3. Ebene Systeme und DGL zweiter Ordnung

A. Ebene autonome DGL-Systeme.

Ein explizites DGL-System erster Ordung, $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$, heißt bekanntlich **autonom**, falls $\mathbf{f}$ von der Zeit t nicht explizit abhängt, also $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ mit einer stetigen Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ (Vektorfeld) gilt.

Im Fall $n = 2$ lautet die zugehörige autonome AWA

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y), \qquad x(0) = x_0 \\ y' &= g(x, y), \qquad y(0) = y_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Im Folgenden nehmen wir o.E.d.A. an, dass $f(x_0, y_0) \neq 0$ gilt. Ist $g(x_0, y_0) \neq 0$, so kann man die Rollen von x und y vertauschen. Ist $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, so heißt (x_0, y_0) ein **Gleichgewichtspunkt**, solche Punkte werden wir später untersuchen.

Die Funktion $x = x(t)$ ist dann lokal bei $t = 0$ streng monoton und damit umkehrbar. Setzt man $Y(x) := y(t(x))$, so genügt Y der so genannten **Phasen-DGL**

$$\mathbf{f(x, Y)\, Y'(x) \; - \; g(x, Y) \;\; = \;\; 0.} \tag{3.2}$$

Diese Differentialgleichung ist gerade vom Typ (2.22). Durch sie wird die *Gestalt* der Kurve $(x(t), y(t))$ beschrieben, jedoch nicht ihre zeitliche Durchlaufung.

Beispiel (3.3) (Schwingungsgleichung)

$$x''(t) = -\omega^2 x(t), \qquad \omega > 0,$$

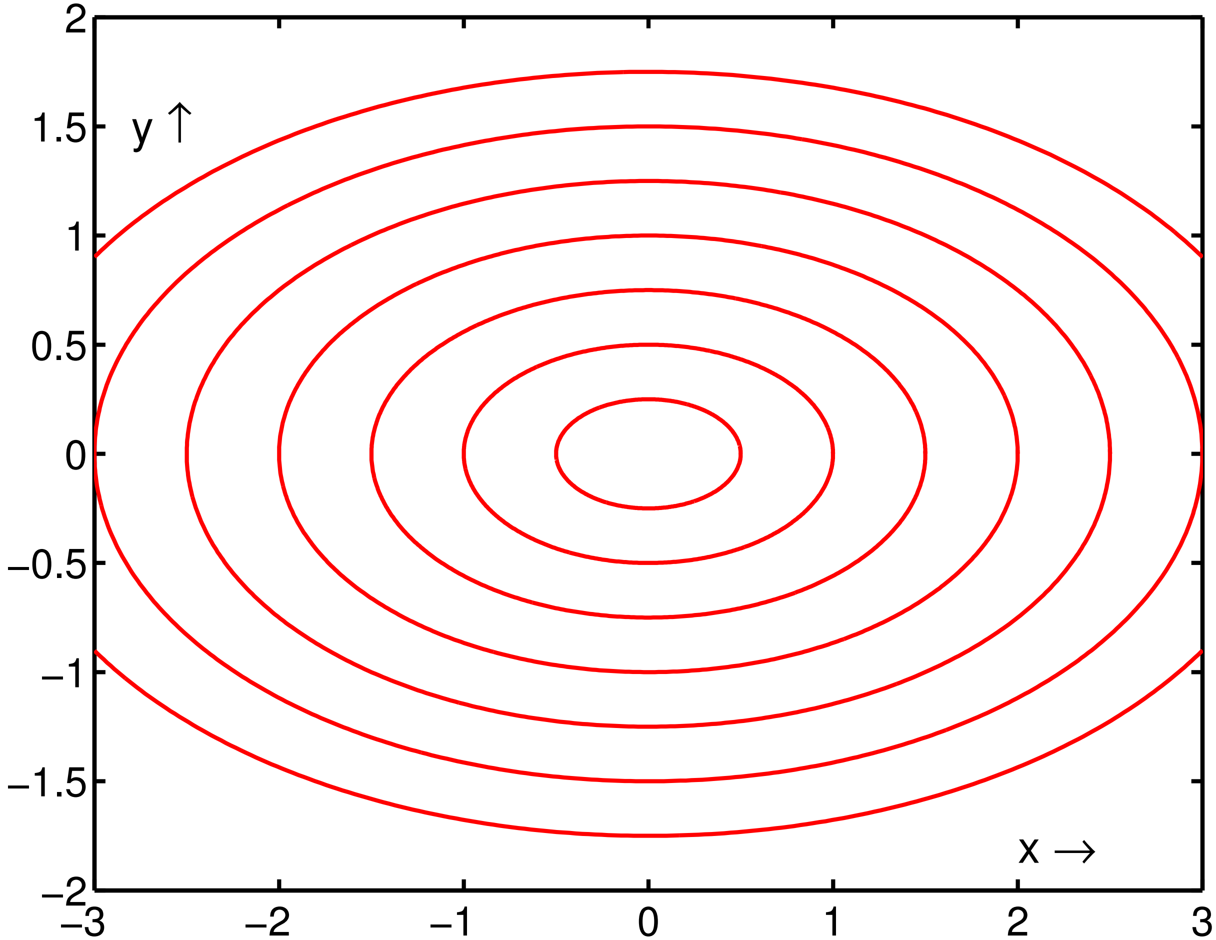
ist eine lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Mit Hilfe der Standardtransformation $y(t) := x'(t)$ lässt sich diese in ein äquivalentes System erster Ordnung transformieren:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), & x(0) &= x_0 \\ y'(t) &= -\omega^2 x(t), & y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Die zugehörige Phasen-DGL $Y(x)\, Y'(x) = -\omega^2 x$ besitzt die Lösung

$$Y^2 + \omega^2 x^2 = y_0^2 + \omega^2 x_0^2$$

Die Phasenkurven sind also Ellipsen, bei denen die Halbachsen a und b im festen Verhältnise $a : b = 1 : \omega$ stehen.



Phasenkurven zur DGL aus Beispiel 3.3.

B. Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die Technik aus Beispiel (3.3) lässt sich auf autonome DGL zweiter Ordnung anwenden

$$x''(t) \;=\; f(x, x')\,. \tag{3.4}$$

Vermöge $y(t) := x'(t)$ wird (3.4) in ein System erster Ordnung transformiert

$$x' \;=\; y, \quad y' \;=\; f(x, y).$$

Für dieses lautet die Phasen-DGL $Y(x)\,Y'(x) \;=\; f(x, Y(x))$. Kann man hieraus $Y(x)$ bestimmen, so lässt sich $t = t(x)$ durch eine Quadratur ermitteln

$$\frac{d\,t}{d\,x} = \frac{1}{Y(x)} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{d\,x}{Y(x)}.$$

Schließlich erhält man dann durch Bildung der Umkehrfunktion $x = x(t)$ und damit auch $y(t) = Y(x(t))$.

Spezialfall 1: $\quad \mathbf{x''(t) \; = \; f(t, x'(t)).} \qquad (3.5)$

Mit der Definition $y(t) := x'(t)$ erhält man das System erster Ordung

$$x' = y, \quad y' = f(t, y).$$

Dieses System ist nun aber glücklicherweise *entkoppelt*, d.h. wir können die zweite DGL unabhängig von x lösen und danach die erste DGL durch eine Quadratur.

Beispiel (3.6) $\quad \mathbf{y''(x) \; = \; k\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$

Die obige DGL beschreibt die Gestalt einer hängenden Kette ($k > 0$ konstanter Parameter). Mit $z(x) := y'(x)$ ergibt sich das entkoppelte System

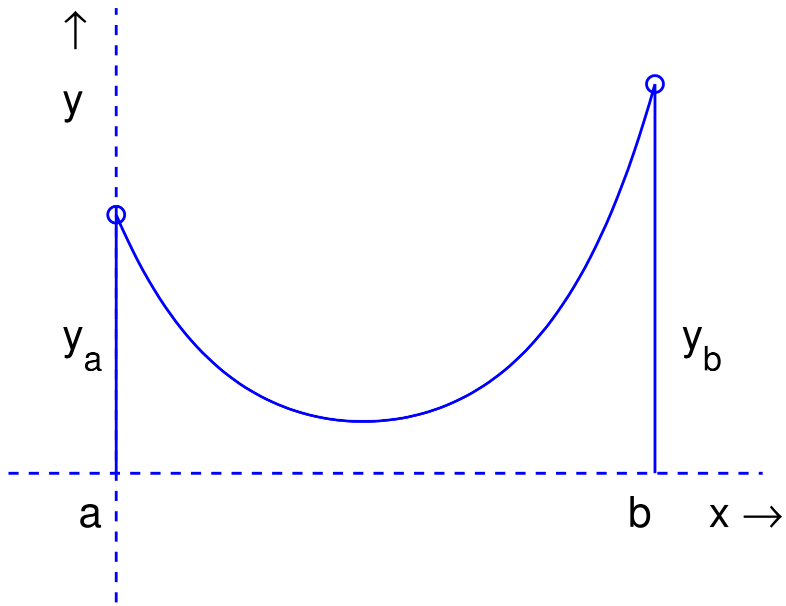
$$y' = z, \quad z' = k\sqrt{1 + z^2}.$$

Die zweite Gleichung lässt sich mit Variablentrennung lösen:

$z(x) = \text{sinh}(kx + C_1)$. Hieraus liefert die erste Gleichung per Quadratur die so genannte **Kettenlinie**

$$y(x) \;=\; \frac{1}{k}\,\text{cosh}(kx + C_1) + C_2.$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 werden durch die beiden Randbedingungen $y(a) = y_a$ und $y(b) = y_b$ (Aufhängung der Kette) festgelegt.



Kette vor dem Palast von El Escorial.

Spezialfall 2: $$\mathbf{x''(t) \;=\; f(x(t)).} \tag{3.7}$$

Wir multiplizieren die DGL mit $x'(t)$ und integrieren anschließend:

$$\begin{aligned} x'\; x'' \quad &= \quad f(x)\, x' \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,(x')^2 \quad &= \quad \int f(x)\, dx \quad =: \quad F(x) \,+\, C_1 \\ \Rightarrow \quad x' \quad &= \quad \pm\sqrt{2\,(F(x) \,+\, C_1)}. \end{aligned}$$

Wir nehmen wiederum an, dass x auf einem gewissen Intervall invertierbar ist, genauer $x' \neq 0$, und erhalten

$$\frac{dt}{dx} \;=\; \pm\frac{1}{\sqrt{2\,(F(x) \,+\, C_1)}} \quad \Rightarrow \quad t(x) \;=\; \pm\int \frac{dx}{\sqrt{2\,(F(x) \,+\, C_1)}}.$$

Die Durchführung dieser Integration und die Invertierung der resultierenden Beziehung, d.h. die Auflösung nach x, liefert sodann die Lösung der Differentialgleichung (3.7).

Beispiel (3.8) Fluchtgeschwindigkeit einer Rakete

Die Bewegung einer (antriebslosen) Rakete außerhalb der Erdatmosphäre ist durch das Gravitationsgesetz bestimmt. Vernachlässigt man den Einfluss anderer Himmelskörper, und nimmt man eine geradlinige, eindimensionale Bewegung an, so gilt für den Abstand Erde – Rakete die AWA

$$\mathbf{r''(t) \;=\; -\,\gamma\,M_E \cdot \frac{1}{r(t)^2}, \quad r(0) \;=\; r_0, \quad r'(0) \;=\; v_0.}$$

Dabei ist γ die Gravitationskonstante ($\gamma \doteq 6.67 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm}^2\mathrm{kg}^{-2}$) und M_E die Masse der Erde ($M_E \;\doteq\; 5.95 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$) .

Wir bestimmen die kleinste Anfangsgeschwindigkeit v_0, die die Rakete besitzen muss, um den Anziehungsbereich der Erde verlassen zu können, die so genannte **Fluchtgeschwindigkeit**.

Dazu multipliziert wir die Differentialgleichung mit $r'(t)$ und integrieren:

$$r''(t)\, r'(t) \;=\; -\,\gamma\, M_E\, \frac{r'(t)}{r(t)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad r'(t)^2 \;=\; \frac{2\,\gamma\, M_E}{r(t)} + C, \quad C \;=\; \text{const.}$$

Hierin setzen wir die Anfangswerte $r(0) = r_0$ und $r'(0) = v_0$ ein, und finden:

$$r'(t)^2 \;=\; 2\,\gamma\, M_E \left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{r_0} \right) + v_0^2.$$

Die gesuchte Fluchtgeschwindigkeit v_0 ist nun die kleinste Anfangsgeschwindigkeit, für die $r'(t)$ stets positiv bleibt. Damit folgt $v_0 = \sqrt{2\,\gamma\, M_E/r_0}$.

Setzt man für r_0 den Erdradius ($r_0 \doteq 6.36 \cdot 10^6\,\text{m}$) ein, so erhält man $v_0 \approx 11.2$ km/s.