15. Bereichsintegrale

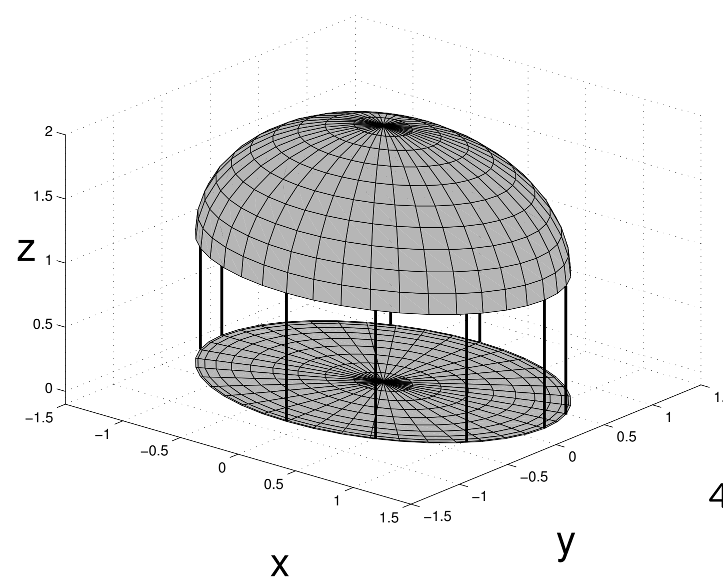
15.1 Integrale über Quadern

Ziel ist die Berechnung des Volumens „unterhalb" des Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, genauer zwischen dem Graphen von f und der $\mathbf{x}$–Ebene. Wir bezeichnen wir dieses Volumen als Integral $V = \int\limits_D f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$.

Im Bild rechts ist

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

und $f : D \to \mathbb{R}^+,\ z = f(x, y)$.



Die Konstruktion des Integrals erfolgt wie im Fall einer Variablen. Zunächst betrachten wir o.E.d.A. $n = 2$ und den Fall eines kompakten Quaders (Rechtecks) als Definitionsbereich. Sei also $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition (15.1.1)

a) $Z = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n), (y_0, y_1, \ldots, y_m)\}$ heißt eine **Zerlegung** des Quaders Q, falls gelten: $a_1 = x_0 < x_1 < \ \ldots \ < x_n = b_1$ und $a_2 = y_0 < y_1 < \ \ldots \ < y_m = b_2$.

Mit $\mathbf{Z}(Q)$ wird die **Menge der Zerlegungen** von Q bezeichnet. Ferner heißt $\|Z\| := \max_{i,j} \{ |x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j| \}$ die **Feinheit** einer Zerlegung Z.

b) Zu $Z \in \mathbf{Z}(Q)$ sind $Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ die **Teilquader** der Zerlegung und $\mathrm{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i)\,(y_{j+1} - y_j)$ das **Volumen** des Teilquaders Q_{ij}.

c) Die **Riemannsche Untersumme bzw. Obersumme** von f zur Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}(Q)$ ist gegeben durch

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf\{f(\mathbf{x}) : \ \mathbf{x} \in Q_{ij}\} \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij}),$$
$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup\{f(\mathbf{x}) : \ \mathbf{x} \in Q_{ij}\} \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij}).$$

Für beliebige Punkte $\mathbf{x}_{ij} \in Q_{ij}$ heißt

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\mathbf{x}_{ij}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

eine (allgemeine) **Riemannsche Summe** von f zur Zerlegung Z.

Bemerkungen (15.1.2)

a) Für eine beliebige Riemannsche Summe gilt stets $U_f(Z) \le R_f(Z) \le O_f(Z)$.

b) Entsteht eine Zerlegung Z_2 aus Z_1 durch **Verfeinerung** (d.h. durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i und/oder y_j), so gilt $U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1), \quad O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$.

c) Für beliebige Zerlegungen $Z_1, Z_2 \in \mathbf{Z}(Q)$ gilt stets $U_f(Z_1) \;\leq\; O_f(Z_2)$.

Definition (15.1.3)

a) Aufgrund der obigen Eigenschaften existieren die Grenzwerte

$$\underline{\int_Q} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} \;:=\; \sup\{\, U_f(Z): \; Z \in \mathbf{Z}(Q)\,\}$$

$$\overline{\int_Q} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} \;:=\; \inf\{\, O_f(Z): \; Z \in \mathbf{Z}(Q)\,\}.$$

Sie heißen **Riemannsches Unter– bzw. Oberintegral**.

b) Stimmen Unter – und Oberintegral überein, so heißt f **(Riemann–) integrierbar** über Q und der gemeinsame Wert

$$\int_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} := \underline{\int}_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \overline{\int}_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

heißt dann das **(Riemann–) Integral** von f über Q.

Bemerkung (15.1.4)

Die obigen Definitionen lassen sich ganz analog auf den Fall von Raumdimensionen $n > 2$ übertragen.

Für das Integral $\int_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ gibt es im Fall $n = 2$ bzw. $n = 3$ auch die Schreibweise

$$\iint_Q f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \quad \text{bzw.} \quad \iiint_Q f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

Satz (15.1.5) (Eigenschaften des Integrals)

– **Linearität:** $\int\limits_Q (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \alpha \int\limits_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \beta \int\limits_Q g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$

– **Monotonie:** Gilt $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in Q$, so folgt:

$$\int\limits_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \;\leq\; \int\limits_Q g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

– **Positivität:** Gilt $f(\mathbf{x}) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in Q$, so folgt: $\int\limits_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \geq 0.$

– **Additivität:** Sind Q_1, Q_2, $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader mit $Q = Q_1 \cup Q_2$ und $\mathrm{vol}(Q_1 \cap Q_2) = 0$, so gilt:

$$\int\limits_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{Q_1} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int\limits_{Q_2} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

– **Abschätzung:** $\left| \int\limits_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \right| \le \sup\{\,|f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in Q\,\} \cdot \mathrm{vol}(Q)\,.$

– **Riemannsches Kriterium:** f ist genau dann über Q integrierbar, falls gilt:

$$\forall\,\varepsilon > 0 : \quad \exists\, Z \in \mathbf{Z}(Q) : \ O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon\,.$$

– **Satz von Fubini:** Ist f über Q integrierbar und existieren für alle $x \in [a_1, b_1]$ bzw. $y \in [a_2, b_2]$ die Integrale

$$F(x) := \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{bzw.} \quad G(y) := \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

so gilt:

$$\int\limits_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Bemerkung (15.1.6)

Da Quader $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ stets kompakt sind, ist eine stetige Funktion f auf Q auch gleichmäßig stetig, vgl. (4.1.15). Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es daher $\delta > 0$ mit

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty < \delta \;\Rightarrow\; |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$$

Wählt man nun eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}(Q)$ mit $\|Z\| < \delta$, so folgt $O_f(Z) - U_f(Z) \leq \varepsilon \cdot \text{vol}(Q)$. Nach dem Riemannschen Kriterium sind somit stetige Funktionen über Quadern integrierbar!

Beispiel (15.1.7)

Sei $Q := [0, 1] \times [0, 2]$ und $f(x, y) := 2 - x\,y$. Da f stetig ist, sind die Voraussetzungen des Satzes von Fubini erfüllt und es gilt:

$$\int\limits_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_0^2 \int\limits_0^1 (2 - x\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left[2x - \frac{x^2\,y}{2}\right]_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 \left(2 - \frac{y}{2}\right) \mathrm{d}y = \left[2\,y - \frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2} = 3\,.$$

Beispiel (15.1.8)

Man beachte, dass die Existenz der iterierten Integrale alleine *nicht* genügt, um die Integrierbarkeit von f zu garantieren! Das iterierte Integral $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ existiert beispielsweise für die Funktion

$$f(x,y) \;:=\; \begin{cases} 1\,, & \text{falls} \quad y \in \mathbb{Q} \\ 2x\,, & \text{falls} \quad y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Die Funktion f ist jedoch *nicht* über dem Quader $Q := [0,1]^2$ integrierbar!

15.2 Integrale über kompakten Bereichen

Wir erweitern den Integralbegriff auf den Fall kompakter Integrationsbereiche $D \subset \mathbb{R}^n$. Zu einer beschränkten Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definieren wir:

$$f^*(\mathbf{x}) \;:=\; \begin{cases} f(\mathbf{x})\,, & \text{falls} \quad \mathbf{x} \in D \\ 0\,, & \text{falls} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus D\,. \end{cases} \tag{15.2.1}$$

Speziell für $f = 1$ heißt f^* die **charakteristische Funktion** der Menge D, bezeichnet mit χ_D.

Sei $Q^* \subset \mathbb{R}^n$ nun der kleinste Quader mit $D \subset Q^*$.

Definition (15.2.2)

a) f heißt **integrierbar** über D, falls f^* über Q^* integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir:

$$\int\limits_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \;:=\; \int\limits_{Q^*} f^*(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

b) D heißt **messbar**, falls das Integral

$$\mathrm{vol}(D) \; := \; \int_D 1 \, d\mathbf{x} \; = \; \int_{Q^*} \chi_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

existiert. $\mathrm{vol}(D)$ heißt dann das **Volumen** von D.

c) D heißt **Nullmenge**, falls D messbar ist und $\mathrm{vol}(D) = 0$ gilt.

Bemerkung (15.2.3)

Ist D selbst ein Quader, so gilt $Q^* = D$. Damit stimmt der Integrierbarkeitsbegriff im Sinn von (15.2.2) mit der früheren Definition aus Abschnitt 15.1 überein. Ferner sind Quader stets messbare Mengen, und der Volumenbegriff stimmt ebenfalls mit dem früheren Volumenbegriff nach (15.1.1) überein.

Satz (15.2.4) (Kennzeichnungssatz)

D ist genau dann messbar, falls der Rand ∂D von D eine Nullmenge ist.

Beispiel (15.2.5)

$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist eine messbare Menge, da der Rand $\partial D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$ eine Nullmenge ist. Letzteres zeigt man mittels der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktionen $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ auf $-1 \leq x \leq 1$.

Satz (15.2.6) (Integrierbarkeit stetiger Funktionen)

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f über D integrierbar.

Beweis: Mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit von f.

Satz (15.2.7) (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, kompakt, zusammenhängend und messbar und ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es einen Punkt $\boldsymbol{\xi} \in D$ mit:

$$\int\limits_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; f(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathrm{vol}(D)\,.$$

Zum konkreten Nachweis der Messbarkeit einer Menge D beschränkt man sich zumeist auf Mengen von einfacher Gestalt.

Definition (15.2.8)

a) $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich**, falls

$$D \;=\; \{\,(x,y):\; a \le x \le b \;\wedge\; g(x) \le y \le h(x)\,\},$$

oder

$$D \;=\; \{\,(x,y):\; \tilde{a} \le y \le \tilde{b} \;\wedge\; \tilde{g}(y) \le x \le \tilde{h}(y)\,\}$$

mit *stetigen* Funktionen g, h bzw. $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ gilt.

b) $D \subset \mathbb{R}^3$ heißt **Normalbereich**, falls

$$D = \{\, \mathbf{x} : a \le x_i \le b,\, g(x_i) \le x_j \le h(x_i),\, u(x_i, x_j) \le x_k \le v(x_i, x_j)\,\},$$

wobei (i, j, k) eine Permutation von $(1, 2, 3)$ ist und g, h, sowie u, v stetige Funktionen sind.

c) $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **projizierbar** in Richtung x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, falls es eine messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und stetige Funktionen u, v gibt, so dass

$$D = \{\, \mathbf{x} : \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}} \in B \wedge u(\mathbf{y}) \le x_i \le v(\mathbf{y})\,\}.$$

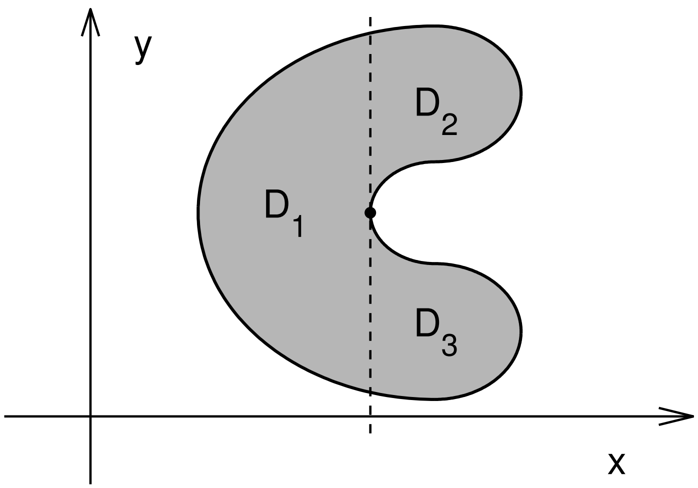
Satz (15.2.9)

a) Projizierbare Mengen sind messbar!

b) Normalbereiche sind projizierbar, also auch messbar!

Bemerkung (15.2.10)

Häufig lässt sich D als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche darstellen. Solche Mengen sind also nach obigem messbar.



$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

$$\int\limits_D \ldots = \int\limits_{D_1} + \int\limits_{D_2} + \int\limits_{D_3}$$

$$\text{vol}(D_i \cap D_j) = 0 \text{ für } i \neq j$$

Folgerung (15.2.11)

Ist f stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b \;\wedge\; g(x) \leq y \leq h(x) \},$$

so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\;\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Analog gilt für das Integral über einem Normalbereich $D \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

sowie für das Integral über einem projizierbaren Bereich $D \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; \int_B \left(\int_{u(\mathbf{y})}^{v(\mathbf{y})} f(\mathbf{x})\;\mathrm{d}x_i \right) \mathrm{d}\mathbf{y}\,.$$

Beispiel (15.2.12)

$f(x,y) := x + 2\,y$ soll über dem Bereich

$$D := \{(x,y) :\ -1 \le x \le 1 \ \wedge\ x^2 \le y \le 2 - x^2\,\}$$

integriert werden. Da D ein Normalbereich und f stetig ist, folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x^2}^{2-x^2} (x + 2\,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} (x\,y + y^2)\Big|_{y=x^2}^{y=2-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \Big(x\,(2 - 2x^2) + (2 - x^2)^2 - x^4 \Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \Big(-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4 \Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + x^2 + 4\,x \Big]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}\,.
\end{aligned}$$

Beispiel (15.2.13)

Zu berechnen sei das innere Volumen des Rotationsparaboloids:

$$V := \{\, (x,y,z)^{\mathsf{T}} :\; x^2 + y^2 \le 1 \,\wedge\, x^2 + y^2 \le z \le 1 \,\}.$$

Man erhält:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(V) &= \int_V 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{1} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)\,y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{3/2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3} \left[x \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^3 + \frac{3}{2} \, x \sqrt{1 - x^2} + \tfrac{3}{2} \arcsin x \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \, .$$

15.3 Schwerpunkt und Trägheitsmoment

Mit Hilfe so genannter **allgemeiner Riemannscher Summen** (vgl. Lehrbuch) lassen sich die folgenden Definitionen begründen:

Definition (15.3.1)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ bzw. $D \subset \mathbb{R}^3$ eine messbare Menge und $\rho : D \to \mathbb{R}$ eine stetige und nichtnegative Funktion, die die Massendichte von D beschreibt.

a) Der **Schwerpunkt** der Fläche bzw. des Körpers D ist dann gegeben durch

$$\mathbf{x}_s \quad := \quad \frac{\int\limits_D \rho(\mathbf{x})\,\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{x}}{\int\limits_D \rho(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}} \,.$$

Das Integral im Zähler ist dabei koordinatenweise auszuwerten.

b) Das **Trägheitsmoment** von D bezüglich einer vorgegebenen Drehachse wird definiert durch

$$\Theta_{\text{Achse}} \quad := \quad \int\limits_D \rho(\mathbf{x})\, r^2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

Dabei bezeichnet $r(\mathbf{x})$ den Abstand des Punktes $\mathbf{x} \in D$ von der Drehachse.

Beispiel (15.3.2)

Eine gerade, homogene Pyramide mit quadratischer Grundfläche (Kantenlänge a) und Höhe h lässt sich beschreiben durch

$$P \;=\; \left\{ (x,y,z)^{\mathsf{T}} :\; \mathrm{max}(\,|x|,\,|y|\,) \le \frac{a\,(h-z)}{2\,h}\,,\;\; 0 \le z \le h \right\}\,.$$

Für den Schwerpunkt $\mathbf{x}_s$ ergibt sich (bei konstanter Dichte $\rho = 1$):

$$\mathrm{vol}(P) \;=\; \int_0^h \int_{-a(h-z)/(2h)}^{a(h-z)/(2h)} \int_{-a(h-z)/(2h)}^{a(h-z)/(2h)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{3}\;a^2\;h$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(P)\cdot\mathbf{x}_s \;&=\; \int_0^h \int_{-a(h-z)/(2h)}^{a(h-z)/(2h)} \int_{-a(h-z)/(2h)}^{a(h-z)/(2h)} (x,y,z)^{\mathsf{T}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&=\; (0,0,\tfrac{1}{12}\,a^2\,h^2)^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

Damit wird $\mathbf{x}_s = (0,0,h/4)^{\mathsf{T}}$.

Beispiele (15.3.3)

Wir berechnen das Trägheitsmoment des Zylinders

$$Z \;=\; \left\{(x,y,z)^{\mathsf{T}} :\; x^2 + y^2 \;\leq\; r^2\,,\; -\ell/2 \leq z \leq \ell/2\right\}$$

bei konstanter Dichte $\rho = 1$ bezüglich der x–Achse:

$$\begin{aligned}
\Theta_{x-\mathsf{Achse}} &= \int\limits_Z (y^2+z^2)\,\mathsf{d}(x,y,z) \\
&= \int\limits_{-r}^{r} \int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int\limits_{-\ell/2}^{\ell/2} (y^2+z^2)\,\mathsf{d}z\,\mathsf{d}y\,\mathsf{d}x \\
&= \frac{\pi\,\ell\,r^2}{12}\,(3\,r^2+\ell^2)\,.
\end{aligned}$$

15.4 Der Transformationssatz

Der folgende Transformationssatz entspricht im Eindimensionalen der Substitutionsregel:

Satz (15.4.1) (Transformationssatz)

Sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^1–Abbildung. $D \subset U$ sei eine kompakte, messbare Menge, so dass Φ auf dem Innern von D einen C^1–Diffeomorphismus $\Phi|_{D^0} : D^0 \to \Phi(D^0)$ bildet. Dann ist auch das Bild $\Phi(D)$ kompakt und messbar, und für jede stetige Funktion $f : \Phi(D) \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int\limits_{\Phi(D)} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{D} f(\Phi(\mathbf{u}))\,|\det \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u})|\,\mathrm{d}\mathbf{u}\,.$$

Man beachte, dass die Bijektivität von Φ lediglich auf dem inneren Bereich D^0 gefordert wird, nicht jedoch auf dem Rand von D!

Beispiel (15.4.2) (Kugelkoordinaten)

Gesucht sei der Schwerpunkt eines (homogenen) Kugeloktanten:

$$V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \, \wedge \, x,y,z \geq 0 \} \, .$$

Zur Integration verwenden wir Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \cos\theta \\ r \sin\varphi \cos\theta \\ r \sin\theta \end{pmatrix} =: \mathbf{\Phi}(r,\varphi,\theta) \, .$$

Mit $D := [0,1] \times [0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$ gilt $\mathbf{\Phi}(D) = V$. Ferner ist $\mathbf{\Phi}$ auf D^0 ein C^1–Diffeomorphismus (nicht aber auf D!) und es gilt

$$\det(\mathbf{J\Phi}(r,\varphi,\theta)) = r^2 \cos\theta \, .$$

Mit dem Transformationssatz folgt

$$\mathrm{vol}(V) = \int_V d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos\theta \; d\theta \; d\varphi \; dr = \frac{\pi}{6}, \quad \text{sowie}$$

$$\mathrm{vol}(V)\cdot x_s \;=\; \int\limits_V x\,\mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} (r\cos\varphi\,\cos\theta)\, r^2 \cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= \int\limits_0^1 r^3\,\mathrm{d}r \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\;\mathrm{d}\varphi \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\theta\;\mathrm{d}\theta \;=\; \frac{\pi}{16}\,.$$

Damit ist $x_s = \frac{3}{8}$ und analog $y_s = z_s = \frac{3}{8}$, also $\mathbf{x}_s = \frac{3}{8}\cdot(1,1,1)^{\mathsf{T}}$.

Beispiel (15.4.3) (Das Gaußsche Fehlerintegral)

$$I \;:=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

lässt sich nicht durch analytische Berechnung einer Stammfunktion bestimmen. Durch einen *Poisson* zugeschriebenen Trick lässt sich die Berechnung jedoch auf die Berechnung eines Flächenintegrals zurückführen. Zunächst ist

$$I^2 = \Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\Big)^2 = \lim_{R\to\infty}\Big(\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_0^R \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\Big) = \lim_{R\to\infty} I_R\,,$$

mit $\quad I_R := \displaystyle\int_{[0,R]\times[0,R]} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)\,.$ Nun lässt sich I_R wie folgt abschätzen:

$$\int_{K_R} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) \;\leq\; I_R \;\leq\; \int_{K_{\sqrt{2}R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

Dabei sei K_ρ der Viertelkreis (1. Quadrant) mit Radius ρ, $\rho = R$ bzw. $\rho = \sqrt{2}R$. Die Integration über K_ρ erfolgt nun mit Hilfe der Transformation in Polarkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \end{pmatrix} =: \mathbf{\Phi}(r,\varphi)\,, \qquad \det(\mathbf{J\Phi}(r,\varphi)) = r.$$

$$\int\limits_{K_\rho} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) \;=\; \int\limits_0^{\rho} \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \;=\; \frac{\pi}{4}\,(1-\mathrm{e}^{-\rho^2})\,.$$

Damit hat man die Abschätzung:

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right) \;\le\; I_R \;\le\; \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2R^2}\right)$$

und hieraus $\lim\limits_{R\to\infty} I_R = \dfrac{\pi}{4}$, d.h. $\boxed{\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$