# 14. Anwendungen der Differentialrechnung

## 14.1 Extremwertberechnung

Gegeben sei eine $C^2$–Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, wobei $D$ offen sei. Wir interessieren uns für die Bestimmung der Extrema (Maxima und Minima) von $f$.

**Satz (14.1.1) (Notwendige Bedingungen)**

Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein lokales Extremum von $f$, so gelten:

**a)** $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$.

**b)** Ist $\mathbf{x}^0$ ein lokales Minimum von $f$, so ist die Hesse-Matrix $\boldsymbol{\nabla}^2 f(\mathbf{x}^0)$ positiv semidefinit; ist $\mathbf{x}^0$ ein lokales Maximum, so ist $\boldsymbol{\nabla}^2 f(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit.

**Satz (14.1.2) (Hinreichende Bedingungen)**

Für $\mathbf{x}^0 \in D$ gelten:

**a)** Ist $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ und ist $\nabla^2 f(\mathbf{x}^0)$ positiv (negativ) definit, so ist $\mathbf{x}^0$ ein strenges lokales Minimum (Maximum) von $f$.

**b)** Ist $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ und ist $\nabla^2 f(\mathbf{x}^0)$ indefinit, so ist $\mathbf{x}^0$ ein Sattelpunkt von $f$.

**Bemerkungen (14.1.3)**

**a)** Punkte $\mathbf{x}^0 \in D^0$ mit $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ heißen **stationäre Punkte** von $f$. Dies sind nicht zwingend lokale Extrema; in einem stationären Punkt sind durch die EVen zu positiven bzw. negativen EWen der Hesse–Matrix Richtungen gegeben, in denen $f$ wächst bzw. fällt.

**b)** Ein stationärer Punkt mit $\det \nabla^2 f(\mathbf{x}^0) = 0$, d.h. $\lambda = 0$ ist ein EW von $\nabla^2 f(\mathbf{x}^0)$, heißt **ausgeartet**. Ist $\mathbf{x}^0$ nichtausgearteter stationärer Punkt, so trifft genau einer der drei in (14.1.2) genannten Fälle zu.

**c)**

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x}^0 \text{ lokales Minimum} & \Leftarrow & \mathbf{x}^0 \text{ strenges lok. Minimum} \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ \nabla^2 f(\mathbf{x}^0) \text{ pos. semidef.} & \Leftarrow & \nabla^2 f(\mathbf{x}^0) \text{ pos. definit} \end{array}$$

Man beachte, dass hierbei in keinem Fall die Umkehrung der Implikation gilt!

**d)** Ist $f$ $C^3$-Funktion, $\mathbf{x}^0$ stationärer Punkt mit $\nabla^2 f(\mathbf{x}^0)$ pos. definit, so gibt es eine Umgebung von $\mathbf{x}^0$ und ein $C > 0$, so dass dort gilt:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \geq C \, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2.$$

**Beispiel (14.1.4)**

Gegeben sei $z = f(x,y) := y^2\,(x-1) + x^2\,(x+1)$.
Wir berechnen: $\nabla f(x,y) = (y^2 + 3\,x^2 + 2\,x\,,\, 2\,y\,(x-1))^{\mathsf{T}}$.
Damit hat $f$ die beiden stationären Punkte:

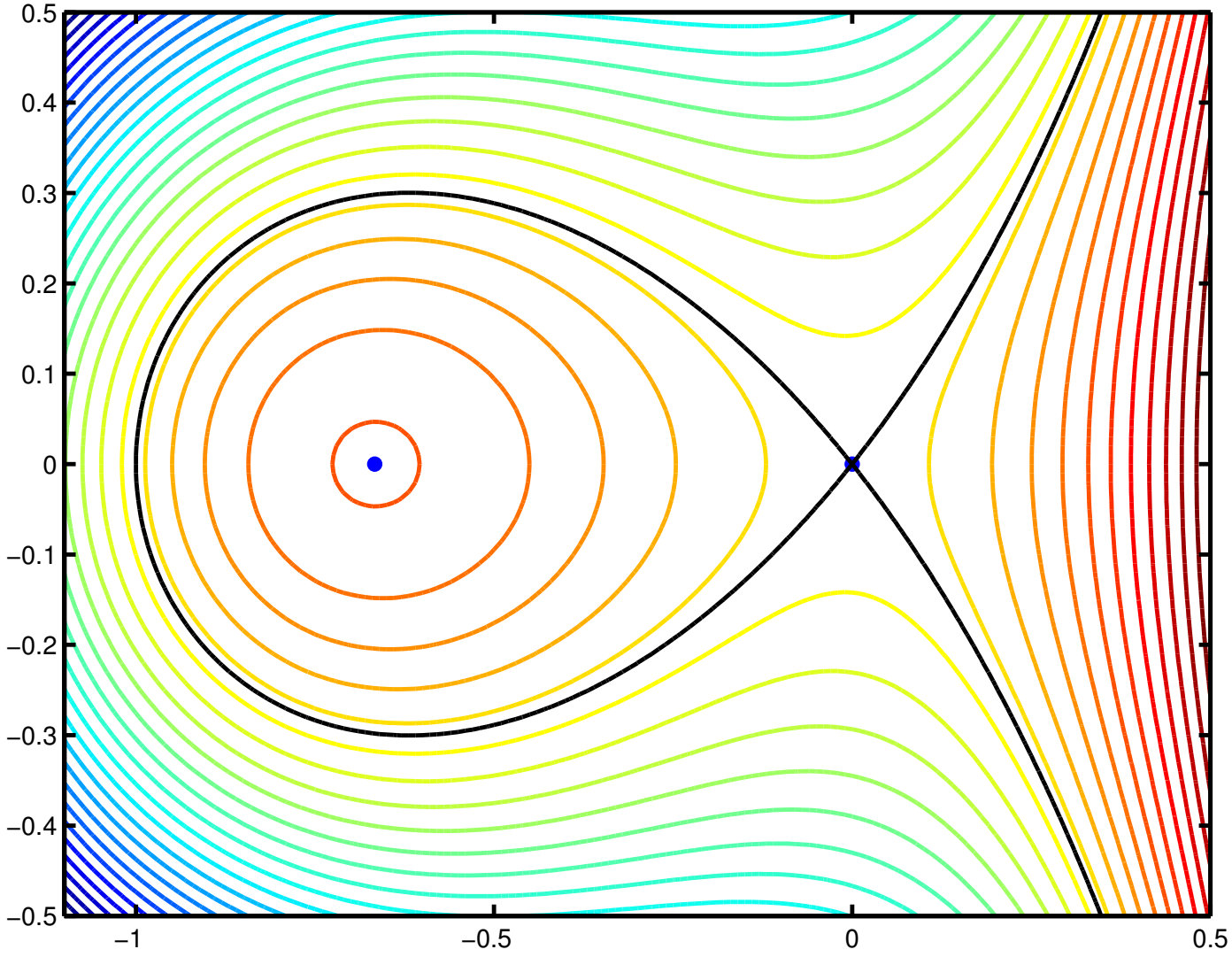
$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den Funktionswerten $f(\mathbf{x}^0) = 0,\ f(\mathbf{x}^1) = 4/27$.

Mit $f_{xx} = 6\,x + 2, \quad f_{xy} = 2\,y, \quad f_{yy} = 2\,(x-1)\,,$ ergibt sich:

$\nabla^2 f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit, $\mathbf{x}^0$ also Sattelpunkt,

$\nabla^2 f(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10/3 \end{pmatrix}$ neg. definit, $\mathbf{x}^1$ also strenges lokales Maximum.


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−1
−0.5
0
0.5

**Beispiel (14.1.5)**

Gegeben sei $z = f(x,y) := y\,x^2\,(4-x+y)$.
Wir berechnen: $\nabla f(x,y) = (xy(8-3x-2y)\,, x^2(4-x-2y))^{\mathsf{T}}$.
Damit hat $f$ die folgenden stationären Punkte:

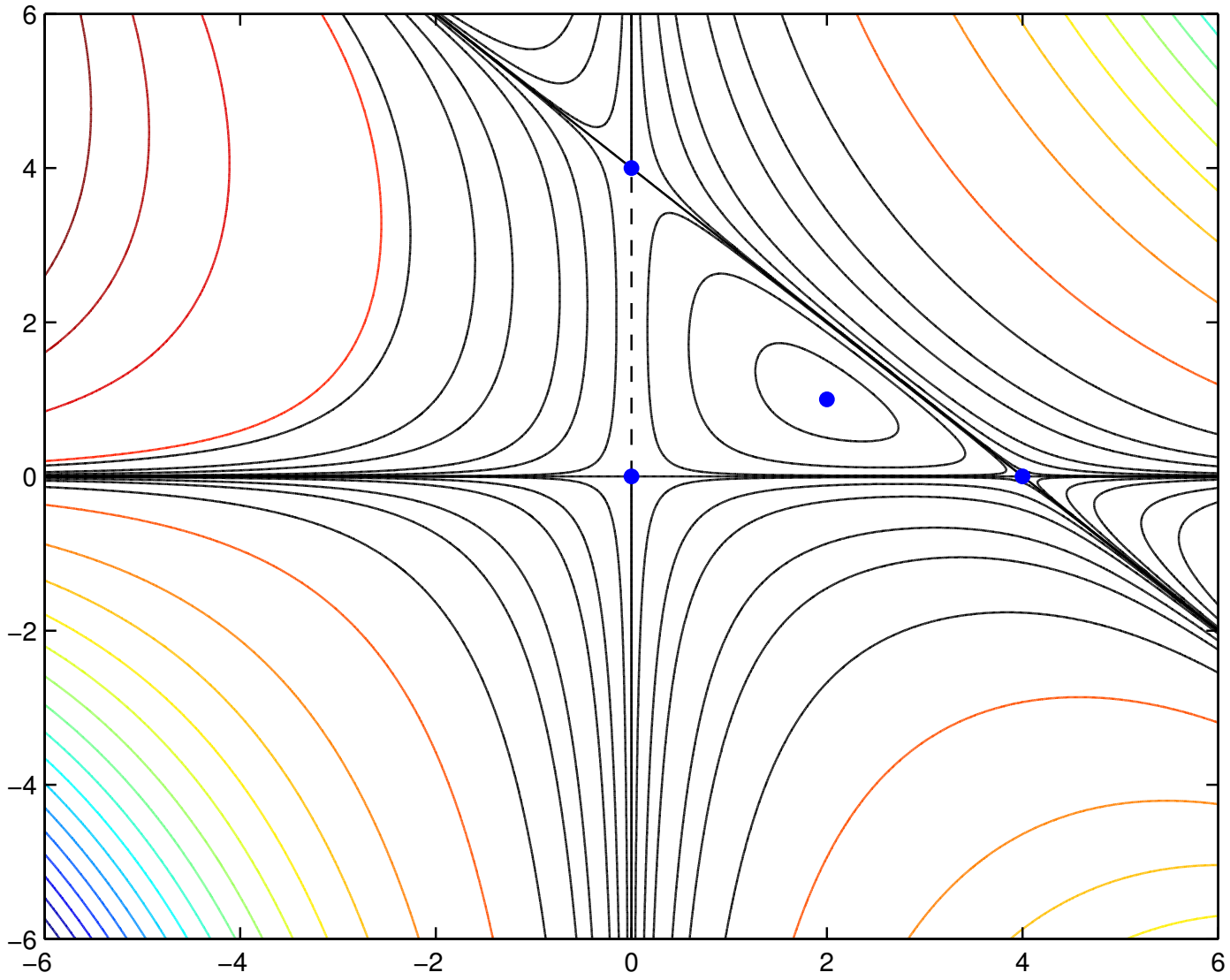
$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit den Funktionswerten $f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^1) = 0,\ f(\mathbf{x}^2) = 4$.

Mit $f_{xx} = y(8-6x-2y)$, $f_{xy} = x(8-3x-4y)$, $f_{yy} = -2x^2$ ergibt sich: $\nabla^2 f(\mathbf{x}^0)$ singulär, $\mathbf{x}^0$ ist also ausgeartet,

$\nabla^2 f(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ -16 & -32 \end{pmatrix}$ indefinit, $\mathbf{x}^1$ also Sattelpunkt,

$\nabla^2 f(\mathbf{x}^2) = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ neg. definit, $\mathbf{x}^2$ also strenges lokales Maximum.


6
4
2
0
−2
−4
−6
−6
−4
−2
0
2
4
6

## 14.2 Implizit definierte Funktionen

Wir fragen, ob man ein gegebenes Gleichungssystem $\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ bestehend aus $m$ Gleichungen in den $(n+m)$ Unbekannten $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ nach $m$ dieser Unbekannten (hier o.B.d.A. mit $\mathbf{y}$ bezeichnet) auflösen kann:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\,,\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \qquad (14.2.1)$$

Wir sagen in diesem Fall, die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^m$ wird durch das Gleichungssystem $\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ **implizit definiert**. Die Lösungsmenge des Gleichungssytems lässt sich dann (lokal) als Graph der Funktion $\mathbf{f}$ interpretieren.

**Beispiele (14.2.2)**

**a)** Die Kreisgleichung $g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0,\ r > 0,$ definiert implizit die vier Funktionen

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}, \quad -r \le x, y \le r.$$

**b)** Ist $\mathbf{g}$ in (14.2.1) eine affin-lineare Funktion, so hat man bei geeigneter Aufteilung der Variablen:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{y}+\mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\in\mathbb{R}^{(m,n)}, \mathbf{B}\in\mathbb{R}^{(m,m)}, \mathbf{b}\in\mathbb{R}^m.$$

Das Gleichungssystem ist nach den Variablen $\mathbf{y}$ auflösbar, falls die Matrix $\mathbf{B}$ regulär ist. Dann gilt

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}) =: \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Insbesondere ergibt sich für die Jacobi-Matrix der Funktion $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{J}\mathbf{f}(x) = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right), \quad \mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Zum Nachweis der Auflösbarleit von (14.2.1) nach $\mathbf{y}$ schreiben wir das Gleichungssystem als Fixpunktgleichung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \mathbf{y} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{y}\,. \qquad (14.2.3)$$

Dabei wird $\mathbf{x}$ als Parameter der Fixpunktgleichung betrachtet und $\mathbf{B}$ ist eine reguläre $(m, m)$-Skalierungsmatrix.

**Satz (14.2.4) (Parameterabhängiger Fixpunktsatz)**

Seien $U := \overline{K}_{\varepsilon_1}(\mathbf{x}^0)$ und $V := \overline{K}_{\varepsilon_2}(\mathbf{y}^0)$ abgeschlossene Kugeln mit Radien $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ um die Mittelpunkte $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^m$.

Die Funktion $\mathbf{h} : U \times V \to \mathbb{R}^m$ sei stetig, $L \in ]0, 1[$ und es mögen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

**a)** $\mathbf{h}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{y}^0$,

**b)** $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\| \leq L \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|, \ \forall\, \mathbf{x} \in U, \ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$,

**c)** $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^0) - \mathbf{y}^0\| \leq \varepsilon_2 (1 - L)$, für alle $\mathbf{x} \in U$.

Dann existiert eine *stetige* Funktion $\mathbf{f} : U \to V$ mit $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in U$.

**Satz (14.2.5) (Satz über implizite Funktionen)**

Sei $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathsf{C}^1$-Funktion mit $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen. $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in D$ sei ein Lösungspunkt, also $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$. Ferner sei die Jacobi–Matrix $\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ **regulär**.

Dann gibt es Umgebungen $U$ von $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ und $V$ von $\mathbf{y}^0 \in \mathbb{R}^m$, mit $U \times V \subset D$, sowie eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $\mathbf{f} : U \to V$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \;=\; \mathbf{y}^0 \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \;=\; \mathbf{0} \quad (\forall\, \mathbf{x} \in U).$$

Die Funktion $\mathbf{f}$ ist sogar *stetig differenzierbar* auf $U$ und für die Jacobi-Matrix von $\mathbf{f}$ gilt $(\forall\, \mathbf{x} \in U)$

$$\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \;=\; -\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right).$$

Die obige Formel für $\mathbf{Jf(x)}$ erhält man durch **implizite Differentiation** des Gleichungssystems $\mathbf{g(x,y)=0}$. Mit der Kettenregel folgt nämlich:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathbf{g(x,f(x))} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{(x,f(x))} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{(x,f(x))}\cdot \mathbf{Jf(x)} = \mathbf{0}$$

**Beispiele (14.2.6)**

**a)** Die Kreisgleichung $g(x,y) = x^2+y^2-r^2 = 0,\ r>0,$ erfüllt im Punkt $(x^0,y^0) := (0,r)$ die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen, da $g_y(0,r) = 2r \neq 0$. In einer Umgebung von $x^0 = 0$ ist die Kreisgleichung also nach $y = f(x)$ auflösbar und dies auch eindeutig, wenn man $f(0) = y^0 = +r$ verlangt. (Wir wissen ja schon: $y = +\sqrt{r^2-x^2},\ -r \leq x \leq r$).
Die Ableitungen von $f$ lassen sich nun implizit berechnen:

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -x/y = -x/\sqrt{r^2-x^2}.$$

**b)** Die Gleichung $g(x,y) := \mathrm{e}^{y-x} + 3\,y + x^2 - 1 = 0$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ eindeutig nach $y := f(x)$ auflösbar. Wegen $g_y = \mathrm{e}^{y-x} + 3 > 0$ ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar. Implizite Differentiation der Gleichung nach $x$ ergibt:

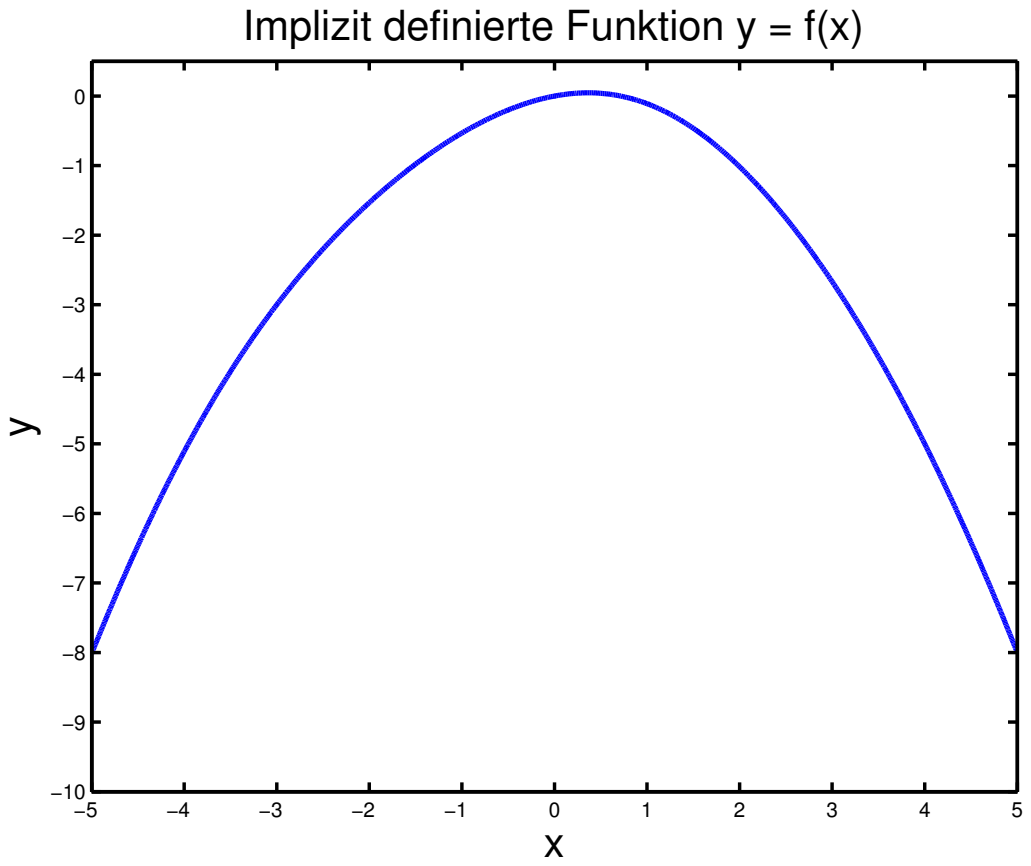
$$\mathrm{e}^{y-x}\,(y'-1) + 3\,y' + 2\,x = 0 \;\Rightarrow\; y' = \frac{\mathrm{e}^{y-x} - 2\,x}{\mathrm{e}^{y-x} + 3}\,.$$

Damit ist $f$ sogar eine $\mathrm{C}^2$–Funktion. Nochmaliges implizites Differenzieren ergibt:

$$\mathrm{e}^{y-x}\,y'' + \mathrm{e}^{y-x}\,(y'-1)^2 + 3\,y'' + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad y'' = -\,\frac{2 + \mathrm{e}^{y-x}\,(y'-1)^2}{\mathrm{e}^{y-x} + 3}\,.$$

Man beachte, dass hier eine *explizite* Auflösung nach $y$ nicht möglich ist. Die Funktion $f$ kann also ebenso wie die Ableitungen nur numerisch berechnet werden.




**Aufgabe:** Zeigen Sie, dass $f$ genau ein Extremum besitzt und bestimmen Sie dieses mit einer geeigneten Fixpunkt-Iteration.

## Implizite Darstellung ebener Kurven

Die Lösungsmenge einer skalaren Gleichung $g(x, y) = 0$ ($g$ hinreichend glatt) ist nach dem Satz über implizite Funktionen im Fall $\boldsymbol{\nabla} g = (g_x, g_y)^{\mathsf{T}} \neq \mathbf{0}$ lokal als Graph einer Funktion $y = f(x)$ oder $x = f(y)$ gegeben.

Lösungspunkte $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0)$ mit $\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$ heißen **regulär**, solche mit $\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ heißen **singuläre Lösungspunkte**.

Mittels der Taylor-Terme zweiter Ordnung lassen sich die singulären Lösungen von $g(x, y) = 0$ wie folgt klassifizieren:

$$\det \boldsymbol{\nabla}^2 g(\mathbf{x}^0) > 0 \;:\; \mathbf{x}^0 \quad \textbf{isolierter Punkt}$$

$$\det \boldsymbol{\nabla}^2 g(\mathbf{x}^0) < 0 \;:\; \mathbf{x}^0 \quad \textbf{Doppelpunkt}$$

$$\det \boldsymbol{\nabla}^2 g(\mathbf{x}^0) = 0 \;:\; \mathbf{x}^0 \quad \textbf{Rückkehrpunkt (Spitze)}$$

(Letzteres stimmt im Allg. nur dann mit der Anschauung überein, wenn die Terme dritter Ordnung nicht verschwinden.)

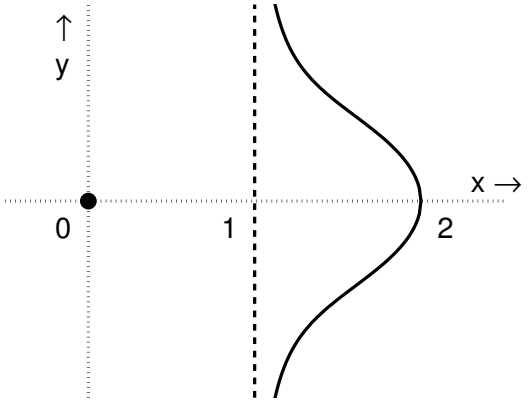
## Beispiele (14.2.7)

In folgenden Beispielen ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein singulärer Lösungspunkt.

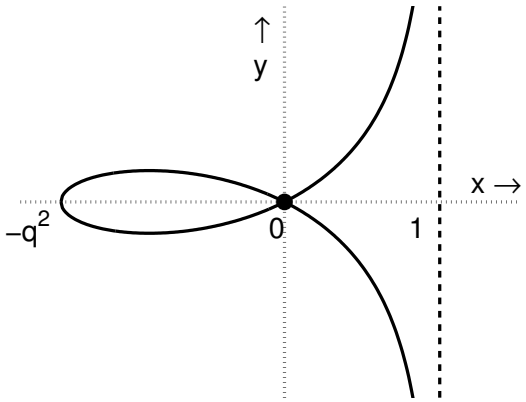
**a)** $g(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x-2)$

**b)** $g(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+q^2)$

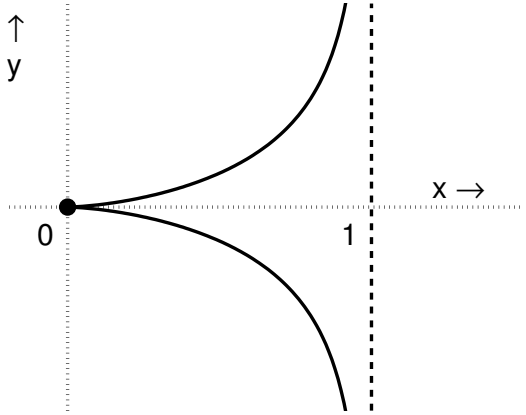
**c)** $g(x,y) = y^2(x-1) + x^3$




a)




b)




c)

## Implizite Darstellung von Flächen im $\mathbb{R}^3$

Die Lösungsmenge einer skalaren Gleichung $g(x, y, z) = 0$ ($g$ hinreichend glatt) ist nach dem Satz über implizite Funktionen im Fall $\boldsymbol{\nabla} g = (g_x, g_y, g_z)^\mathsf{T} \neq \mathbf{0}$ lokal als Graph einer Funktion $z = f(x, y)$ oder $y = f(x, z)$ oder $x = f(y, z)$ gegeben.

Die **Tangentialebene** an diese Fläche in einem regulären Lösungspunkt $\mathbf{x}^0$ lautet dann nach dem Taylorschen Satz (nur Terme erster Ordnung, implizite Darstellung):

$$\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{x}^0)^\mathsf{T} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 0. \tag{14.2.8}$$

Man findet also wiederum, dass der Gradient $\boldsymbol{\nabla} g(\mathbf{x}^0)$ auf der Fläche $g(x, y, z) = 0$ (Niveaumenge oder Äquipotentialfläche) senkrecht steht; vgl. auch (13.1.15).

## Das Umkehrproblem

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ eine $C^1$-Funktion und $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir fragen nach der (lokalen) Invertierbarkeit von $\mathbf{f}$. Dazu bringen wir das Gleichungssystem $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ in die Form $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := f(\mathbf{x}) - \mathbf{y} = \mathbf{0}$ und wenden auf $\mathbf{g}$ den Satz über implizite Funktionen an.

### Satz (14.2.9) (Umkehrsatz)

Ist die Jacobi–Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)$ für ein $\mathbf{x}^0 \in D$ regulär, so gibt es offene Umgebungen $U$ von $\mathbf{x}^0$ und $V$ von $\mathbf{y}^0 := \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, so dass die Funktion $\mathbf{f}$ den Bereich $U$ *bijektiv* auf $V$ abbildet.
Ferner ist die Umkehrabbildung $\mathbf{f}^{-1} : V \to U$ ebenfalls eine $C^1$-Funktion, und es gilt für alle $\mathbf{x} \in U$:

$$\mathbf{Jf}^{-1}(\mathbf{y}) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{-1}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

**Beispiel (14.2.10)**

Die Transformation des $\mathbb{R}^2$ mittels Polarkoordinaten

$$\mathbf{f} : ]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}(r,\varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^\mathsf{T}$$

ist wegen $\det \mathbf{Jf}(r,\varphi) = r$ an jeder Stelle $(r_0,\varphi_0)$ mit $r_0 > 0$ lokal invertierbar. Die Umkehrfunktion ist eine $\mathsf{C}^1$-Funktion mit der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{Jf}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}(r,\varphi).$$

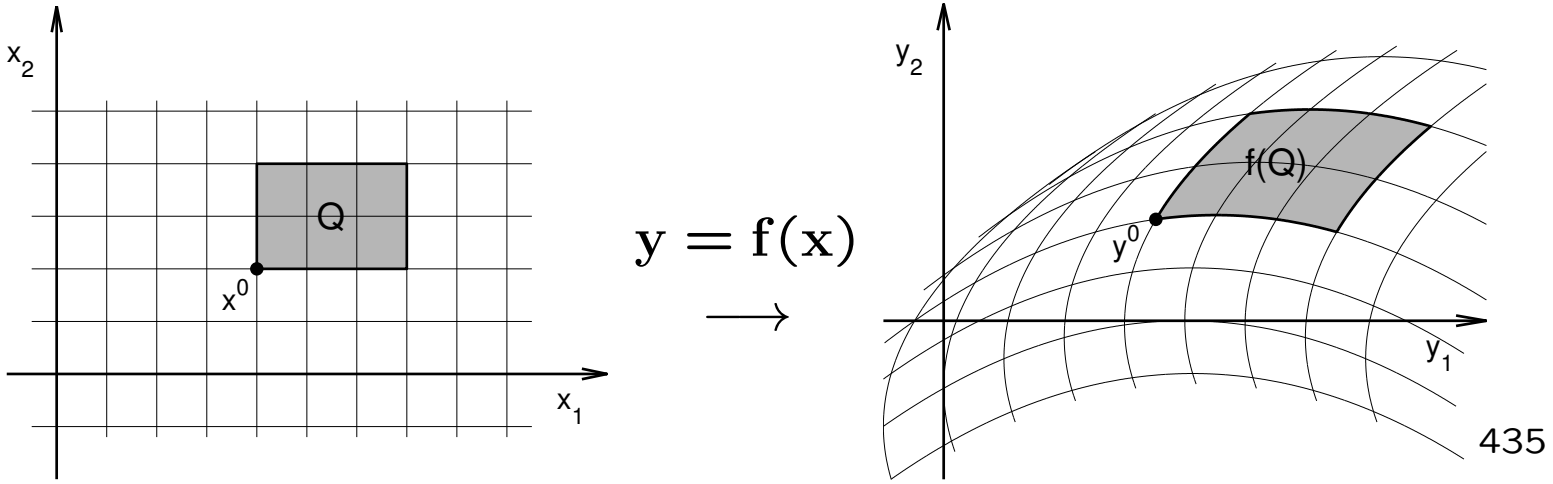
**Bemerkung (14.2.11)**

Bijektive $\mathsf{C}^1$-Funktionen, deren Umkehrungen ebenfalls $\mathsf{C}^1$-Abbildungen sind, werden auch **$\mathsf{C}^1$–Diffeomorphismen** genannt.

## Transformation von Volumina

Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ ein auf (offenen) Umgebungen $U_1$ von $\mathbf{x}^0 \in D$ und $U_2$ von $\mathbf{y}^0 := \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ definierter $C^1$-Diffeomorphismus.
Ein „kleines“ Volumen $V$ bei $\mathbf{x}^0$ wird dann auf ein „kleines“ Volumen $\tilde{V}$ bei $\mathbf{y}^0$ abgebildet. Für die (Vorzeichen-behafteten) Volumina gilt näherungsweise

$$\text{vol}\,(\tilde{V}) \;\approx\; \det(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)) \cdot \text{vol}\,(V)\,. \tag{14.2.12}$$



## 14.3 Gleichungsrestringierte Optimierung

Gesucht sind die Extremwerte einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen) auf einer Teilmenge $G$ des Definitionsbereichs, die durch Gleichungen der Form $g_i(\mathbf{x}) = 0$ definiert ist:

$$G := \{\mathbf{x} \in D : \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Dabei sei $\mathbf{g} := (g_1, \ldots, g_m)^\mathsf{T} : D \to \mathbb{R}^m (m < n)$ eine $\mathsf{C}^1$–Abbildung.

**Grundidee von Lagrange:** Ankopplung der Nebenbedingungen $g_i(\mathbf{x}) = 0$, mittels (unbekannter) **Lagrange–Multiplikatoren** $\lambda_i \in \mathbb{R}$ an die zu maximierende (minimierende) Funktion $f$. Man betrachtet also – anstelle von $f$ – die **Lagrange-Funktion**

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \qquad (14.3.1)$$

und maximiert (bzw. minimiert) diese für festes $\boldsymbol{\lambda}$ über dem gesamten Bereich $\mathbf{x} \in D$ (unrestringiert!).

**Satz (14.3.2) (Lagrange–Lemma)**

Minimiert bzw. maximiert $\mathbf{x}^0 \in D$ die Lagrange–Funktion $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ für ein festes $\boldsymbol{\lambda}$ über $D$ und gilt $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, so ist $\mathbf{x}^0$ zugleich ein globales Minimum bzw. Maximum von $f$ über der zulässigen Menge $G := \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

**Bemerkung (14.3.3)**

Sind $f$ und $\mathbf{g}$ $C^1$-Funktionen, so lautet die notwendige Bedingung für eine Extremalstelle $\mathbf{x}^0$ von $L$:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \;=\; \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{0}. \qquad (14.3.4)$$

(14.3.4) bildet zusammen mit $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ein Gleichungssystem für die $(n+m)$ Unbekannten $\mathbf{x}$ und $\boldsymbol{\lambda}$. Die Lösungen $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ sind gerade die Kandidaten für die gesuchten Extremalstellen **(notwendige Bedingung)**.

**Satz (14.3.5) (Lagrange–Multiplikatoren–Regel)**

Sind $f, \mathbf{g}$ $C^1$-Funktionen auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein lokales Extremum von $f$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ und gilt die **Regularitätsbedingung (constraint qualification)**

$$\text{Rang}\left(\mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)\right) = m,$$

so existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, so dass für die Lagrange–Funktion $L = f + \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}\mathbf{g}$ die **notwendige Bedingung erster Ordnung** (14.3.4) gilt: $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$.

**Beispiel (14.3.6)**

Gesucht ist ein Quader mit maximalem Volumen bei vorgegebener Oberfläche. Bezeichnen $x, y, z > 0$ die Kantenlängen, so ist die Funktion (Volumen) $f(x, y, z) := x\,y\,z$ zu maximieren unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) := x\,y + x\,z + y\,z - a = 0, \quad a > 0.$

Da die Regularitätsbedingung für zulässige Punkte erfüllt ist, lässt sich (14.3.5) anwenden. Mit der Lagrange-Funktion

$$L(x,y,z,\lambda) \;=\; x\,y\,z + \lambda\,(x\,y + x\,z + y\,z \;-\; a)$$

erhält man:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} L \;=\; \begin{pmatrix} y\,z & + & \lambda\,(y+z) \\ x\,z & + & \lambda\,(x+z) \\ x\,y & + & \lambda\,(x+y) \end{pmatrix} \;=\; \mathbf{0}.$$

Für zulässige Punkte $x, y, z > 0$ ist auch $\lambda \neq 0$ und man erhält die (eindeutig bestimmte) Lösung

$$x_0 = y_0 = z_0 = \sqrt{a/3}, \quad \lambda = -0.5\sqrt{a/3}, \quad f(\mathbf{x}_0) = (a/3)^{3/2}.$$

**Beispiel (14.3.7)**

Gesucht sind die Punkte auf der Parabel $y = x^2 - a$, die vom Ursprung den kürzesten Abstand haben.
Zu minimieren ist also die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = y - x^2 + a = 0$.

Mit der Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\,(y - x^2 + a)$ ergibt sich die notwendige Bedingung

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} L \;=\; \begin{pmatrix} 2\,x - 2\,\lambda\,x \\ 2\,y + \lambda \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergeben sich die Lösungen:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad x \;=\; 0, && y \;=\; -a, && \lambda \;=\; 2\,a \\ &\text{(ii)} \quad x \;=\; \pm\sqrt{a - 0.5}, && y \;=\; -\,0.5, && \lambda = 1. \end{aligned}$$

Die Lösungen (ii) sind nur für $a \geq 0.5$ erklärt. Durch (i) wird die Lösung für $a \leq 0.5$ beschrieben.

Die Beziehung (14.3.4) ist die „notwendige Bedingung erster Ordnung“ für gleichungsrestringierte Optimierungsaufgaben. Daneben lassen sich auch notwendige und hinreichende Bedingungen „zweiter Ordnung“ beweisen. Dazu nehmen wir an, dass die Funktionen $f$, $\mathbf{g}$ sogar zweifach stetig differenzierbar sind.

**Satz (14.3.8)**

**a) Notwendige Bedingung zweiter Ordnung:**

Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ lokales Minimum von $f$ auf $G$, ist die Regularitätsbedingung aus (14.3.5) erfüllt, so ist die Hesse–Matrix $\nabla^2_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})$ der Lagrange–Funktion positiv semidefinit auf dem Tangentialraum der zulässigen Menge $G$

$$T_G(\mathbf{x}^0) := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \ \nabla g_i(\mathbf{x}^0)^\mathsf{T} \mathbf{y} = 0, \ i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Dies bedeutet: $\forall\, \mathbf{y} \in T_G(\mathbf{x}^0) : \quad \mathbf{y}^\mathsf{T} \nabla^2_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})\, \mathbf{y} \geq 0.$

**b) Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung:**

Ist $\mathbf{x}^0 \in G$ und existieren Lagrange–Parameter $\boldsymbol{\lambda}$, so dass $\mathbf{x}^0$ stationärer Punkt der Lagrange–Funktion ist und deren Hesse–Matrix $\nabla^2_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda})$ positiv definit auf $T_G(\mathbf{x}^0)$ ist, so ist $\mathbf{x}^0$ ein strenges lokales Minimum von $f$ auf $G$.

**Beispiel (14.3.9)**

Zu minimieren sei die Funktion $f(x_1, x_2) := x_1\, x_2$ unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

Mit der Lagrange–Funktion $L(\mathbf{x}, \lambda) = x_1\, x_2 + \lambda\,(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ und den notwendigen Bedingungen $L_{x_1} = L_{x_2} = g = 0$ ergeben sich die folgenden vier Lösungskandidaten:

$$\lambda_{1,2} = 0.5 \quad : \quad \mathbf{x}^1 = \left(\sqrt{0.5}, -\sqrt{0.5}\right)^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{x}^2 = -\mathbf{x}^1$$

$$\lambda_{3,4} = -0.5 \quad : \quad \mathbf{x}^3 = \left(\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}\right)^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{x}^4 = -\mathbf{x}^3.$$

Wegen $f(\mathbf{x}^1) = f(\mathbf{x}^2) = -0.5$ und $f(\mathbf{x}^3) = f(\mathbf{x}^4) = 0.5$ sind $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ globale Minima und $\mathbf{x}^3$, $\mathbf{x}^4$ globale Maxima von $f$ auf $G$ .

Wir untersuchen die Bedingungen zweiter Ordnung für $\mathbf{x}^1$:

Mit $\boldsymbol{\nabla} g = 2\,\mathbf{x}$ ergibt sich der Tangentialraum zu $T_G(\mathbf{x}^1) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \ (\mathbf{x}^1)^{\mathsf{T}}\,\mathbf{y} \ = \ 0\}$. Ferner ist

$$\boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^1, \lambda_1) \ = \ \begin{pmatrix} 2\,\lambda_1 & 1 \\ 1 & 2\,\lambda_1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Hesse–Matrix der Lagrange–Funktion ist also *nicht* positiv definit auf $\mathbb{R}^2$, allerdings gilt für $\mathbf{y} \in T_G(\mathbf{x}^1) \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\mathbf{y}^{\mathsf{T}}\,\boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^1, \lambda_1)\,\mathbf{y} \ = \ (y_1 + y_2)^2 \ = \ 4\,y_1^2 \ > \ 0.$$

Damit ist die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung erfüllt und $\mathbf{x}^1$ ist ein strenges lokales (und sogar ein globales) Minimum von $f$ auf $G$.

## 14.4 Das Newton–Verfahren

Gegeben sei eine $C^1$–Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gesucht ist eine Nullstelle von $\mathbf{f}$, also eine Lösung $\mathbf{x}^* \in D$ des Gleichungssystems $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Die Taylor–Entwicklung von $\mathbf{f}$ um einen Startwert $\mathbf{x}^0 \in D$ lautet

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|)\,.$$

Setzt man hierin für $\mathbf{x}$ die gesuchte Nullstelle $\mathbf{x}^*$ ein und vernachlässigt man den Fehlerterm $\mathbf{o}(\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0\|)$, so erhält man

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)\,(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0) \;\approx\; -\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\,.$$

Als neue Näherung für $\mathbf{x}^*$ wählt man daher die Lösung $\mathbf{x}^1$ des *linearen Gleichungssystems*

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)\,(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0) \quad = \quad -\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\,. \tag{14.4.1}$$

Sofern die Jacobi–Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)$ regulär ist, besitzt (14.4.1) eine eindeutig bestimmte Lösung.

**Algorithmus (14.4.2)**

Wähle einen Startvektor $\mathbf{x}^0 \in D$, $\quad$ tol $> 0$
für $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$
$\quad$ Berechne $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}^k$ aus $\quad \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k)\, \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}^k \;=\; -\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\,,$
$\quad \mathbf{x}^{k+1} \;:=\; \mathbf{x}^k + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}^k\,,$
$\quad$ Abbruch, falls $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \;<\; \text{tol} \cdot \|\mathbf{x}^k\|$
end $k$

**Satz (14.4.3) (Skalierungsinvarianz)**

Das Newton–Verfahren ist invariant unter linearen Transformationen (Skalierungen) der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \to \quad \mathbf{g}(\mathbf{y}) \;:=\; \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{B}\,\mathbf{y}),$$

mit beliebigen (festen) regulären Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$.

**Satz (14.4.4) (Konvergenzsatz)**

Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ $C^1$–Funktion, $D$ offen, und $\mathbf{x}^* \in D$ eine Nullstelle von $\mathbf{f}$. Die Jacobi–Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$ sei regulär für alle $\mathbf{x} \in D$, und es gelte eine Lipschitz–Bedingung ($L > 0$)

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D : \quad \left\| \left(\mathbf{Jf}(\mathbf{x})\right)^{-1} \left(\mathbf{Jf}(\mathbf{y}) - \mathbf{Jf}(\mathbf{x})\right) \right\| \quad \leq \quad L \, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \, .$$

Dann ist das Newton–Verfahren (14.4.2) für alle Startwerte $\mathbf{x}^0 \in D$ mit $\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\| < 2/L =: r$ und $K_r(\mathbf{x}^*) \subset D$ wohldefiniert. Alle Newton–Iterierten $\mathbf{x}^k$ liegen in der Kugel $K_r(\mathbf{x}^*)$ und die Folge konvergiert **quadratisch** gegen $\mathbf{x}^*$:

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \quad \leq \quad (L/2) \, \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \, .$$

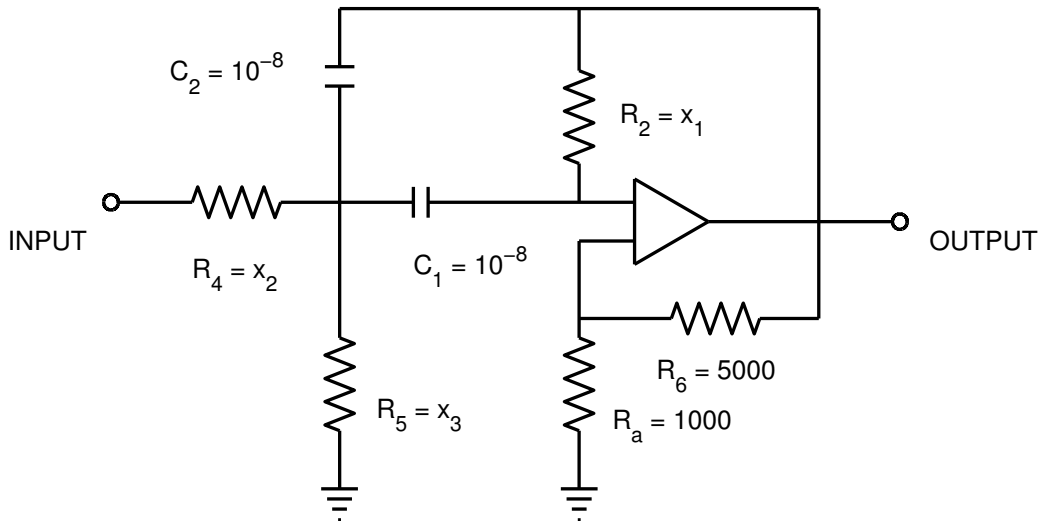
Ferner ist $\mathbf{x}^*$ die einzige Nullstelle von $\mathbf{f}$ innerhalb der Kugel $K_r(\mathbf{x}^*)$.

## Beispiel (14.4.5)

Die Transformation vom Eingangs- zum Ausgangssignal einer elektrischen Schaltung (aktiver Filter) wird beschrieben durch

$$T(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0}, \qquad a_1 = 1.2 \cdot 10^5 / x_2,$$

$$b_0 = \frac{(x_2 + x_3) \cdot 10^{10}}{x_1 x_2 x_3}, \qquad b_1 = \frac{2 \cdot 10^5}{x_1} - \frac{2 \cdot 10^4 (x_2 + x_3)}{x_2 x_3}$$



Die Widerstände $x_1, x_2, x_3$ sollen so angepasst werden, dass $a_1 = 1$, $b_0 = 40$ und $b_1 = 1$ gilt. Damit ergibt sich das folgende nichtlineare Gleichungssystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1.2 \cdot 10^5 / x_2 - 1 \\ \dfrac{(x_2 + x_3) \cdot 10^{10}}{x_1 x_2 x_3} - 40 \\ \dfrac{2 \cdot 10^5}{x_1} - \dfrac{2 \cdot 10^4 (x_2 + x_3)}{x_2 x_3} - 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Die Anwendung des Newton-Verfahrens mit den Startwerten $x_1 = x_2 = x_3 = 10^3$ liefert nach 14 Iterationen eine Lösung mit der relativen Genauigkeit von etwa 10 Dezimalziffern:

$$\mathbf{x}^* = (4.413911092 \cdot 10^4, 1.200000000 \cdot 10^5, 5.944486448 \cdot 10^3)^\mathsf{T}.$$

Anhand des Lösungsverlaufs ($\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}^k\|$) lässt sich die quadratische Konvergenz bestätigen.

## Das gedämpfte Newton-Verfahren

Zur Verbesserung der (globalen) Konvergenzeigenschaften des Newton–Verfahrens reduziert man „weit weg“ von der Lösung $\mathbf{x}^*$ die Länge der Newton–Korrektur $\mathbf{\Delta x}^k$, verwendet also anstelle von (14.4.2) die folgende modifizierte Newton–Iteration:

$$\begin{aligned} \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k)\,\mathbf{\Delta x}^k &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \lambda_k\,\mathbf{\Delta x}^k\,. \end{aligned} \tag{14.4.6}$$

Der **Dämpfungsparameter** $\lambda_k \in ]0,1]$ wird hierbei so gewählt, dass eine geeignete **Testfunktion** $T(\mathbf{x})$, etwa $T(\mathbf{x}) := \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$, in jedem Iterationsschritt fällt. Zur algorithmischen Bestimmung von $\lambda_k$ kann man eine einfache Halbierungsstrategie verwenden. Ferner lässt sich zeigen, dass man hiermit stets ein $\lambda_k > 0$ finden kann, für das die Testfunktion fällt.

**Algorithmus (14.4.7) (Schrittweitenbestimmung)**

$\mu := \lambda_{-1} := 1$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$

Wähle $\lambda_k \in \{\mu, \mu/2, \mu/4, \mu/8, \ldots\}$ maximal, mit

$$T(\mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta\mathbf{x}^k) < T(\mathbf{x}^k)$$

Abbruch, falls $\lambda_k < \lambda_{\min}$

$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta\mathbf{x}^k$

$$\mu := \begin{cases} \min(1, 2\,\lambda_k), & \text{falls} \quad \lambda_k = \lambda_{k-1} \\ \lambda_k, & \text{sonst} \end{cases}$$

end $k$

In der Literatur findet man ausgefeiltere Strategien zur Schrittweitenbestimmung, insbesondere ist es günstig, skalierungsinvariante Testfunktionen zu verwenden.

## Nichtlineare Ausgleichsprobleme

Ein häufig auftretendes Problem ist die Anpassung einer parameterabhängigen Funktion an vorgegebene Messdaten. Gegeben seien Messdaten $(t_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, m$, sowie eine **Ansatzfunktion** $y = f(t; \mathbf{x})$, wobei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ die Parameter beschreibt. Es wird angenommen, dass $n << m$ ist, also mehr Messdaten zur Verfügung stehen als Parametern.

Aufgabe ist es, die Funktion $g(\mathbf{x}) := \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|_2^2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, zu minimieren. Dabei ist

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := (f(t_1; \mathbf{x}), \ldots, f(t_m; \mathbf{x}))^\mathsf{T}, \quad \mathbf{y} := (y_1, \ldots, y_m)^\mathsf{T}.$$

Die Grundidee des Newton–Verfahrens, ein nichtlineares Gleichungssystem in der Nähe einer Iterierten $\mathbf{x}^k$ durch Linearisierung näherungsweise zu lösen, lässt sich auf nichtlineare Ausgleichsprobleme übertragen. Dieses Verfahren geht auf Gauß zurück und wird **Gauß–Newton–Verfahren** genannt.

Sei $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ Näherung für eine Lösung $\mathbf{x}^*$ des Ausgleichsproblems. Wie ersetzen $\mathbf{F}$ durch das lineare Taylor–Polynom zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}^k$:

$$g(\mathbf{x}) \;\approx\; \tilde{g}(\mathbf{x}) \;:=\; \| \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{JF}(\mathbf{x}^k)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \;-\; \mathbf{y} \,\|_2^2 \,.$$

Die Minimierung von $\tilde{g}$ (anstelle von $g$) bildet nun eine *lineare* Ausgleichsaufgabe, deren Lösung $\mathbf{x}^{k+1}$ z.B. mittels QR-Zerlegung (Householder/Givens) berechnet werden kann.

**Algorithmus (14.4.8) (Gauß–Newton–Verfahren)**

Wähle einen Startvektor $\mathbf{x}^0 \in D$, $\quad$ tol $> 0$
für $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$
$\quad$ Berechne $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}^k$ aus der Minimierung von
$\quad \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{JF}(\mathbf{x}^k)\,\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}^k - \mathbf{y}\,\|_2^2 \,,$
$\quad$ Berechne eine Schrittweite $\lambda_k > 0$,
$\quad \mathbf{x}^{k+1} \;:=\; \mathbf{x}^k \;+\; \lambda_k\,\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}^k \,,$
$\quad$ Abbruch, falls $\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}^k\| \;<\; \text{tol} \cdot \|\mathbf{x}^k\|$
end $k$.

In **MATLAB** steht professionelle Software zur Lösung nichtlinearer Ausgleichsaufgaben zur Verfügung. Standardaufruf ist

$$[\mathbf{x}, \text{resnorm}, \textbf{residual}] \;=\; \text{lsqnonlin}(@\text{fun}, \mathbf{x}0)$$

Dabei ist fun eine *function* (Unterprogramm) zur Berechnung des Residuums $\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$, $\mathbf{x}0$ ist ein vorzugebender Startvektor. Der Lösungsvektor ist durch $\mathbf{x}$ gegeben, **residual** gibt den optimalen Residuenvektor $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}$ an und resnorm dessen Euklidische Norm.

**Beispiel (14.4.9) (Blutspiegelmessungen)**

Die Konzentration eines Arzneistoffes im Blutplasma (der Blutspiegel) wird nach der Einnahme (Zeit $t = 0$) vereinfachend durch die so genannte Bateman-Funktion* beschrieben:

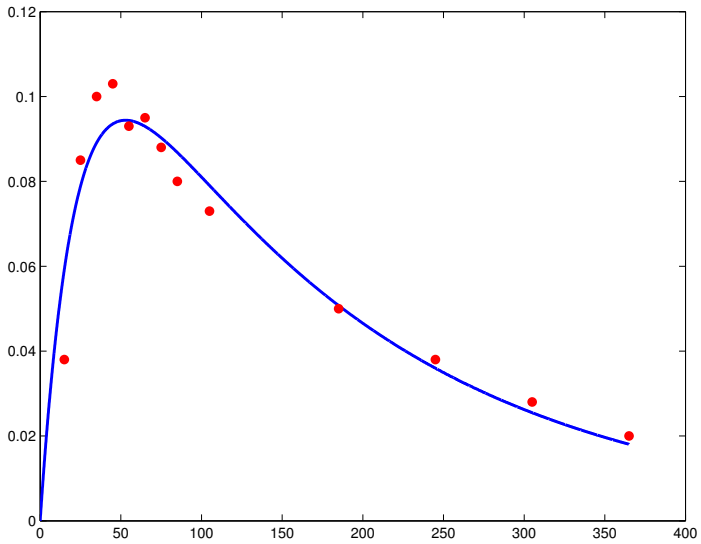
*benannt nach dem brit. Mathematiker Harry Bateman (1882–1946)

$$y(t; \mathbf{x}) := x_3 \, [\exp(-x_1 \, t) - \exp(-x_2 \, t)]$$

Aufgabe ist es, die Parameter $x_1, x_2, x_3$ so zu bestimmen, dass diese Funktion möglichst gut die folgenden Messdaten wiedergibt:

| $t_i$ : | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 | 85 | 105 | 185 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ : | 0.038 | 0.085 | 0.1 | 0.103 | 0.093 | 0.095 | 0.088 | 0.08 | 0.073 | 0.05 |

| $t_i$ : | 245 | 305 | 365 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ : | 0.038 | 0.028 | 0.02 |




$$x_1^* = 0.0057$$

$$x_2^* = 0.0443$$

$$x_3^* = 0.1470$$