2. Elementare Lösungsmethoden

A. Separierbare Differentialgleichungen.

Eine DGL der Form

$$y'(t) \;=\; f(t)\cdot g(y(t)) \tag{2.1}$$

mit stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \supset D_f \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \supset D_g \to \mathbb{R}$ heißt **separierbar**.

Ist $g(y(t)) \neq 0$, $t \in I \subset D_f$, so kann man durchdividieren:

$$y'(t)/g(y(t)) = f(t) \quad \textbf{(Trennung der Variablen)}.$$

Integration ergibt für $(t_0, y_0) \in I \times D_g$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{g(y(\tau))}\,\mathrm{d}\tau \;=\; \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} \;=\; \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ist $H = H(y)$ eine Stammfunktion zu $1/g$, so folgt

$$H(y(t)) - H(y_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{2.2}$$

Aufgrund der Voraussetzung $g(y_0) \neq 0$ ist $H(y)$ in einem Intervall um y_0 streng monoton und damit invertierbar. Die Gleichung (2.2) lässt sich daher nach $y(t)$ auflösen.

Auf diese Weise erhält man alle Lösungen y für die $g(y(t)) \neq 0$ gilt!

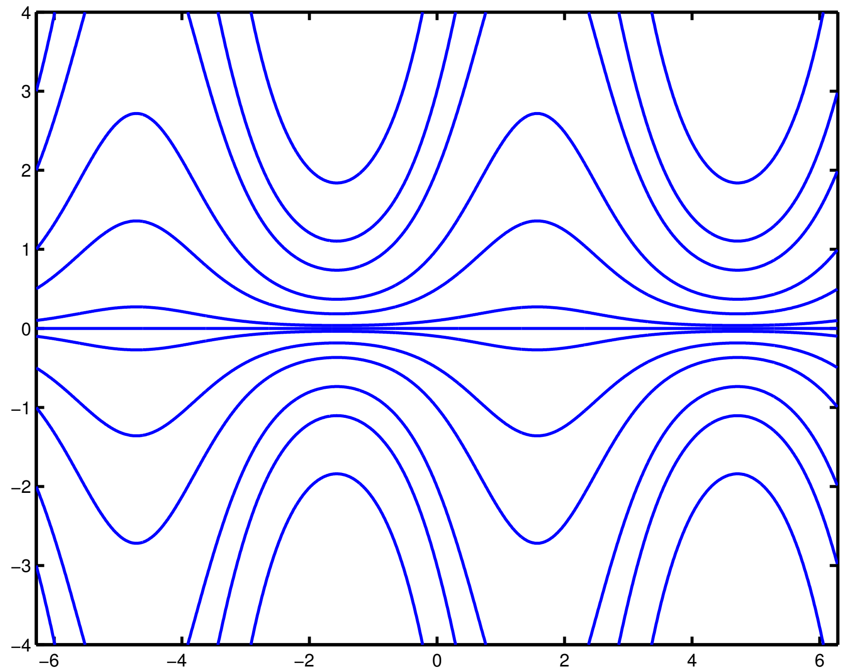
Ist dagegen $g(y_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $y(t) := y_0$ eine Lösung der Differentialgleichung; wir nennen sie eine **singuläre Lösung** der DGL (2.1).

Beispiel (2.3) $y' \;=\; y \cdot \cos t, \quad y \neq 0.$

Trennung der Variablen liefert $y^{-1}\, y' \;=\; \cos t.$
Integration (mit $t_0 = 0$, $y_0 \neq 0$) ergibt die Lösungsschar

$$y(t) \;=\; C\, \mathrm{e}^{\sin t}, \qquad C \;=\; y_0 \;\neq\; 0.$$

Daneben gibt es noch die singuläre Lösung $y_{\text{sing}} = 0.$



Beispiel (2.4) $y' = -t/y, \quad y \neq 0.$

Trennung der Variablen ergibt $y\,y' = -t$. Integration ergibt

$$y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 =: r^2,$$

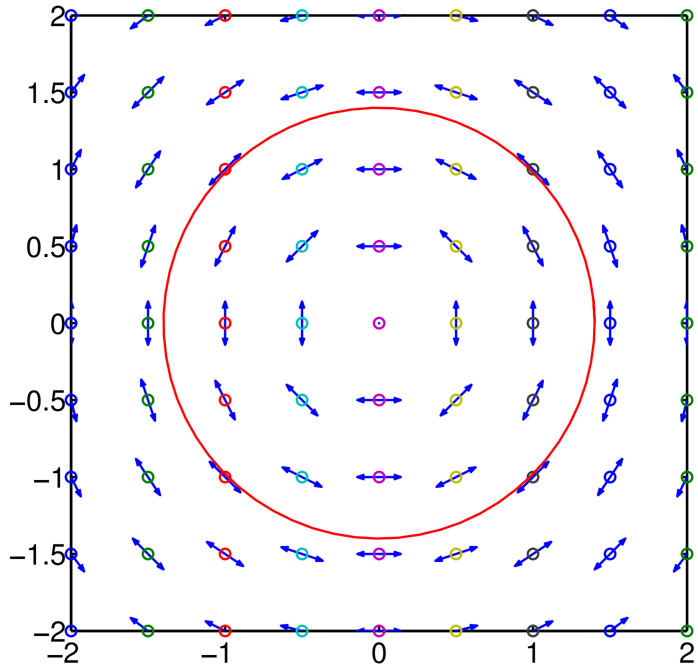
d.h. die Lösungen sind Ursprungskreise.

Die Punkte auf der x–Achse gehören nicht zu den Lösungen der DGL! Dort ist ja die rechte Seite nicht definiert, bzw. $y' = \pm\infty$. Jeder Kreis besteht also aus *zwei* Lösungen, nämlich die mit $y > 0$ und die mit $y < 0$.

Wir stellen zugleich fest, dass die Lösungen der DGL (anders als im ersten Beispiel) nur auf *beschränkten, offenen Intervallen* definiert sind.

Richtungsfelder.

Über die Lösungen eine skalaren DGL kann man sich durch Skizzierung des Richtungsfeldes (t, y, y') auf einem geeigneten Gitter in der (t, y)–Ebene einen qualitativen Einblick verschaffen.



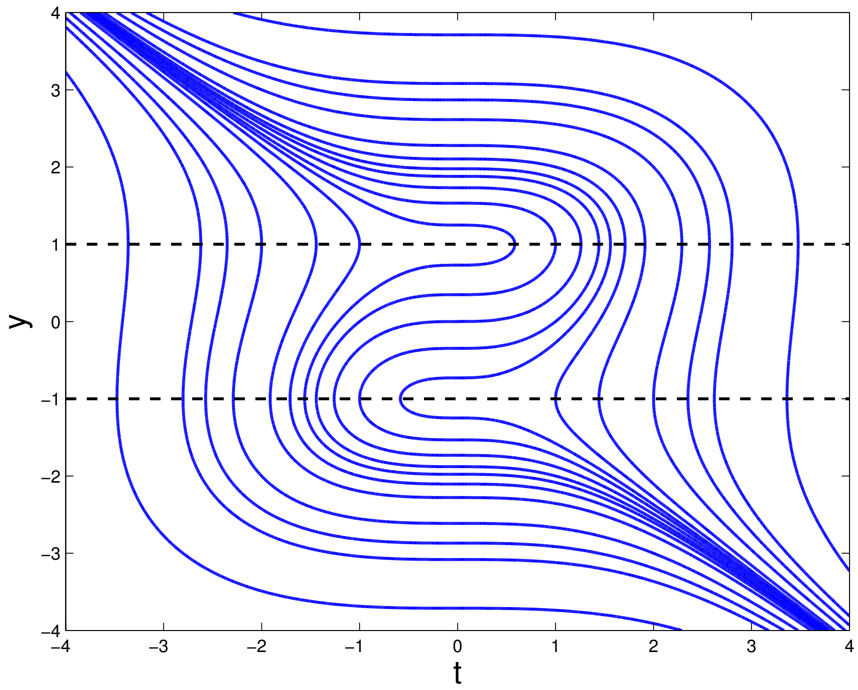
Richtungsfeld der DGL $y' = -t/y$.

Beispiel (2.5) $y' = t^2/(1-y^2), \quad |y| \neq 1.$

Trennung der Variablen ergibt: $(1-y^2)\, y' = t^2.$

Integration (mit $t_0 = 0$, $y_0 \neq \pm 1$) ergibt die **Integralkurven**

$$3\,y - y^3 = t^3 + C, \qquad C = 3\,y_0 - y_0^3.$$



B. Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen.

Hierunter versteht man DGLen der Form

$$y'(t) \;=\; f\left(\frac{y}{t}\right). \tag{2.6}$$

Man transformiert (2.6) mit Hilfe der Substitution $u(t) := y(t)/t$.
Es folgt: $f(u) \;=\; y' \;=\; (t\,u)' \;=\; t\,u' + u$ und somit

$$u' \;=\; (f(u) - u)/t.$$

Diese DGL ist nun offensichtlich separierbar!!

Beispiel (2.7) $$y' \;=\; \frac{y}{t} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}, \quad t \neq 0.$$

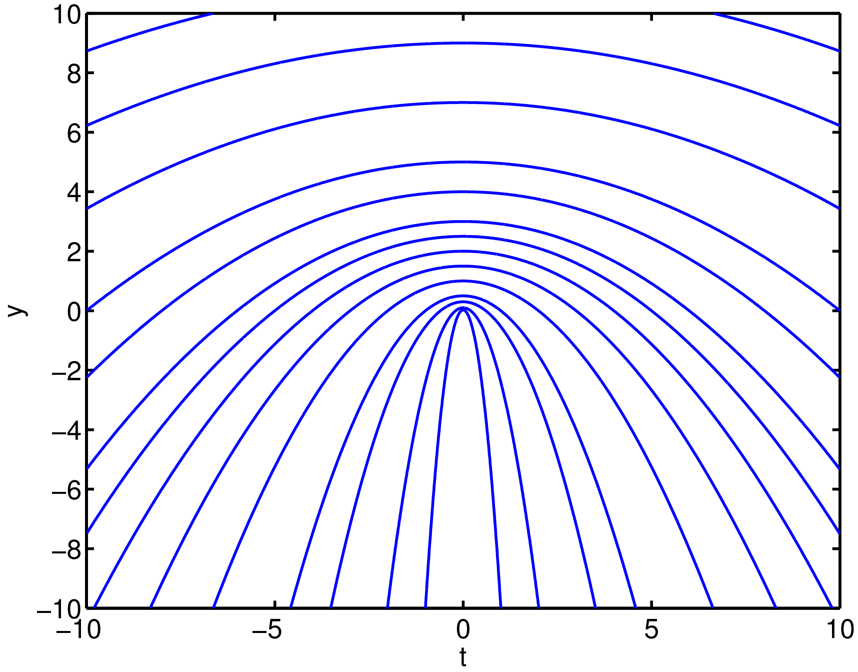
Die Substitution $u := y/t$ führt auf die DGL $u' \;=\; -\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{t}$.

Mittels Trennung der Variablen erhält man:

$$\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) \;=\; -\ln|t| + C_1.$$

Schließlich liefert die Rücksubstitution die folgende Parabelschar:

$$t^2 \;=\; C^2 - 2\,C\,y, \quad C \;=\; \mathrm{e}^{C_1} \;>\; 0.$$



C. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

Eine *skalare lineare DGL erster Ordnung* hat die Form

$$y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t). \tag{2.8}$$

Dabei sind a und b als stetig auf einem geeigneten Intervall vorausgesetzt. Die Funktion $b = b(t)$ heißt *Inhomogenität* der linearen DGL. Ist $b = 0$, so heißt die DGL *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

C1. Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL.

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t). \tag{2.9}$$

Hierbei ist $y_p(t)$ eine *spezielle oder partikuläre Lösung von (2.8)* und y_h die *allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL*

$$y_h'(t) + a(t)\, y_h(t) = 0\,. \tag{2.10}$$

Der Zusatz "allgemein" bedeutet, dass sich jede Lösung der Differentialgleichung (2.7) bzw. (2.9) in der angegebenen Form schreiben lässt.

C2. Allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL.
Mittels Trennung der Variablen erhält man

$$y_h(t) \;=\; C\,\exp\Big(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big). \tag{2.11}$$

$C \in \mathbb{R}$ ist eine Integrationskonstante. Die singuläre Lösung $y_h = 0$ ist in dieser Lösungsschar mit $C = 0$ enthalten.

C3. Partikuläre Lösung der inhomogenen linearen DGL.
Eine partikuläre Lösung y_p erhält man durch einen auf **Lagrange** zurückgehenden Ansatz, die so genannte **Variation der Konstanten**:

$$y_p(t) := C(t)\ \exp(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau). \tag{2.12}$$

Setzen wir diesen Ansatz in die inhomogene DGL ein, so folgt

$$C'(t)\ \exp(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau) \;-\; a(t)\ y_p(t) \;+\; a(t)\ y_p(t) \;=\; b(t)\,.$$

Hieraus lässt sich $C(t)$ durch Integration gewinnen:

$$C(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} b(\tau)\ \exp(\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi)\ \mathrm{d}\tau.$$

Dies nun zurück in den Ansatz (2.12) eingesetzt, ergibt die gesuchte partikuläre Lösung

$$y_p(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} b(\tau)\ \exp(-\int_{\tau}^{t} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi)\ \mathrm{d}\tau. \tag{2.13}$$

Ergebnis: Durch (2.9), (2.11) und (2.13) ist die allgemeine Lösung der linearen DGL (2.8) gegeben!

Spezielle Ansätze für y_p : (nur falls a konstant ist!)

$b(t)$	$y_p(t)$
$\sum_{k=0}^{m} b_k\ t^k$	$\sum_{k=0}^{m} C_k\ t^k$
$b_1\ \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$	$C\ \sin(\omega t - \gamma)$
$b\ e^{\lambda t}$	$C\ e^{\lambda t}$, falls $\lambda \neq -a$
	$C\ t\ e^{\lambda t}$, falls $\lambda = -a$

Beispiel (2.14) Bevölkerungsmodell I

Zur Beschreibung des Bevölkerungswachstums hatten wir die folgende AWA betrachtet

$$N'(t) = \alpha\, N(t)\ , \quad N(t_0) = N_0.$$

Die DGL ist linear und homogen mit $a(t) := -\alpha$. Nach (2.11) lautet die Lösung $N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{\alpha\,(t-t_0)}$.

Beispiel (2.15) Regelkreisglied

In Beispiel (1.14) hatten wir die folgende AWA betrachtet

$$y_a'(t) = -\lambda\, y_a(t) + \lambda\, y_e(t)\ , \quad y_a(t_0) = y_0.$$

Dabei ist y_e eine vorgegebene Eingangsfunktion und λ ein konstanter Parameter. Die in (1.14) angegebene Lösungsdarstellung ergibt sich aus (2.11) und (2.13):

$$y_a(t) = y_0\, \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^{t} y_e(\tau)\, \mathrm{e}^{\lambda(\tau-t)} d\tau.$$

Beispiel (2.16) Wechselstromkreis

Die Stromstärke $I(t)$ in einem Wechselstromkreis mit einem Ohmschem Widerstand R, einer Induktivität L und der angelegter Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ genüge der AWA

$$I'(t) = -\frac{R}{L} I + \frac{U_0}{L} \sin(\omega t), \quad I(0) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL lautet

$$I_h(t) = C_1 \, e^{-R/L\,t}.$$

Eine partikuläre Lösung erhalten wir mit dem Ansatz (vgl. Tabelle auf Seite 30): $I_p(t) = C_2 \sin(\omega t - \gamma)$.

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left(\sin(\omega t - \gamma) + C \, e^{-R/L\,t} \right) .$$

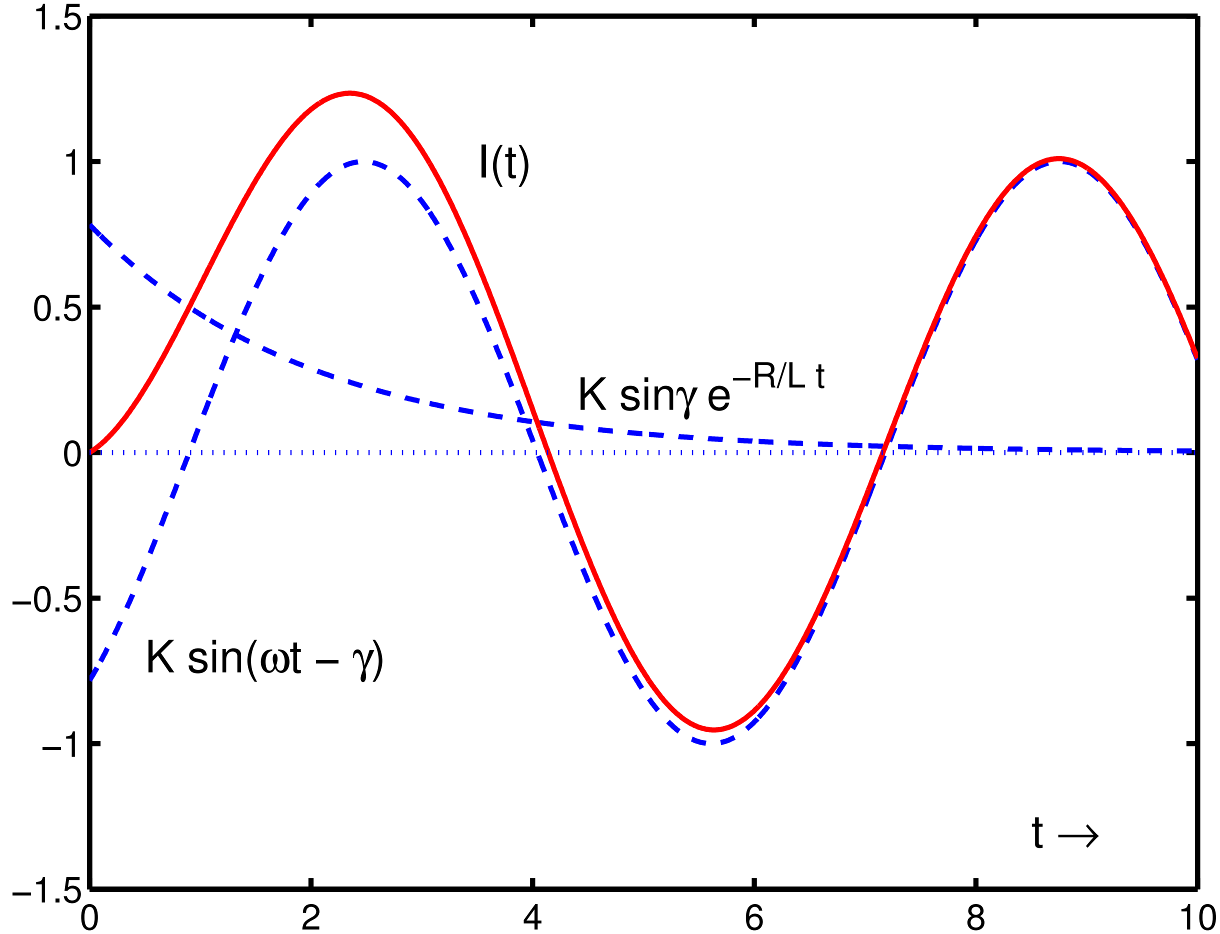
Der Parameter γ ist gegeben durch:

$$\cos\gamma \;=\; \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}, \quad \sin\gamma \;=\; \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\;.$$

Durch Anpassung an die Anfangsbedingung ergibt sich $C = \sin\gamma$.

Die Stromstärke $I(t)$ ist also für größere t–Werte eine gegenüber der angelegten Spannung $U(t)$ verschobene Sinuskurve. $gamma$ beschreibt dabei die **Phasenverschiebung**.

Die **Einschwingphase** wird durch den zweiten Summanden in der Lösungdarstellung beschrieben.



Einschwingvorgang der Stromstärke.

D. Bernoullische Differentialgleichungen.

Eine DGL der Form

$$y'(t) + a(t)\, y(t) - b(t)\,(y(t))^{\alpha} = 0, \quad \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1 \qquad (2.17)$$

mit stetigen Funktionen $a = a(t)$ und $b = b(t)$) heißt eine **Bernoullische DGL**, benannt nach **Jakob Bernoulli (1654 – 1705)**.

Durch die Substitution $u(t) := (y(t))^{1-\alpha}$ wird diese in eine lineare DGL transformiert

$$u'(t) + (1-\alpha)\, a(t)\, u(t) = (1-\alpha)\, b(t),$$

die sich mit Methoden aus Abschnitt C lösen lässt.

Man beachte, dass durch die Rücktransformation $y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ eventuell Singularitäten auftreten können. Die Lösungen einer Bernoullischen DGL müssen also (im Gegensatz zu denen einer linearen DGL) im Allg. nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein!

Beispiel (2.18) $y' = y + t\, y^2.$

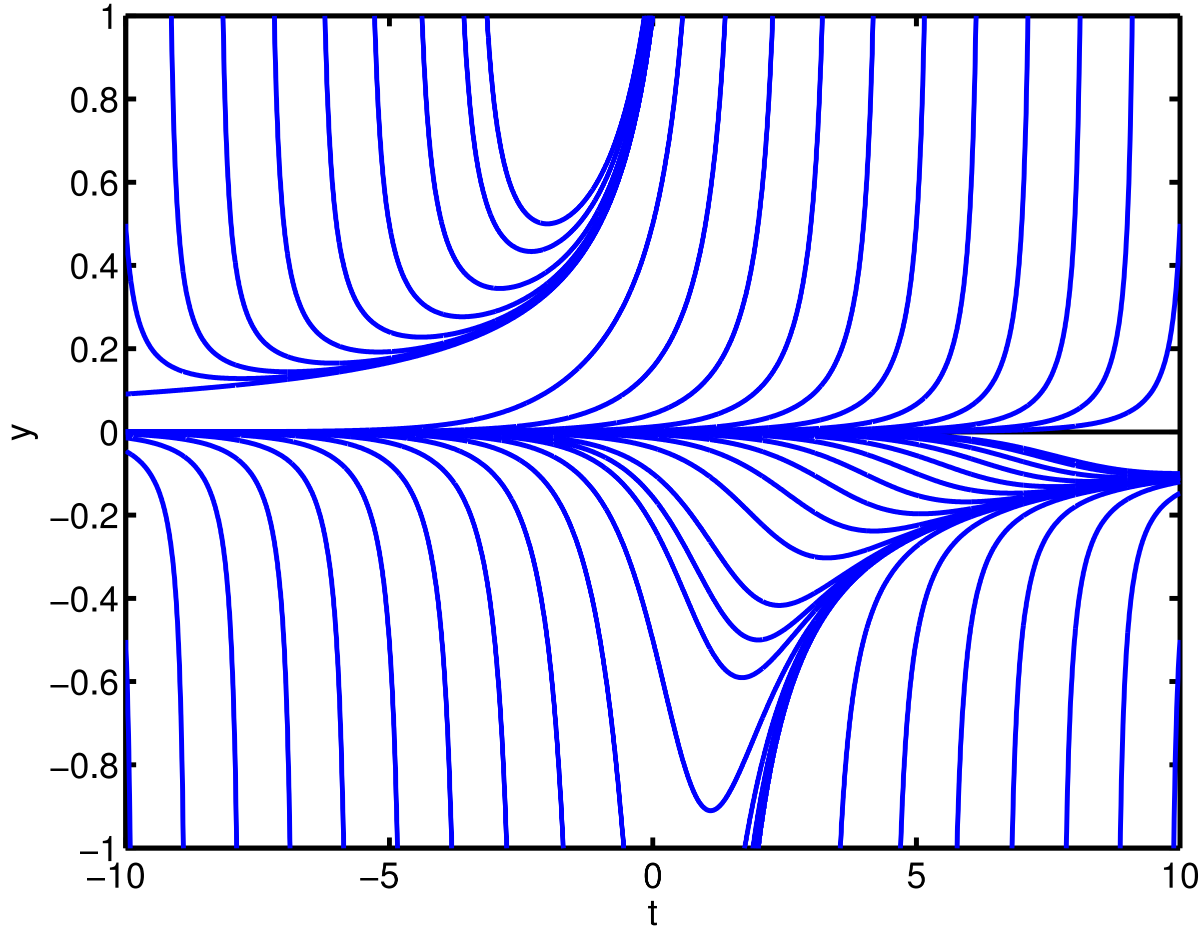
Mit der Transformation $u(t) := 1/y(t)$ erhält man die Lösungen

$$y(t) = 0 \quad \text{und} \quad y(t) = \frac{1}{1 - t + C\, \mathrm{e}^{-t}}, \qquad C = \text{const.}$$

Je nach Anfangswert bzw. Vorzeichen der Integrationskonstanten C besitzt die zweite Lösung eine oder zwei Singularitäten.

So findet man z.B., dass die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 2$ nur in einem beschränkten Intervall existiert mit den (numerisch berechneten) Grenzen

$$-1.6783\ldots < t < 0.7680\ldots$$



Integralkurven zur DGL aus Beispiel 2.18.

E. Riccatische Differentialgleichungen.

Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) + a(t)\, y(t) + b(t)\, y^2(t) = c(t) \tag{2.19}$$

heißt *Riccatische Differentialgleichung* benannt nach **Jacopo Riccati (1676–1754)**. Die Funktionen a, b und c werden als stetig auf einem geeigneten Intervall vorausgesetzt.

Riccatische Differentialgleichungen lassen sich nur in sehr speziellen Fällen in geschlossener Form lösen.

Eine der einfachsten Riccatischen Differentialgleichungen lautet

$$y' = t^2 + y^2. \tag{2.20}$$

Sie wurde bereits 1694 von **Johann Bernoulli (1667 – 1748)** untersucht, der jedoch keine Lösung finden konnte.

Acht Jahre später gab sein Bruder Jakob eine Lösung in Reihenform an. **Joseph Liouville (1809 – 1882)** konnte 1841 zeigen, dass die DGL (2.20) (trotz ihrer einfachen Gestalt) nicht durch elementare Funktionen gelöst werden kann. Eine Lösungdarstellung mit Hilfe der Bessel–Funktionen (**Friedrich Wilhelm Bessel, 1784 – 1846**) findet man in dem Buch von E. Kamke.

Kennt man jedoch eine partikuläre Lösung y_p der Riccatischen DGL (2.19), so lassen sich auch alle übrigen Lösungen ermitteln. Dazu führt man die folgende Substitution aus:

$$u(t) \;:=\; \frac{1}{y(t) - y_p(t)}\,.$$

Man rechnet relativ leicht nach, dass die Riccati–Gleichung hierdurch in die folgende lineare Differentialgleichung transformiert wird:

$$u'(t) \; - \; [\,a(t) \; + \; 2\,b(t)\,y_p(t)\,] \;\; u(t) \;\; = \;\; b(t)\,.$$

Diese lineare DGL lässt sich mit den bekannten Techniken lösen.

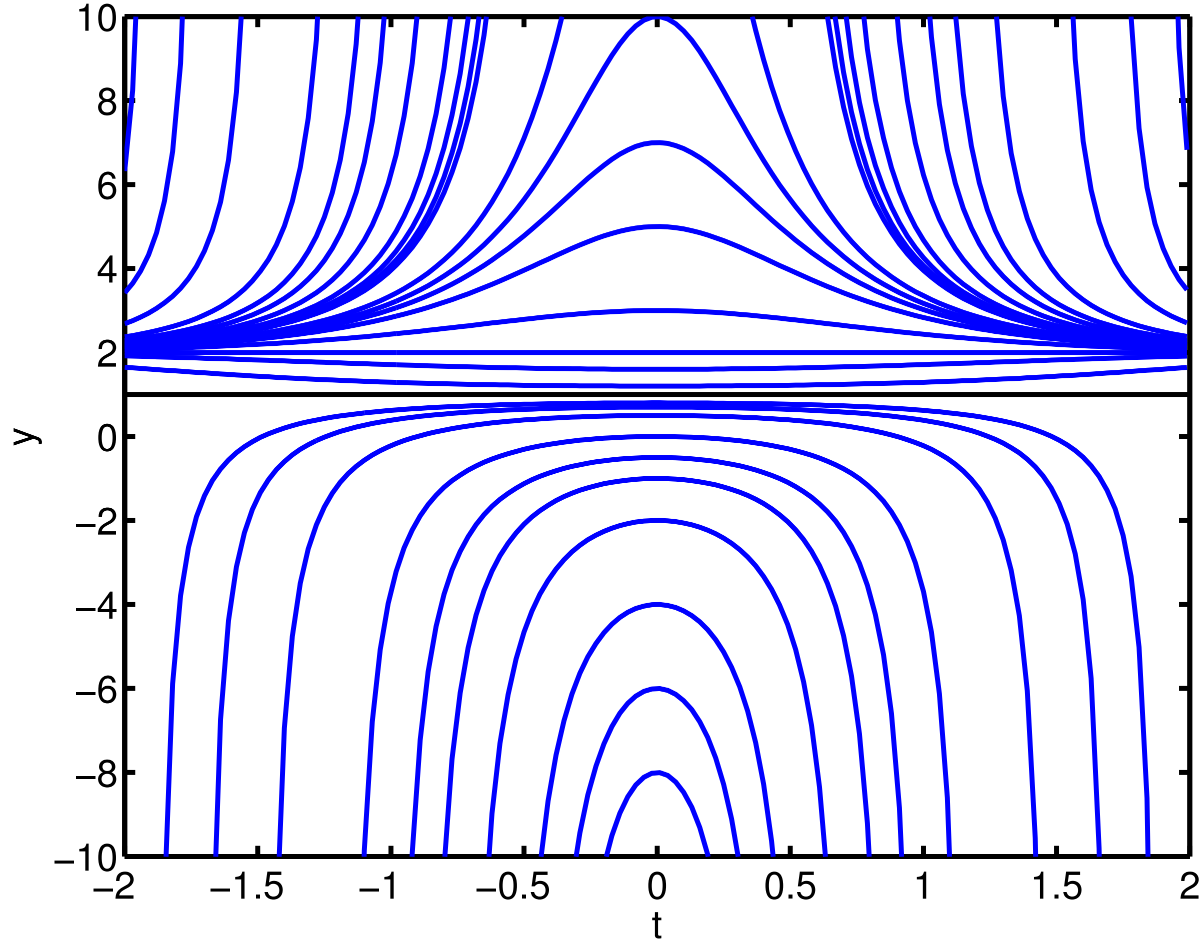
Beispiel (2.21) $\boxed{y'(t) \;=\; -2\,t \;+\; 3\,t\,y \;-\; t\,y^2}$.

Eine partikuläre Lösung liest man unmittelbar ab: $y_p = 1$. Die Substitution $u := 1/(y-1)$ liefert:

$$\begin{aligned} u' \;&=\; -u^2\,y' \;=\; -u^2\,\left(-2\,t \;+\; 3\,t\,y \;-\; t\,y^2\right) \\ &=\; -u^2\,(-2\,t \;+\; 3\,t\,(1+1/u) \;-\; t\,(1+1/u)^2) \\ &=\; t\,(1-u)\,. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt $u \;=\; 1 \;+\; C\;\mathrm{e}^{-t^2/2}$. Hieraus folgt dann mit Rücktransformation

$$y(t) \;=\; 1 \;+\; \frac{1}{1+C\;\mathrm{e}^{-t^2/2}}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$



Integralkurven zur DGL aus Beispiel 2.21.

F. Exakte Differentialgleichungen.

Eine DGL der Form

$$g(t,y) \; + \; h(t,y)\, y' \; = \; 0 \tag{2.22}$$

heißt **exakt** auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$, falls das zugehörige Vektorfeld

$$F(t,y) \; := \; \begin{pmatrix} g(t,y) \\ h(t,y) \end{pmatrix}$$

dort ein Potential besitzt, d.h. $\exists$ C^1-Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall (t,y) \in D : \quad g(t,y) \; = \; \frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial t} \quad \text{und} \quad h(t,y) \; = \; \frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial y} \, .$$

Unter Verwendung der Kettenregel kann man eine exakte DGL daher wie folgt umformen

$$g(t,y) + h(t,y)\, y' \; = \; \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, y'(t) \; = \; \frac{d}{dt}\left(\Phi(t,y(t))\right) \; = \; 0 \, .$$

Die Lösungen der DGL (2.22) sind also durch die folgende *implizite Gleichung* festgelegt:

$$\Phi(t, y(t)) \;=\; C \;=\; \text{const}\,. \tag{2.23}$$

Integrabilitätsbedingung: Sind g und h C^1-Funktionen und ist D *einfach zusammenhängend*, so gilt

$$\text{(2.22) ist exakt} \;\Leftrightarrow\; \forall (t,y) \in D: \quad \frac{\partial h}{\partial t}\,(t,y) \;=\; \frac{\partial g}{\partial y}\,(t,y)\,. \tag{2.24}$$

Beispiel (2.25) $\boxed{(1 + 2\,t\,y + y^2) \;+\; (t^2 + 2\,t\,y)\,y' \;=\; 0.}$

Die DGL erfüllt die Integrabilitätsbedingung auf $D = \mathbb{R}^2$, sie ist also exakt.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \;=\; g \;=\; 1 + 2\,t\,y + y^2$$
$$\Rightarrow \;\; \Phi \;=\; (1 + y^2)\,t + t^2\,y + C(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = h = t^2 + 2\,t\,y$$
$$\Rightarrow \quad 2\,y\,t + t^2 + C'(y) = t^2 + 2\,t\,y$$
$$\Rightarrow \quad C(y) = \text{const}\ .$$

Damit sind die Lösungen der DGL gegeben durch die implizite Gleichung $\qquad (1 + y^2)\,t + y\,t^2 = C \quad .$

G. Methode des integrierenden Faktors.

Wir betrachten weiter die DGL (2.22) $g(t,y) + h(t,y)\,y' = 0$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet D und nehmen an, dass diese *nicht exakt* sei. Wir versuchen, eine Funktion $m(t,y) \neq 0$ zu bestimmen, so dass die mit m multiplizierte DGL

$$m(t,y)\,g(t,y) + m(t,y)\,h(t,y)\,y' = 0$$

exakt ist. m heißt dann ein **integrierender Faktor** der DGL.

Die Integrabilitätsbedingung für die erweiterte DGL besagt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(m\,h) \;-\; \frac{\partial}{\partial y}(m\,g) \;&=\; 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \left(h\,\frac{\partial m}{\partial t} \;-\; g\,\frac{\partial m}{\partial y}\right) \;+\; m\,\left(\frac{\partial h}{\partial t} \;-\; \frac{\partial g}{\partial y}\right) \;&=\; 0\;. \end{aligned} \tag{2.26}$$

In den folgenden beiden Fällen lässt sich diese partielle DGL für m auf eine gewöhnliche DGL reduzieren.

1. Fall : Die Funktion $(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y})/h$ hängt nur von t ab. In diesem Fall setzen wir $m := m(t)$ und lösen die aus (2.26) resultierende lineare, homogene DGL

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\{(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y})/h\} \cdot m(t)\;. \tag{2.27}$$

Jede Lösung $m \neq 0$ dieser DGL ist dann ein integrierender Faktor.

2. Fall : Die Funktion $(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y})/g$ hängt nur von y ab. In diesem Fall setzen wir $m := m(y)$ und lösen die aus (2.26) resultierende lineare, homogene DGL

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}y} = \{(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y})/g\} \cdot m(y) \ . \tag{2.28}$$

Jede Lösung $m \neq 0$ dieser DGL ist ein integrierender Faktor.

Beispiel (2.29) $\boxed{(1 - t\,y) \ + \ (t\,y \ - \ t^2)\,y' \ = \ 0.}$

Die DGL ist nicht exakt, man findet aber, dass

$$(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y})/h \ = \ \frac{1}{t}$$

nur von t abhängt. Man kann also über (2.27) einen integrierenden Faktor $m = m(t)$ finden. Eine Lösung ist $m(t) = 1/t$.

In der Tat ist die mit m multiplizierte DGL

$$\left(\frac{1}{t} - y\right) \ + \ (y - t)\ y' \ = \ 0 \ , \ t \neq 0$$

exakt. Für die Lösungen ergibt sich die implizite Gleichung

$$\ln|\,t| \ - \ t\,y + \frac{1}{2}\,y^2 \ = \ \text{const} \ .$$