Universität Hamburg Fachbereich Mathematik

Differentialgleichungen I

Hans Joachim Oberle

Vorlesung an der TUHH im Wintersemester 2012/13

Literatur.

R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: Mathematik für Ingenieure, Band 2. Wiley-VCH, 2011.

K. Burg, H. Haf, F. Wille, A. Meister: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 3. Vieweg+Teubner, 2009.

A. Hoffmann, B. Marx, W. Vogt: Mathematik für Ingenieure, Band 2. Pearson Studium, 2006.

H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg+Teubner, 2009.

1. Klassifikation und Beispiele

Definition (1.1)

a) Eine einzelne Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m)}(t)\right) \;=\; \mathbf{0} \;\in\; \mathbb{R}^n \qquad (1.2)$$

mit $\mathbf{y} : \mathbb{R}^1 \supset D \to \mathbb{R}^n$, also $t \in \mathbb{R}$ (Zeit), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ (Zustand), heißt ein **System gewöhnlicher Differentialgleichungen** (DGL–System) für die n gesuchten Funktionen $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^\mathsf{T}$.

Kommt die höchste Ableitung $\mathbf{y}^{(m)}$ in der DGL (1.2) vor, so heißt (1.2) ein **(implizites) DGL-System der Ordnung m**.

Dagegen lautet die **explizite Form eines DGL-Systems der Ordnung m**:

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) \;=\; \mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t)\right). \tag{1.3}$$

b) Ein DGL-System heißt **autonom**, falls es nicht *explizit* von der Zeit t abhängt. Damit hat es also die Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m)}(t)\right) \;=\; \mathbf{0}, \quad \text{bzw.} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) \;=\; \mathbf{f}\left(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t)\right). \tag{1.5}$$

c) Ein DGL-System heißt **linear**, falls es *affin-linear* in den abhängigen Variablen $\mathbf{y}(t)$ ist, also

$$\mathbf{F} \;=\; \sum_{k=0}^{m} \mathbf{A}_k(t) \cdot \mathbf{y}^{(k)}(t) \;-\; \mathbf{b}(t) \;=\; \mathbf{0}, \quad \text{bzw.} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{A}_k(t) \cdot \mathbf{y}^{(k)}(t) = \mathbf{b}(t). \tag{1.7}$$

$\mathbf{b}(t)$ heißt **Inhomogenität** der linearen DGL. (1.6) bzw. (1.7). Die $\mathbf{A}_k(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ sind (n,n)-Matrizen, die zumindest stetig von t abhängen sollen.

Ein lineares DGL-System heißt **homogen**, falls $\mathbf{b}(t) = 0$ ist, andernfalls **inhomogen**.

Beispiele (1.8)

a) $y'^2 + ty' + 4y = 0$ ist eine implizite DGL erster Ordnung.

b) Die **DGL des physikalischen Pendels**

$$\theta''(t) + (g/L)\sin\theta(t) = 0$$

ist eine explizite, autonome und nichtlineare DGL zweiter Ordnung.

c) Ersetzt man hierin für kleine Winkel den $\sin\theta$ durch θ, so erhält man die **DGL des mathematischen Pendels**

$$\theta''(t) + (g/L)\,\theta(t) \;=\; 0.$$

Dies ist eine lineare, homogene DGL zweiter Ordnung.

d) Durch die **Lotka-Volterra Gleichungen**

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha\, x(t) - \beta\, x(t)\cdot y(t) \\ y'(t) &= -\gamma\, y(t) + \delta\, x(t)\cdot y(t) \end{aligned}$$

ist ein explizites, nichtlineares DGL-System erster Ordnung gegeben. Dieses beschreibt ein so genanntes *Räuber-Beute Modell*. Dabei ist $x = x(t)$ die Populationstärke der Beutespezies (z.B. Karpfen) und $y = y(t)$ die der Räuber (z.B. Hechte).
α, β, γ und δ sind positive Parameter des Modells.

e) Der **senkrechte Aufstieg einer Rakete** wird näherungsweise beschrieben durch das DGL-System

$$\begin{aligned} h'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= \frac{1}{m(t)}(T-D)-g \\ m'(t) &= -\beta. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet h die Höhe über der Erdoberfläche, v die Geschwindigkeit und m die Masse. β ist der Massendurchsatz, $T = c\,\beta$ die Schubstärke (Thrust) und $D = \frac{1}{2}\,\rho\,v^2\,F\,C_D$ der Luftwiderstand (Drag). Dabei ist weiter $\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-\alpha h}$ die Luftdichte, F die Querschnittsfläche und C_D der Widerstandsbeiwert. Schließlich wird die Gravitationsbeschleunigung wie folgt berechnet: $g = g_0\,(R_E/(R_E + h))^2$, wobei R_E der Erdradius ist.

f) Die **ebene Bewegung einer Raumsonde** im zentralen Gravitationsfeld der Sonne wird näherungsweise beschrieben durch das DGL-System

$$\begin{aligned}
r'(t) &= w(t) \\
\varphi'(t) &= \frac{v(t)}{r(t)} \\
w'(t) &= \frac{v(t)^2}{r(t)} - \frac{1}{r(t)^2} + \frac{T(t)}{m(t)} \sin\psi(t) \\
v'(t) &= -\frac{w(t)\,v(t)}{r(t)} + \frac{T(t)}{m(t)} \cos\psi(t) \\
m'(t) &= -\beta(t).
\end{aligned}$$

Dabei sind (r, φ) die Polarkoordinaten des Ortes (Sonne im Ursprung) und (v, w) die kartesischen Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors. m bezeichnet wieder die Masse, β den Massendurchsatz, $T = c\,\beta$ die Schubstärke und ψ den Schubwinkel.

Problemstellungen:

Für ein explizites DGL-System erster Ordnung lauten die typischen Aufgabestellungen

Anfangswertaufgabe (1.9) (AWA)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad a \le t \le b, \\ \mathbf{y}(a) &= \mathbf{y}_a \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Randwertaufgabe (1.10) (RWA)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad a \le t \le b, \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) &= \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Beachte: Man hat genau n Anfangsdaten und auch genau n Randbedingungen für die n gesuchten Funktionen $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathsf{T}}$!

Beispiel (1.11) Bevölkerungsmodell I

Es bezeichne $N(t)$ die Größe einer Population zur Zeit t. Wir nehmen an, dass die Änderung der Population in einem kurzen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ proportional zur Zeitlänge Δt und zu $N(t)$ selbst ist:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx (b-d)\,N(t),$$

b: Geburtenrate, d: Sterberate. Die Grenzwertbildung $\Delta t \to 0$ ergibt die AWA

$$\mathbf{N'(t) = \alpha\, N(t), \qquad N(t_0) = N_0}$$

mit $\alpha := b-d$.

Lösung: $N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{\alpha\,(t-t_0)}$ **(Exponentielles Wachstum)**

Wir wenden das Modell auf die zeitliche Entwicklung der Erdbevölkerung an. Hier ist $\alpha > 0$. Zunächst bemerken wir:

Für die Zeit δ, in der sich die Erdbevölkerung verdoppelt, so findet man

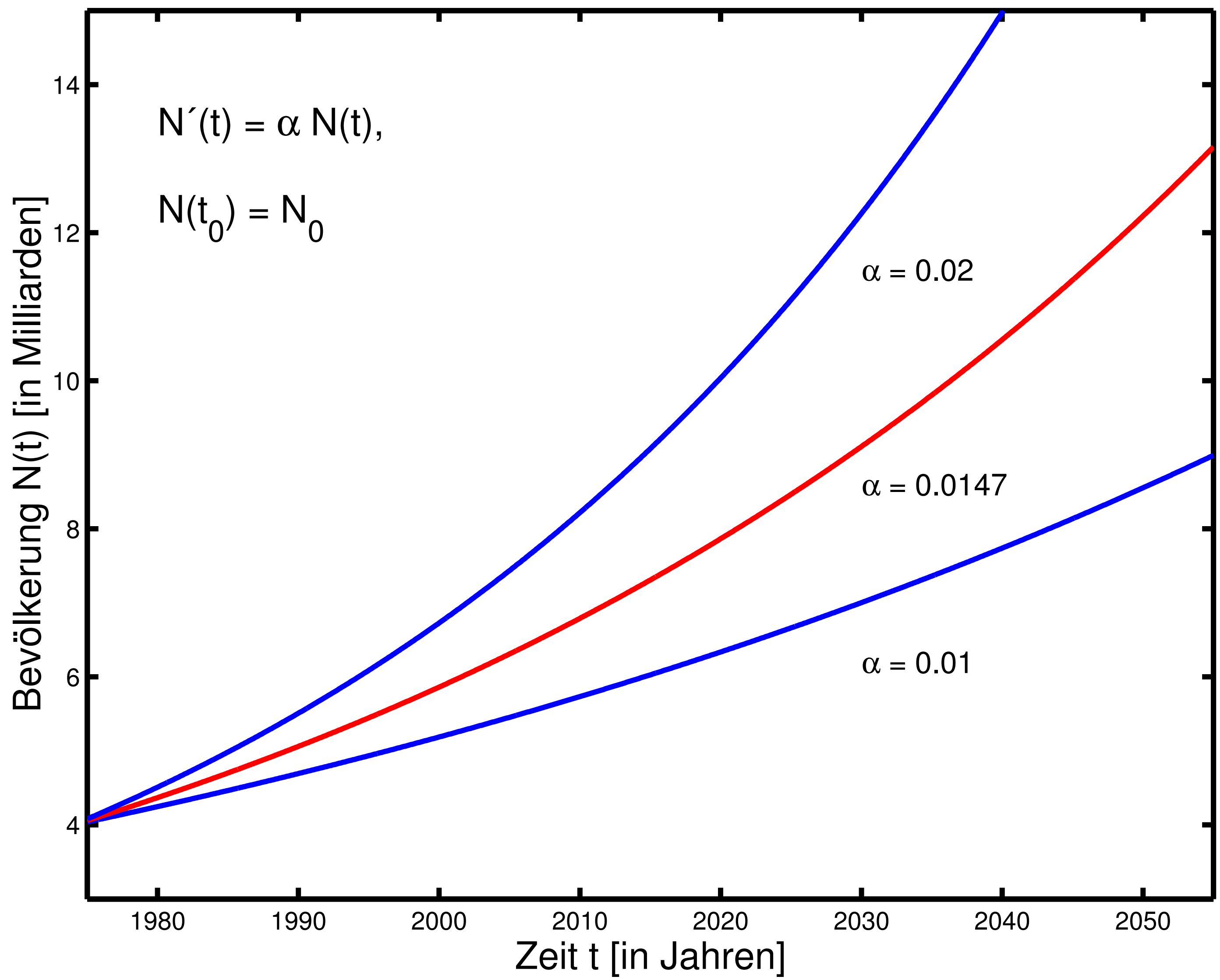
$$\delta = \frac{\ln 2}{\alpha} \qquad \textbf{(Verdopplungszeit)}. \tag{1.12}$$

Aus den Daten $N(1927) \approx 2 \times 10^9$ und $N(1974) \approx 4 \times 10^9$ folgt

$$N(t) = 4 \times 10^9 \cdot \mathrm{e}^{\alpha\,(t-1974)}, \qquad \alpha \approx 0.0147\,\mathrm{a}^{-1}.$$

Für $t = 2010$ ergibt sich aus dem Modell $N(2010) = 6.8 \times 10^9$, während tatsächlich (Deutsche Stiftung Weltbevölkerung) $N(2010) \approx 6.9 \times 10^9$ geschätzt werden.

Für größere Zeiträume wird die zeitliche Entwicklung von N durch das Modell jedoch erheblich überschätzt! Nach Schätzung der UN ist beispielsweise $N(2050) \approx 9.1 \times 10^9$, während das obige Modell $N(2050) \approx 12.2 \times 10^9$ liefert.


N´(t) = α N(t),
N(t0) = N0
α = 0.02
α = 0.0147
α = 0.01
14
12
10
8
6
4
1980
1990
2000
2010
2020
2030
2040
2050
Bevölkerung N(t) [in Milliarden]
Zeit t [in Jahren]

Beispiel (1.13) Bevölkerungsmodell II

Nach dem belgischen Mathematiker Verhulst (1804-1849) kann man das obige Modell so modifizieren, dass die Wachstumsrate α nicht mehr konstant ist, sondern affin-linear von $N(t)$ abhängt. Wir erhalten damit die AWA

$$\mathbf{N'(t) = \beta\,(N_\infty - N(t))\,N(t), \quad N(t_0) = N_0 < N_\infty}$$

mit Parametern β und N_∞.

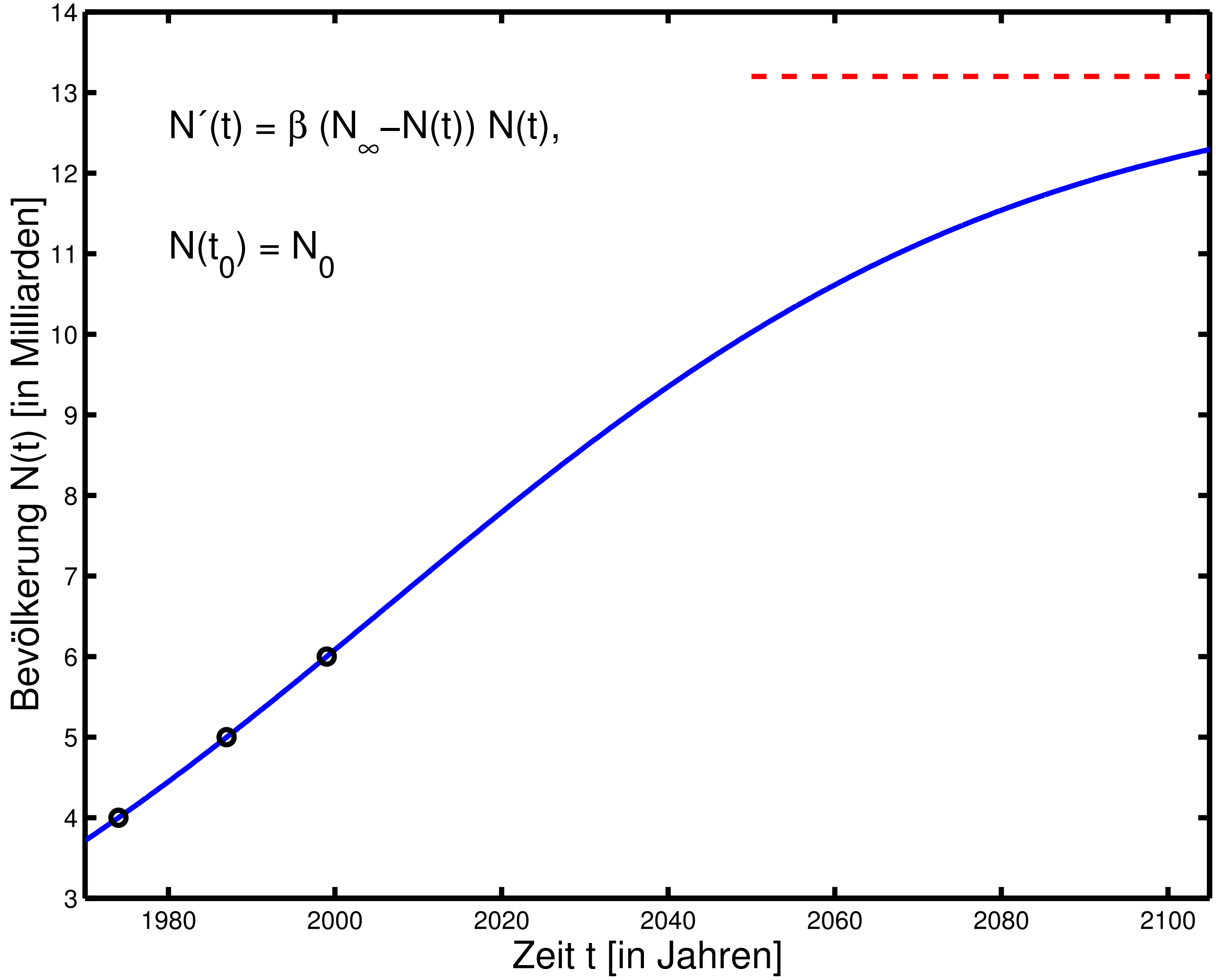
Lösung: (Logistisches Wachstum)

$$N(t) = \frac{N_\infty\, N_0}{N_0 + (N_\infty - N_0)\,\mathrm{e}^{-\beta\, N_\infty\,(t-t_0)}}.$$

Wählt man die Referenzwerte (Einheit: Milliarden)

$$N(1974) = 4, \quad N(1987) = 5, \quad N(1999) = 6$$

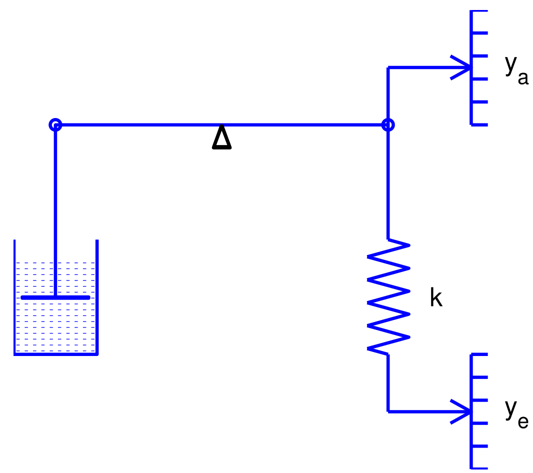
und $t_0 = 1974$, $N_0 = 4$, so ergibt sich über ein nichtlineares Gleichungssystem die Lösung $N_\infty \approx 13.238$, $\beta \approx 0.0019623$.


$N'(t) = \beta\,(N_\infty - N(t))\,N(t),$
$N(t_0) = N_0$
Bevölkerung N(t) [in Milliarden]
Zeit t [in Jahren]
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
1980
2000
2020
2040
2060
2080
2100

Das obige Modell würde für 2010 den sehr guten Wert $N(2010) = 6.94 \times 10^9$, für 2050 jedoch immer noch einen zu pessimistischen Wert $N(2050) = 10 \times 10^9$ liefern.

Beispiel (1.14) Regelkreisglied

Bei einem mechanischen System werde eine Eingangsgröße $y_e(t)$ über eine Feder (Hookesches Gesetz $K_F = k(y_e - y_a)$) und ein Dämpfungsglied $K_D = r\ \dot{y}_a$ zur gesuchten Ausgangsgröße y_a transformiert.



Die Bedingung des Kräftegleichgewichts liefert damit die folgende lineare inhomogene DGL

$$\mathbf{y_a'(t) \;=\; -\,\lambda\; y_a(t) \;+\; \lambda\; y_e(t), \qquad \lambda := k/r.}$$

Bei vorgegebener Eingangsgröße $y_e(t)$ und vorgegebenem Anfangswert $y_a(t_0)$ liegt die Lösung y_a der AWA fest.

Lösung: $$y_a(t) \;=\; y_a(t_0)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^{t} y_e(\tau)\,\mathrm{e}^{\lambda(\tau-t)}\mathrm{d}\tau.$$

Bemerkung:

In diesem Zusammenhang ist die folgende Frage von Interesse: Wie muss man bei einer vorgegebener Auslenkung $y_a(t_0) \neq 0$ die Eingangsfunktion $y_e(t),\, t \geq t_0,$ wählen, damit y_a möglichst schnell wieder den Gleichgewichtszustand $y_a = 0$ erreicht? Bei dieser Fragestellung handelt es sich um eine **Aufgabe der optimalen Steuerung**.

Beispiel (1.15) Newtonsche Abkühlung

Die (räumlich gemittelte) Temperatur $T(t)$ eines Körpers lässt sich näherungsweise durch die folgende lineare DGL beschreiben:

$$\mathbf{T'(t) \;=\; \frac{k\,F}{c\,m}\,(\,T_a(t) - T(t)).}$$

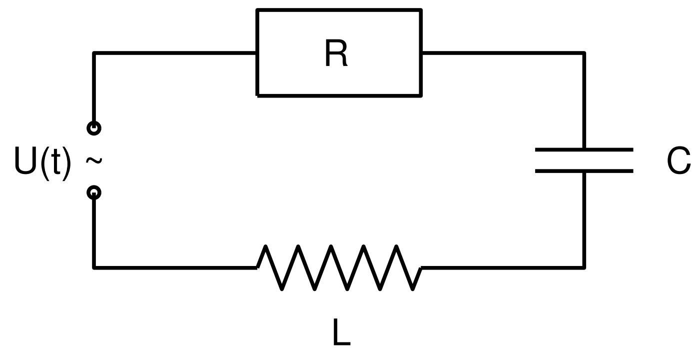
$T(t)$: Temperatur des Körpers zur Zeit t, $T_a(t)$: Außentemperatur, m: Masse des Körpers, F: Oberfläche, c: spezifische Wärme, k: Proportionalitätsfaktor.

Man beachte, dass diese DGL (trotz der unterschiedlichen physikalischer Bedeutung) mit der des Beispiels (1.14) übereinstimmt.

Lösung:

$$T(t) \;=\; T(t_0)\;\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^{t} T_a(\tau)\;\mathrm{e}^{\lambda(\tau-t)} d\tau, \qquad \lambda := (kF)/(cm).$$

Beispiel (1.16) Elektrischer Schwingkreis



Gesucht ist die Stromstärke $I(t)$ in einem Wechselstromkreis mit Ohmschem Widerstand R, Induktivität L, Kapazität C und einer angelegter Wechselspannung $U(t) := U_0 \sin(\omega t)$. Aus den Beziehungen $U_R = I \cdot R$, $U_L = L \cdot I'$, $I = C \cdot U_C'$, sowie dem Kirchhoffschen Gesetz $U_R + U_L + U_C = U(t)$ erhält man durch Differentiation die folgende lineare DGL zweiter Ordnung

$$\mathbf{L\, I''(t) \;+\; R\, I'(t) \;+\; \frac{1}{C}\, I(t) \;=\; U_0\, \omega \cos(\omega t).}$$

Setzt man nun $y_1(t) := I(t)$ und $y_2(t) := I'(t)$, so erhält man ein äquivalentes DGL-System erster Ordnung

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= -(R/L)\, y_2(t) - 1/(LC)\, y_1(t) + U_0\, (\omega/L) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Zu Festlegung einer konkreten Lösung muss man nach (1.9) Anfangswerte für $y_1(t_0)$ und $y_2(t_0)$ vorgeben. Für die ursprüngliche DGL bedeutet dies, dass man sowohl die Stromstärke I, wie auch deren Ableitung I' zu einem festen Zeitpunkt t_0 festlegen muss:

$$\mathbf{I(t_0) = I_0}, \quad \mathbf{I'(t_0) = I_1}.$$

Beispiel (1.17) Restringiertes Dreikörper Problem

Der ebenen Bewegung eines Satelliten im Kraftfeld von Erde und Mond wird in einem rotierenden kartesischen Koordinatensystem mit x-Achse durch die Schwerpunkte von Erde und Mond und y-Achse durch den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond dargestellt. Die Position (x, y) des Satelliten genügt dann dem folgenden DGL-System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2\,y' - \mu'\,\frac{x+\mu}{[(x+\mu)^2+y^2]^{3/2}} - \mu\,\frac{x-\mu'}{[(x-\mu')^2+y^2]^{3/2}} \\ y'' &= y - 2\,x' - \mu'\,\frac{y}{[(x+\mu)^2+y^2]^{3/2}} - \mu\,\frac{y}{[(x-\mu')^2+y^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\mu = 1/82.45$ das Verhältnis von Mond- zur Erdmasse und $\mu' := 1-\mu$. Die Skalierung ist so gewählt, dass dem Abstand 1 gerade dem als konstant angenommene Abstand von der Erde zum Mond entspricht.

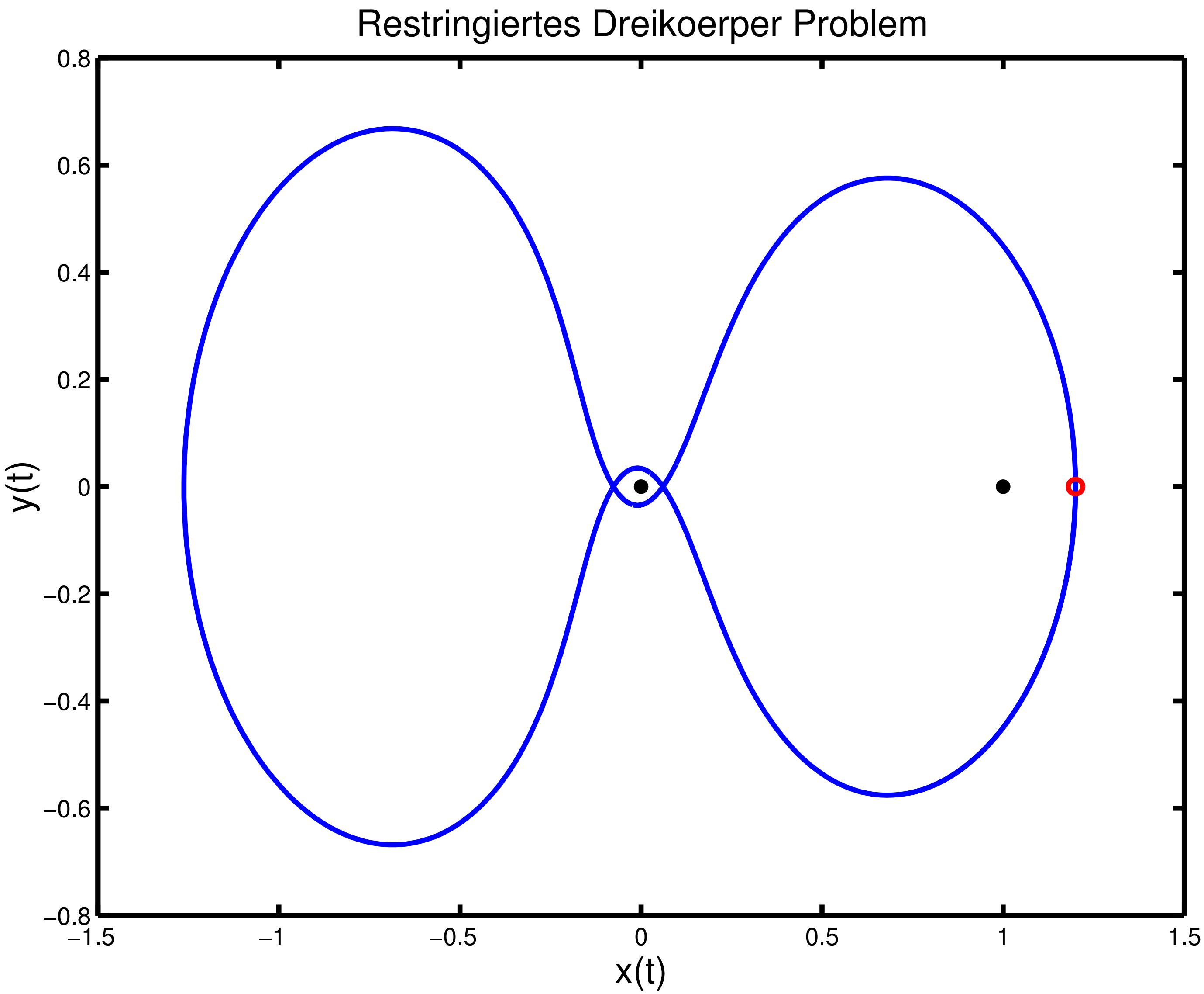
Anfangsposition des Satelliten: $x(0) = 1.2, \quad y(0) = 0.$
Die Anfangsgeschwindigkeit wird so bestimmt, dass die Satellitenbahn periodisch wird: $x'(0) = 0$, $y'(0) = -1.049357510$. Hierfür ergibt sich die Periode $T = 6.192169331$.

Bemerkung:

Zur Bestimmung von Anfangsbedingungen, die auf eine periodische Bahn führen, hat man eigentlich eine RWA zu lösen. Im vorliegenden Fall kann dies etwa mittels der folgenden Randbedingungen erfolgen.

$$\begin{aligned} x(0) &= 1.2, & x'(0) &= 0, & x'(T) &= 0, \\ y(0) &= 0, & x(T) &= 1.2. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Endzeit T dieser Randwertaufgabe unbekannt ist. Man spricht von einer **RWA mit freier Endzeit**.


Restringiertes Dreikoerper Problem
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
y(t)
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
x(t)