$

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die (paarweise verschiedenen) Nullstellen der charakteristischen Gleichung, so gilt der folgende Satz:

Satz (7.16)

a) Ist λ_k eine r_k–fache *reelle* Wurzel, so hat man die folgenden Lösungen der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} y_{k,1}(t) &:= \mathrm{e}^{\lambda_k t}, \quad y_{k,2}(t) := t \cdot \mathrm{e}^{\lambda_k t}, \quad \ldots \\ y_{k,r_k}(t) &:= t^{r_k - 1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_k t}\,. \end{aligned}$$

b) Ist λ_k eine r_k–fache *komplexe* Wurzel, $\lambda_k \notin \mathbb{R}$, so ist auch $\overline{\lambda}_k = \lambda_\ell$ eine weitere r_k–fache Wurzel. Reelle Lösungen sind dann:

$$\begin{aligned} y_{k,j}(t) &= t^{j-1}\,\mathrm{e}^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t), && j = 1, \ldots, r_k, \\ y_{\ell,j}(t) &= t^{j-1}\,\mathrm{e}^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t), && \lambda_k =: \alpha_k + i\beta_k\,. \end{aligned}$$

c) Die gemäß a) und b) konstruierten Lösungen bilden ein Fundamentalsystem der DGL $L\,[y] = 0$.

Man beachte, dass hier – im Gegensatz zu DGL-System erster Ordnung – lediglich die Eigenwerte und deren algebraische Vielfachheiten benötigt werden (keine Eigenvektoren).

Beispiel (7.17) $$y'' - 2\,y' + y = 0$$

Die charakteristische Gleichung $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = 0$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 1$.

Ein Fundamentalsystem lautet daher $y_1(t) = \mathrm{e}^t$, $y_2(t) = t\,\mathrm{e}^t$, vgl. (7.13).

Beispiel (7.18) $$y^{(4)} + 2\,y'' + y = 0$$

Die charakteristische Gleichung $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\,\lambda^2 + 1 = 0$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$.

Ein Fundamentalsystem lautet daher

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos t, \quad & y_3(t) &= t \cdot \cos t \\ y_2(t) &= \sin t, \quad & y_4(t) &= t \cdot \sin t\,. \end{aligned}$$

ii) Die inhomogene DGL., Grundlösungsverfahren.

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung einer inhomogenen Gleichung lässt sich (neben der Variation der Konstanten) im Fall konstanter Koeffizienten das folgende **Grundlösungsverfahren** oder die **Methode der Greenschen Funktion** anwenden.

Satz (7.19)

Sei w die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe

$$L[w] = 0, \qquad w^{(k)}(t_0) = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \ldots, n-2 \\ 1, & k = n-1 \end{cases} \quad .$$

Dann ist eine partikuläre Lösung y_p gegeben durch

$$y_p(t) := \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)\, b(\tau)\, d\tau, \quad G(t,\tau) := w(t-\tau+t_0)\,.$$

$G(t,\tau)$ heißt **Greensche Funktion** der DGL.

Beispiel (7.20) $$y'' - 2\,y' + y = \frac{e^t}{t^2}\ ,$$

vgl. auch (7.14) und (7.17). Zur Anwendung des Grundlösungsverfahrens hat man die folgende homogene AWA zu lösen:

$$L[w] = 0, \qquad w(1) = 0, \qquad w'(1) = 1\,.$$

Mit (7.16) findet man $w(t) = (t-1)\,\mathrm{e}^{t-1}$. Damit folgt für die Greensche Funktion:

$$G(t,\tau) \;=\; w(t-\tau+1) \;=\; (t-\tau)\,\mathrm{e}^{t-\tau}$$

und somit für eine partikuläre Lösung

$$y_p(t) \;=\; \int_1^t \mathrm{e}^{t-\tau}\,(t-\tau)\,\frac{\mathrm{e}^{\tau}}{\tau^2}\,d\tau \;=\; \mathrm{e}^{t}\,(-1+t-\ln|t|)\,.$$

iii) Spezielle Inhomogenitäten.

Hat die Inhomogenität b eine spezielle Form, so lässt sich eine partikuläre Lösung y_p mitunter durch einen geeigneten **Ansatz** finden.

Hat die Inhomogenität die Form $b(t) = \left(\sum_{j=0}^{m} \beta_j \, t^j \right) \mathrm{e}^{\mu t}$, so lässt sich der folgende Ansatz verwenden:

a) Falls μ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p ist:

$$y_p(t) \quad = \quad \left(\sum_{j=0}^{m} \gamma_j \, t^j \right) \mathrm{e}^{\mu t} , \qquad \gamma_j : \ \text{Parameter} ; \tag{7.21}$$

b) Falls μ eine $r-$fache Nullstelle von p ist:

$$y_p(t) \quad = \quad \left(\sum_{j=0}^{m} \gamma_j \, t^j \right) t^r \, \mathrm{e}^{\mu t} . \tag{7.22}$$

Beispiel (7.23) $\qquad y'' - y \quad = \quad t \, \mathrm{e}^t \quad ,$

Man findet: $\mu = 1$ ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$.

Wir verwenden daher den Ansatz: $y_p(t) = (\gamma_0 + \gamma_1 t)\, t\, \mathrm{e}^t$.
Setzt man diesen in die Differentialgleichung ein, so folgt:

$$\gamma_1 = -\gamma_0 = \frac{1}{4}, \quad \text{also:} \quad y_p(t) = \frac{t}{4}(t-1)\,\mathrm{e}^t .$$

Das Superpositionsprinzip (7.24).

Gegeben sei eine inhomogene lineare DGL der Form

$$L[y] = b(t) = b_1(t) + b_2(t) .$$

Sind y_1 bzw. y_2 partikuläre Lösungen der DGLen $L[y] = b_1$ bzw. $L[y] = b_2$, so ist $y_p(t) := y_1(t) + y_2(t)$ eine partikuläre Lösung von $L[y] = b$.

Komplexe Differentialgleichungen (7.25).

Ist b Real– oder Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion, also $b(t) = \mathrm{Re}\,(c(t))$ bzw. $b(t) = \mathrm{Im}\,(c(t))$, und ist z eine (komplexe) Lösung der DGL $L[z] = c$, so ist $x := \mathrm{Re}\, z$ bzw. $y := \mathrm{Im}\, z$ eine (reelle) Lösung der DGL $L[x] = b$ bzw. $L[y] = b$.

Beispiel (7.26) $\quad y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \sin(2t))$.

Wir wenden das Superpositionsprinzip an und lösen zunächst:

a) $\quad y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-t}\cos t = \mathrm{Re}\,\left\{\mathrm{e}^{(-1+i)t}\right\}.$

$\mu = -1+i$ löst nicht die charakteristische Gleichung $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$; daher verwenden wir den Ansatz $z_p(t) = C_0\mathrm{e}^{(-1+i)t}$. Diesen in die DGL $z'' + 2z' + 5z = \mathrm{e}^{(-1+i)t}$ eingesetzt, liefert $C_0 = 1/3$. Man hat also

$$z_p(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{(-1+i)t}, \qquad y_{p1}(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}\cos t\,.$$

b) $$y'' + 2y' + 5y \;=\; \mathrm{e}^{-t}\sin(2t) \;=\; \mathrm{Im}\,\left\{\mathrm{e}^{(-1+2i)t}\right\}.$$

$\mu = -1+2i$ ist eine einfache Nullstelle von $p(\lambda)$; wir verwenden daher den Ansatz $z_p = C_0\, t\,\mathrm{e}^{(-1+2i)t}$. Diesen in die komplexe Differentialgleichung $z''+2z'+5z = \mathrm{e}^{(-1+2i)t}$ eingesetzt, liefert: $C_0 = -\,i/4$, also $z_p = -\,i/4\;t\,\mathrm{e}^{(-1+2i)t}$.

Damit lautet eine partikuläre Lösung der zweiten DGL

$$y_{p2}(t) \;=\; -\frac{t}{4}\,\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)\,.$$

Das Superpositionsprinzip liefert nun die folgende partikuläre Lösung für die Ausgangs-DGL

$$y_p(t) \quad=\quad \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{4}\,t\,\cos(2t)\right)\,.$$