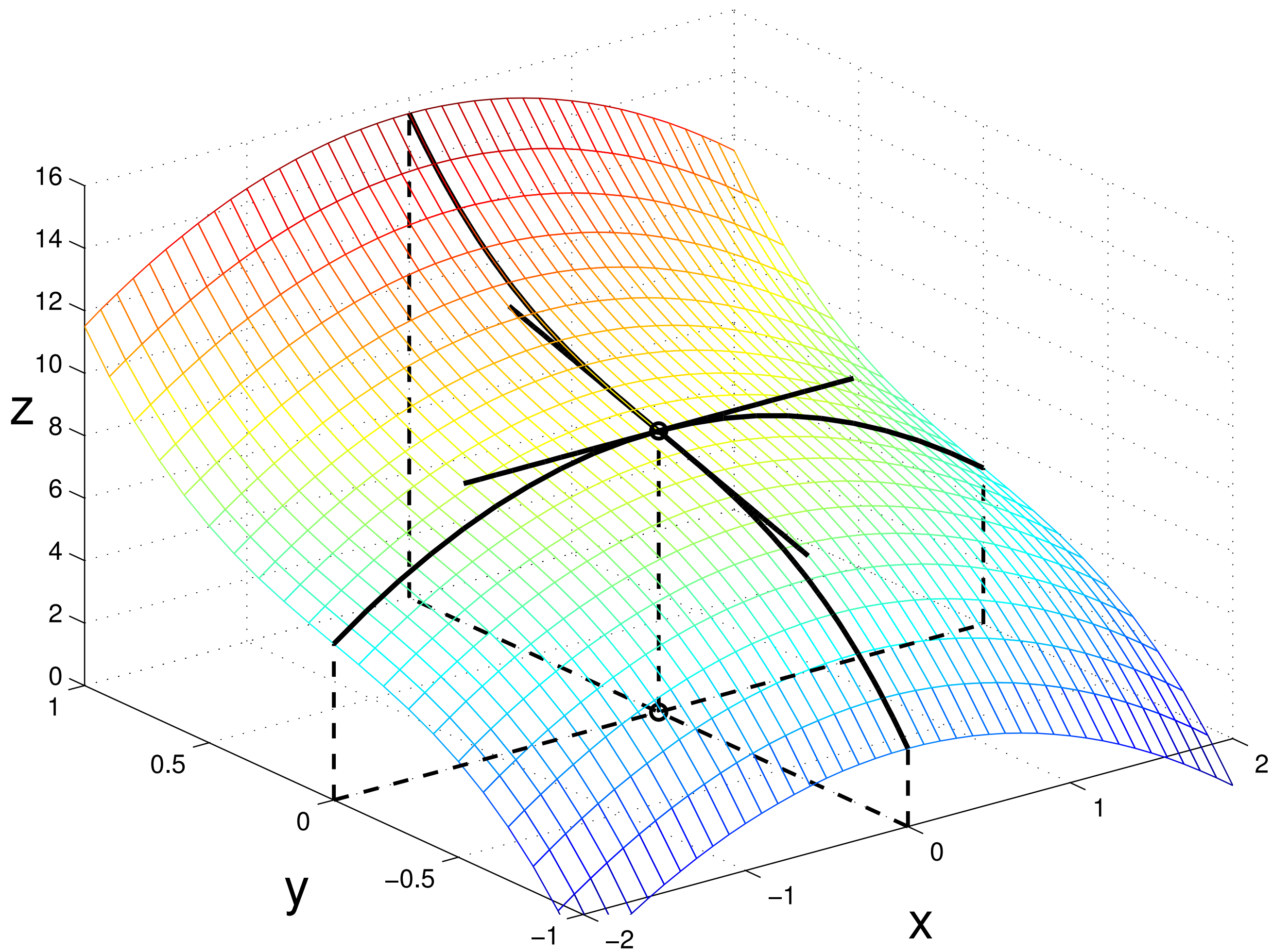
12. Partielle Ableitungen

12.1 Partielle Ableitungen erster Ordnung

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, also eine skalare Funktion von n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$.
Hält man alle Variablen $x_1, \ldots, x_{i-1}$ und $x_{i+1}, \ldots, x_n$ fest und differenziert nach der verbleibenden Variablen x_i, so ergibt sich die **partielle Ableitung** von f nach der Variablen x_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) &:= \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots x_n^0) \; - \; f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots x_n^0)}{t}\end{aligned}$$

Dabei: $\mathbf{x}^0$ innerer Punkt von D, $\mathbf{e}_i$: i-ter Einheitsvektor.



16
14
12
10
z
8
6
4
2
0
1
0.5
0
y
−0.5
−1
−2
−1
0
x
1
2

Definition (12.1.1)

a) Ist f in allen Punkten $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar nach x_i, so heißt f **partiell differenzierbar nach der Koordinate x_i** und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bezeichnet die Abbildung $\mathbf{x}^0 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)$.

b) Trifft dies für alle Koordinaten x_i, $i = 1, \ldots, n$, zu, so heißt die Funktion f **partiell differenzierbar**.

c) Sind sämtliche partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ darüber hinaus stetig auf D, so heißt f **stetig partiell differenzierbar**, oder eine **C^1–Funktion**.

d) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)$ ist die (eindimensionale!) Ableitung der „partiellen" Funktion

$$x_i \quad \mapsto \quad f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

an der Stelle x_i^0. Sie wird auch mit $f_{x_i}(\mathbf{x}^0)$ bezeichnet.

e) Sind die Funktionen f und g auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, so gelten die üblichen **Differentiationsregeln**:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha\, f(\mathbf{x}) + \beta\, g(\mathbf{x})) \;=\; \alpha\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \beta\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \qquad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) \;+\; f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right) \;=\; \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^2}, \qquad g(\mathbf{x}) \neq 0.$$

Beispiele (12.1.2)

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) := 3\,x\,z + y\,\sin(x) + z\,\mathrm{e}^y$ ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} \;=\; 3\,z + y\,\cos(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \;=\; \sin(x) + z\,\mathrm{e}^y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \;=\; 3\,x + \mathrm{e}^y\,.$$

b) Der Schalldruck einer räumlich eindimensionalen Schallwelle ist gegeben durch die Funktion

$$p(x,t) \;:=\; A\,\sin(\alpha x - \omega t)\;.$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha\, A\,\cos(\alpha x - \omega t)$ beschreibt dann zu einem festen Zeitpunkt t die örtliche Änderung des Schalldrucks. Analog beschreibt $\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega\, A\,\cos(\alpha x - \omega t)$ an einem festen Ort x die zeitliche Änderung des Schalldrucks.

Anwendung (12.1.3)

Die **Tangentialebene** einer C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ im Punkt $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0)^T$ ist nach der Abb. auf Seite 352 gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x^0, y^0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x^0, y^0). \end{pmatrix}$$

Elimination von λ und μ ergibt

$$z - f(\mathbf{x}^0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}^0)\,(x - x^0) \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}^0)\,(y - y^0) \qquad (12.1.4)$$

Beispiel (12.1.5)

Die Funktion $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$ besitzt die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2\,x\,y}{(1 + x^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

Damit lautet die Gleichung der Tangentialebene an f im Punkt $\mathbf{x}^0 = (1, 2)^\mathsf{T}$:

$$z - 1 \;=\; (-1) \cdot (x - 1) \;+\; \frac{1}{2} \cdot (y - 2)\,.$$

Satz (12.1.6)

Ist $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, D offen, $\mathbf{x}^0 \in D$, so ist die Tangentialebene an den Graphen von f in $\mathbf{x}^0$ gegeben durch

$$z - f(\mathbf{x}^0) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \cdot (x_i - x_i^0)$$

Definition (12.1.7)

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) \quad := \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0)\right)^{\mathsf{T}}$$

heißt der **Gradient** der Funktion f im Punkt $\mathbf{x}^0 \in D$.

$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\mathsf{T}}$ heißt auch **Nabla-Operator**.

Differentiationsregeln (12.1.8)

$$\begin{aligned}
\nabla(\alpha f + \beta g) &= \alpha \nabla f + \beta \nabla g \\
\nabla(f \cdot g) &= g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g \\
\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}, \qquad g(\mathbf{x}) \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Beispiele (12.1.9)

a) $f(x,y) := \mathrm{e}^x \cdot \cos y$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos y, -\mathrm{e}^x \sin y)^\mathsf{T} = \mathrm{e}^x (\cos y, -\sin y)^\mathsf{T}.$$

b) Abstandsfunktion $\quad r(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2\,x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r(\mathbf{x})}, \qquad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

c) $\nabla(r(\mathbf{x})^k) = k\, r(\mathbf{x})^{k-1}\, \nabla r(\mathbf{x}) = k\, r(\mathbf{x})^{k-2}\, \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\ k \in \mathbb{Z}.$

d) Zentrales Gravitationsfeld von zwei Massenpunkten m (im Punkt $\mathbf{x}$) und M (im Punkt $\mathbf{0}$): $\quad \mathbf{K} = -\gamma\, m\, M\, \mathbf{x}/r(\mathbf{x})^3$

$\gamma \approx 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2\mathrm{kg}^{-2}$ ist die Gravitationskonstante.

Der Vergleich mit c) zeigt: Es gibt eine Funktion $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$, nämlich $\Phi(\mathbf{x}) := \gamma\, m\, M/r$, für die $\nabla\Phi = \mathbf{K}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt, Φ heißt ein **Potential** für das Gravitationsfeld $\mathbf{K}$.

Bemerkung (12.1.10)

Die partielle Differenzierbarkeit einer Funktion impliziert **nicht** deren Stetigkeit!!

Gegenbeispiel: $$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x\,y}{(x^2+y^2)^2} & \text{, für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Satz (12.1.11)

Ist $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung eines inneren Punktes $\mathbf{x}^0 \in D$ stetig partiell differenzierbar, so ist auch f im Punkt $\mathbf{x}^0$ stetig.

12.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Für eine partiell diffb. Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, können die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ selbst wieder partiell differenzierbar sein. Ist dies der Fall, so erhalten wir die **partiellen Ableitungen zweiter Ordnung** der Funktion f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \qquad \text{bzw. allgemeiner}$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right), \quad k \geq 2 \,.$$

Beispiel (12.2.1) $f(x,y) := x^3 \sin y + x^4 y^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3\,x^2 \sin y + 4\,x^3 y^2\right) = 6\,x \sin y + 12\,x^2 y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \cos y + 2\,x^4 y\right) = 3\,x^2 \cos y + 8\,x^3 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3\,x^2 \sin y + 4\,x^3 y^2\right) = 3\,x^2 \cos y + 8\,x^3 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 \cos y + 2\,x^4 y\right) = -x^3 \sin y + 2\,x^4$$

Satz (12.2.2) (Vertauschbarkeitssatz von Schwarz)

Ist $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion auf D, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad \forall\,\mathbf{x} \in D,\; i,j \in \{1,\ldots,n\}\,.$$

Hermann Amandus Schwarz:

Hermann Amandus Schwarz wurde am 25.1.1843 in Hermsdorf (Schlesien) geboren und starb am 30.11.1921 in Berlin. Er studierte in Berlin und wurde 1864 bei Kummer promoviert. Ab 1867 war er Professor, zunächst in Halle, dann in Zürich und Göttingen. Ab 1892 lehrte er an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin. Schwarz arbeitet überwiegend im Bereich der Funktionentheorie, der Theorie von Minimalflächen und der Differentialgleichungen.

Bemerkung (12.2.3)

Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist eine wesentliche Voraussetzung des Vertauschbarkeitssatzes von Schwarz!!

Gegenbeispiel: $$f(x,y) := \begin{cases} x\,y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\ \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beispiel (12.2.4)

Will man für die Funktion

$$f(x,y,z) \;:=\; y^2\,z\,\sin(x^3) \,+\, (\cosh y + 17\,\mathrm{e}^{x^2})\,z^2$$

die partielle Ableitung dritter Ordnung f_{xyz} berechnen, so kann man aufgrund des Satzes von Schwarz zunächst nach z differenzieren:

$$f_{xyz} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[y^2 \sin(x^3)] + 2\,z\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[\cosh y + 17\,\mathrm{e}^{x^2}] = 6\,y\,x^2\,\cos(x^3).$$

Der Laplace-Operator (12.2.5)

$$\Delta \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\,, \qquad \Delta u(\mathbf{x}) \;=\; u_{x_1x_1}(\mathbf{x}) + \ldots + u_{x_nx_n}(\mathbf{x})\,.$$

Potentialgleichung/Poisson–Gleichung: $\quad \Delta u(\mathbf{x}) \;=\; f(\mathbf{x})$

Wellengleichung: $\quad \Delta u(\mathbf{x},t) - \dfrac{1}{c^2}\, u_{tt}(\mathbf{x},t) \;=\; 0$

c: Wellengeschwindigkeit

Wärmeleitungsgleichung: $\quad \Delta u(\mathbf{x},t) - \dfrac{1}{k}\, u_t(\mathbf{x},t) \;=\; \varphi(\mathbf{x},t)$

k: Temperaturleitfähigkeit, $\quad \varphi$: innere Wärmequellen

Pierre Simon Marquise de Laplace:

Pierre Simon Laplace war ein französischer Mathematiker, Physiker und Astronom. Er wurde am 28.3.1749 in der Normandie geboren und starb am 5.3.1827 in Paris. Im Bereich der Astronomie verfasste Laplace ein bedeutendes fünfbändiges Standardwerk über die Himmelsmechanik. In der Mathematik arbeitete er über Wahrscheinlichkeitstheorie und Differentialgleichungen. Nach ihm benannt sind der Laplacesche Entwicklungssatz, der Laplace-Operator, die Laplace-Gleichung sowie die Laplace-Transformation.

Beispiel (12.2.6)

Wir berechnen den Laplace-Operator Δu für eine Funktion $u = u(r)$, die nur vom Abstand r des Punktes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vom Ursprung abhängt. Mit $r := \|\mathbf{x}\|_2$ und (12.1.9) b) findet man

$$\Delta u(r) \;=\; u''(r) \;+\; \frac{n-1}{r}\, u'(r)\,.$$

Folgerungen (12.2.7)

- Die Funktion $u(r) := \begin{cases} \ln r & , \quad \text{für} \quad n = 2 \\ r^{2-n} & , \quad \text{für} \quad n > 2 \end{cases}$ ist eine radialsymmetrische Lösung der Potentialgleichung auf $D := \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

- Die Funktion $u(\mathbf{x}, t) := \dfrac{1}{r} \cos(r - c\,t)$ ist eine radialsymmetrische Lösung der Wellengleichung auf $D := \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

12.3 Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen

Gegeben: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^m$, also eine vektorwertige Funktion von n Variablen, $n, m > 1$, D offen.

$\mathbf{f}$ heißt **partiell differenzierbar** in $\mathbf{x}^0 \in D$, falls für alle $i = 1, \ldots, n$ die folgenden Grenzwerte existieren

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \quad := \quad \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\,\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t}\,.$$

Die partiellen Ableitungen lassen sich also komponentenweise berechnen

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \quad = \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)\right)^{\top}. \qquad (12.3.1)$$

$\mathbf{f}$ heißt eine **$\mathbf{C}^k$–Funktion**, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, wenn jede Komponentenfunktion f_i k-fach stetig partiell differenzierbar ist.

Definition (12.3.2)

Fasst man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}$ (Spaltenvektoren) zu einer Matrix zusammen, so erhält man die so genannte **Jacobi–Matrix**, auch **Funktionalmatrix** genannt, der Funktion $\mathbf{f}$

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), & \ldots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}^0)^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}^0)^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}.$$

Beispiel (12.3.3)

Für $\mathbf{f}(r,t) := (r\cos t, r\sin t, rt)^{\mathsf{T}}$ lautet die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{Jf}(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \\ t & r \end{pmatrix}.$$

Carl Gustav Jacobi:

Carl Gustav Jacobi wurde am 10.12.1804 in Potsdam geboren und starb am 18.2.1851 in Berlin. Er studierte ab 1821 in Berlin, wo er 1825 promoviert wurde. Ab 1825 war er Privatdozent, zunächst in Berlin, dann in Königsberg, wo er 1829 zum ordentlichen Professor ernannt wurde. Er war ein sehr vielseitiger und produktiver Mathematiker. Jacobi gilt als Begründer der Theorie der elliptischen Funktionen. Er arbeitete u.a. zur Differentialgeometrie, zu den partiellen Differentialgleichungen und zur Variationsrechnung (Hamilton-Jacobi-Theorie). Nach ihm benannt sind u.a. die Jacobi-Matrix, die Jacobi-Polynome, das Jacobi-Verfahren für lineare Gleichungssysteme und für die Eigenwertberechnung, das Jacobi-Feld und der Jacobi-Perron Algorithmus.

Definition (12.3.4)

Eine Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ (also $m = n$) heißt ein **Vektorfeld** auf D. Ist $\mathbf{f}$ zudem eine C^k–Funktion, so heißt $\mathbf{f}$ ein **C^k–Vektorfeld**, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Ist $\Phi : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ eine skalare, partiell differenzierbare Funktion, so ist der Gradient $\boldsymbol{\nabla}\Phi$ ein Vektorfeld auf D, das so genannte **Gradientenfeld** von Φ.

Definition (12.3.5)

Für ein part. diffb. Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$, D offen, definieren wir die **Divergenz** durch

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \quad := \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \, .$$

Differentiationsregeln (12.3.6)

Linearität: $\operatorname{div}(\alpha\,\mathbf{f} + \beta\,\mathbf{g}) \;=\; \alpha \operatorname{div}\mathbf{f} + \beta \operatorname{div}\mathbf{g}\,,$

Produktregel: $\operatorname{div}(\varphi\,\mathbf{f}) \;=\; \langle \boldsymbol{\nabla}\varphi\,,\,\mathbf{f}\rangle + \varphi \operatorname{div}\mathbf{f}\,.$

Laplace–Operator: $\Delta f \;=\; \operatorname{div}(\boldsymbol{\nabla} f).$

Beispiel (12.3.7) Mit $r := \|\mathbf{x}\|_2$ und $k \in \mathbb{N}$ findet man:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{x}}{r^k}\right) &= \left\langle \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r^k}\,,\,\mathbf{x}\right\rangle + \frac{1}{r^k}\operatorname{div}\mathbf{x} \\ &= \left\langle -k\,r^{-(k+2)}\,\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\right\rangle + \frac{1}{r^k}\,n \quad = \quad \frac{n-k}{r^k}\,.\end{aligned}$$

Für $k = n = 3$ folgt, dass **zentrale Kraftfelder**

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \;=\; c\,\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad c = \text{const.},$$

divergenzfrei sind.

Definition (12.3.8)

Für ein part. diffb. Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \supset D \to \mathbb{R}^3$, D offen, definieren wir die **Rotation** durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \,,\, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \,,\, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^{\mathsf{T}} \Bigg|_{\mathbf{x}^0} .$$

Formale Schreibweise:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} .$$

Differentiationsregeln (12.3.9)

Linearität: $\operatorname{rot}(\alpha\, \mathbf{f} + \beta\, \mathbf{g}) = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{f} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{g}$

Produktregel: $\operatorname{rot}(\varphi\, \mathbf{f}) = (\boldsymbol{\nabla}\, \varphi) \times \mathbf{f} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{f}$.

Satz von Schwarz: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \mathbf{0}$, d.h.
Gradientenfelder sind rotationsfrei!

Beispiele (12.3.10)

a) $\mathbf{f}(x,y,z) := (-y, x^2\,y, y\,z^2)^\mathsf{T}$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot}\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x^2\,y & y\,z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2\,x\,y+1 \end{pmatrix}.$$

b) Für einen festen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ beschreibt die Funktion $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ das Geschwindigkeitsfeld der Drehung des $\mathbb{R}^3$ um die Achse $\mathbf{a}$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \|\mathbf{a}\|$.

Explizite Berechnung der Rotation ergibt $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 2\,\mathbf{a}$.