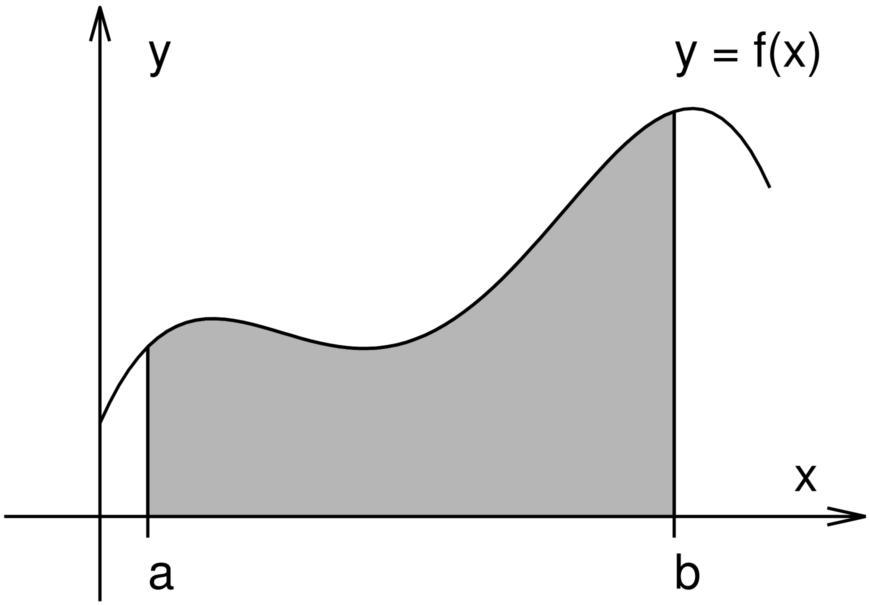
8. Integration

8.1 Das bestimmte Integral

Ziel ist die Bestimmung der Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion $y = f(x)$, der x-Achse und den Grenzen $a \leq x \leq b$.



Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine **beschränkte** Funktion auf $[a,b]$.

Definition (8.1.1)

a) $Z = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ heißt eine **Zerlegung, Partition, Unterteilung** des Intervalls $[a,b]$.

$\| Z \| := \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$ heißt **Feinheit** der Zerlegung Z.

$\mathbf{Z}[a,b]$: Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$.

b) Zu $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ heißt

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i), \qquad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

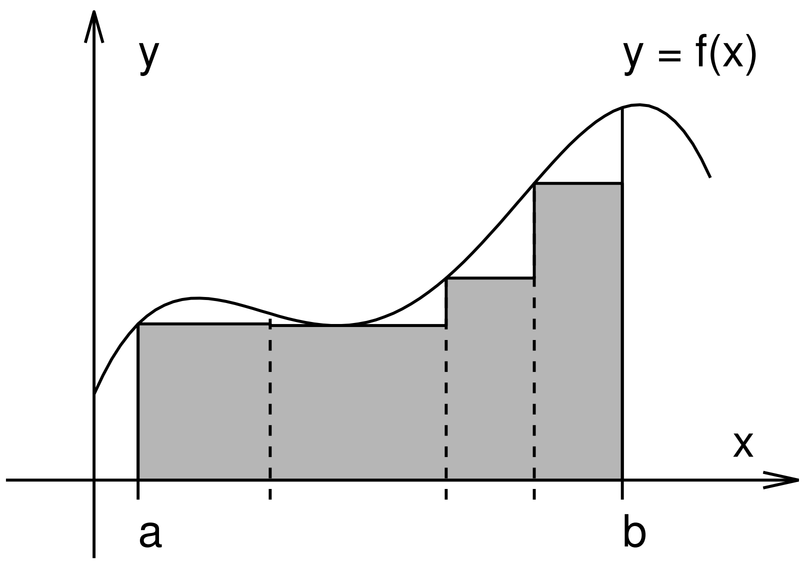
eine **Riemannsche Summe** ,

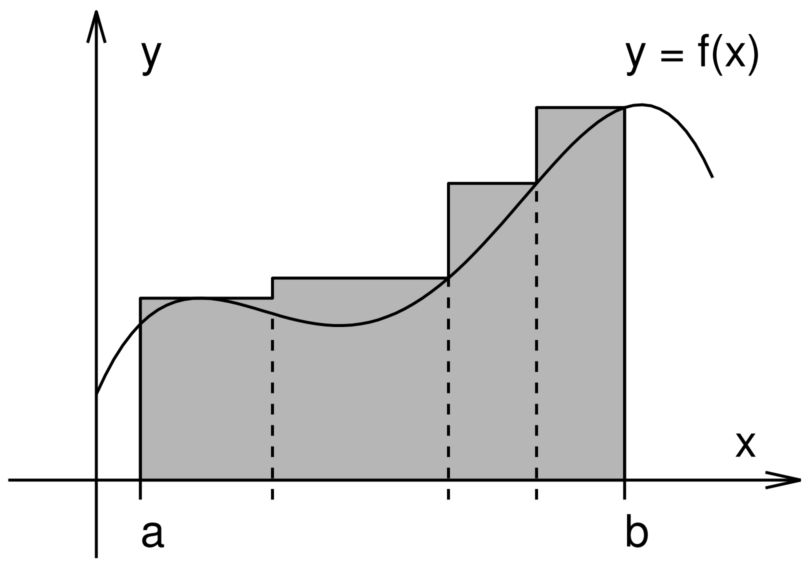
$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])\,(x_{i+1} - x_i)$$

die **Riemannsche Untersumme** und

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{sup } f([x_i, x_{i+1}])\,(x_{i+1} - x_i)$$

die **Riemannsche Obersumme** von f zur Zerlegung Z.

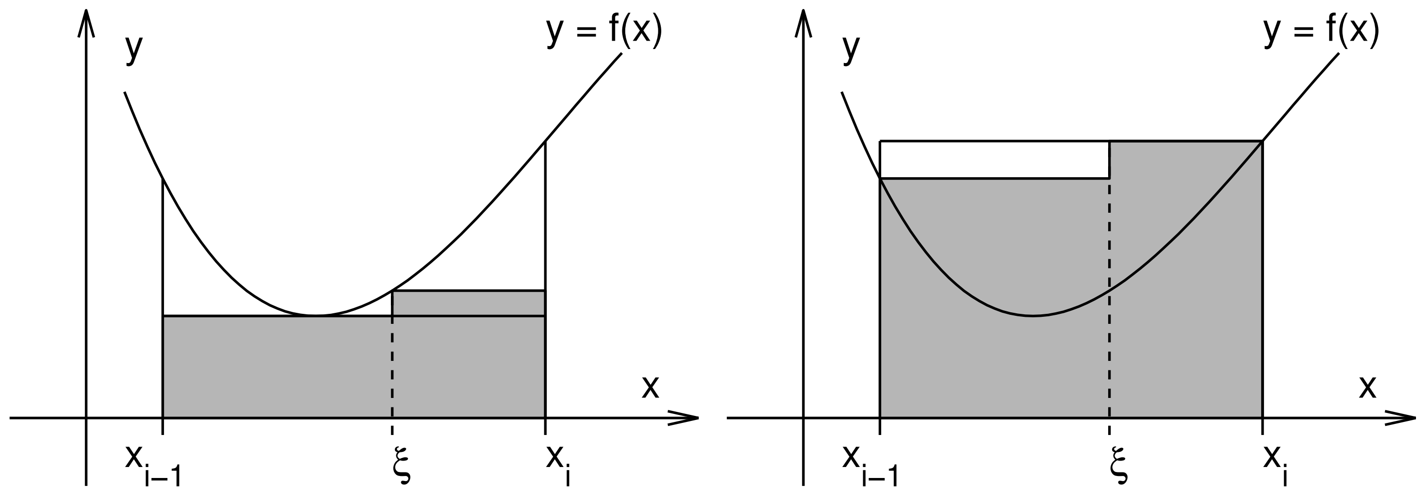




Folgerungen (8.1.2)

a) $U_f(Z) \;\leq\; R_f(Z) \;\leq\; O_f(Z)\,.$

b) $Z_1 \subset Z_2 \quad\Rightarrow\quad U_f(Z_1) \;\leq\; U_f(Z_2) \;\wedge\; O_f(Z_1) \;\geq\; O_f(Z_2)$



c) $\forall\, Z_1,\; Z_2 \in \mathbf{Z}[a,b]:\;\; U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2).$

Definition (8.1.3)

a) Die Grenzwerte

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathsf{d}\,x \;:=\; \sup\{U_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}[a,b]\}$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathsf{d}\,x \;:=\; \inf\{O_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}[a,b]\}$$

heißen **Riemannsches Unter– bzw. Oberintegral**.

b) f heißt **Riemann–integrierbar**, falls Unterintegral und Oberintegral übereinstimmen. In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x \;=\; \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathsf{d}\,x \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

das **Riemann–Integral** von f über $[a,b]$.

Bernhard Riemann:

Bernhard Riemann wurde am 17.9.1826 bei Dannenberg (Elbe) geboren und starb am 20.7.1866 bei Verbania (Lago Maggiore). Er studierte von 1846 in Göttingen, Berlin und wieder in Göttingen. Ab 1857 erhielt Riemann eine Professur in Göttingen. Trotz seiner geringen Lebensspanne ist Riemann einer der bedeutensten Mathematiker. Seine Arbeiten zur Funktionentheorie, zur Riemannschen Geometrie, zur Zahlentheorie (Riemannsche ζ-Funktion), zur Integration (Riemann-Integral) und zu den Fourier-Reihen sind bahnbrechend.

Beispiele (8.1.4)

a) $f(x) := c = \text{const.}$

$$\Rightarrow \quad U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c\,(x_{i+1} - x_i) = c\,(b-a)\,.$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b c\ \mathrm{d}x = c\,(b-a).$$

b) $f(x) := x,\ 0 \le x \le c, \quad Z_n := \{0,\ c/n,\ 2\,c/n, \ldots,\ c\}$

$$\Rightarrow \quad U_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i\,c}{n} \left(\frac{c}{n}\right) = c^2\,(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n})$$

$$O_f(Z_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)\,c}{n} \left(\frac{c}{n}\right) = c^2\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^c x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,c^2.$$

c) $f(x) \;:=\; \begin{cases} 0 & : \; x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : \; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \forall\, Z \in \mathbf{Z}[0,1] : \quad U_f(Z) \;=\; 0, \quad O_f(Z) \;=\; 1$

$\Rightarrow \quad f$ ist also **nicht** Riemann–integrierbar!

d) $f(x) \;:=\; \begin{cases} 0 : & x \neq c \\ 1 : & x = c \end{cases}$ mit $a < c < b$

$\Rightarrow \quad \forall\, Z \in \mathbf{Z}[0,1] : \quad U_f(Z) \;=\; 0, \quad 0 \;<\; O_f(Z) \;\leq\; 2\,\|Z\|,$

$\Rightarrow \quad f$ ist integrierbar mit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$

Satz (8.1.5):

a) $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \;\; a < c < b$$

b) Die Integration ist ein **linearer Operator**, d.h.,

$$\int_a^b (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\, \mathrm{d}x \;=\; \alpha \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \;+\; \beta \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

c) Die Integration ist ein **positiver Operator**, d.h.,

$$\forall\, x \in [a,b]:\; f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \;\geq\; 0\,.$$

d) Integral-Abschätzungen:

$$(b-a)\cdot \inf(f[a,b]) \;\leq\; \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \;\leq\; (b-a)\cdot \sup(f[a,b])\,,$$

$$\left|\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x \;\leq\; (b-a)\cdot \sup(|f|[a,b])\,.$$

Zusatz–Definition (8.1.6)

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{sowie} \qquad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; 0\,.$$

8.2 Kriterien für Integrierbarkeit:

Satz (8.2.1)

a) Riemannsches Kriterium: Eine beschränkte Funktion f auf $[\,a, b\,]$ ist genau dann integrierbar, wenn gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \;\; \exists\, Z \in \mathbf{Z}[a,b] : \quad O_f(Z) - U_f(Z) \;<\; \varepsilon\,.$$

b) f monoton $\Rightarrow$ f integrierbar.

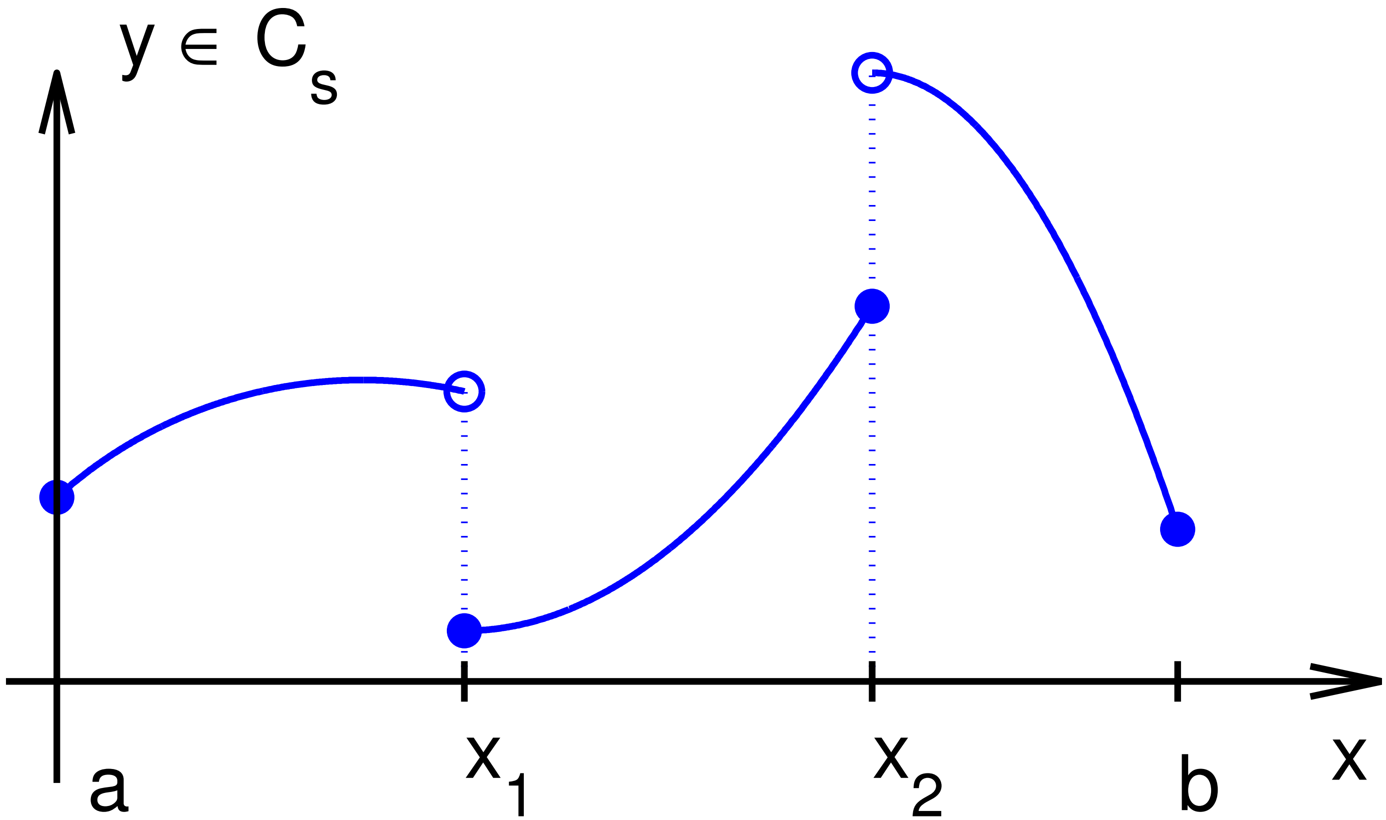
c) f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar.

Folgerungen (8.2.2)

a) Alle elementaren Funktionen (Polynomfunktionen, rationale Funktionen, sin, cos, tan, arctan, exp, ln, ...) sind über kompakten Intervallen $[a, b]$, die ganz im Definitionsbereich liegen, integrierbar, da sie dort stetig sind!

b) Ändert man eine integrierbare Funktion f an *endlich* vielen Stellen ab, so bleibt die Funktion integrierbar und der Integralwert ändert sich nicht.

c) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **stückweise stetig**, falls es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gibt, so dass f in jedem offenen Teilintervall $]\,x_j, x_{j+1}\,[$ stetig ist und die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \to x_j +} f(x)$ und $\lim_{x \to x_{j+1} -} f(x)$ existieren. Stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind daher integrierbar.



Eine stückweise stetige Funktion

Satz (8.2.3) (Kennzeichnungssatz)

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann–integrierbar, falls die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen Unst(f) eine so genannte **Lebesgue–Nullmenge** ist, d.h.:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists [a_i, b_i]_{i \in \mathbb{N}} : \text{Unst}(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\wedge \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon .$$

Satz (8.2.4)

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gelten:

a) $f \cdot g$ ist integrierbar,

b) $\forall x : g(x) \geq C > 0 \quad \Rightarrow \quad f/g$ integrierbar.

c) Die folgenden Funktionen sind integrierbar: $|f|(x) := |f(x)|$, $f^{+}(x) := \max(f(x), 0)$, $f^{-}(x) := -\min(f(x), 0)$

8.3 Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

Definition (8.3.1)

Ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $F' = f$, so heißt F eine **Stammfunktion** von f.

Bemerkung (8.3.2)

a) F Stammfunktion $\Rightarrow$ $\tilde{F}(x) = F(x) + C$ Stammfunktion

b) F_1, F_2 Stammfunktionen von f $\Rightarrow$ $F_1 - F_2$ konstant.

Hauptsatz (8.3.3)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gelten:

a) $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist eine Stammfunktion von f.

b) F Stammfunktion von f $\Rightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Friedrich Wille

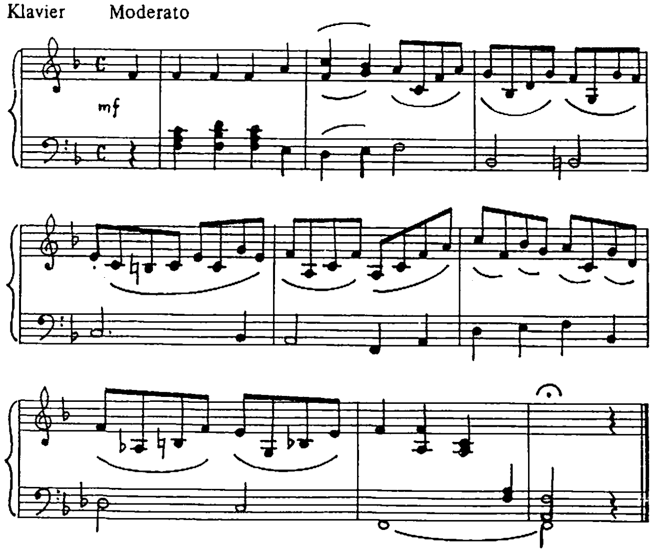
HAUPTSATZKANTATE

Vertonung des Hauptsatzes
der Differential- und Integralrechnung
nebst Beweis, Anwendungen und historischen Bemerkungen

für vierstimmigen Chor, Mezzosopran-, Tenor-Solo und Klavier

Vorspiel

Klavier Moderato



Choral (der Hauptsatz): Sopran, Alt, Tenor, Baß

Moderato

2. Das Integral von a bis b errechnet man nun leicht:
Mit einer Stammfunktion von f ist's alsobald erreicht.
Man subtrahiert in b und a – das ahnen alle schon –
die Werte dieser (wunder-)schönen Stammfunktion.

Bemerkungen (8.3.4)

a) Die Aussage a) gilt auch für stückweise stetige Funktionen. Allerdings ist dann $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ in den Unstetigkeitsstellen von f nur einseitig differenzierbar.

b) Eine (beliebige) Stammfunktion von f wird als **unbestimmte Integral** von f bezeichnet und $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ geschrieben.

Warnung (8.3.5)

Man beachte, dass $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ nur bis auf additive Konstante bestimmt ist! Unvorsichtiges Weglassen dieser Integrationskonstanten kann zu Fehlern führen!

Beispiele (8.3.6)

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \mathrm{e}^{ax} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C \qquad (x > 0)$$

$$\int \sinh x \, \mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \, \mathrm{d}x = \sinh x + C$$

Integrationsregeln (8.3.7)

a) $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$

b) Partielle Integration:

$$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Substitutionsregel:

Ist $h : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar, $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion F, so gilt:

$$\int f(h(t))\,h'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(h(t))\,,$$

bzw. für das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f(h(t))\,h'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beispiele (8.3.8)

a) $$\int 28\,x^3 + 12\,x^2 - 2\,x + 3 \;\mathrm{d}x \;=\; 7\,x^4 + 4\,x^3 - x^2 + 3\,x + C\,.$$

b) $$\int x\,\mathrm{e}^x \;\mathrm{d}x \;=\; x\,\mathrm{e}^x \;-\; \int 1\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; (x-1)\,\mathrm{e}^x \;+\; C\,.$$

c) $$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\,(\ln x - 1) + C\,.$$

d) $$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \sin x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \sin x\,(-\cos x) \;+\; \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= -\sin x\;\cos x \;+\; \int (1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; 2\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x \;=\; -\sin x\;\cos x \;+\; x \;+\; \tilde{C}$$

$$\Rightarrow\; \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\,(x \;-\; \sin x\;\cos x) \;+\; C\,.$$

e) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x:$

Substitution: $x = h(t) = a\ \cos t,\quad \mathrm{d}x = -a\ \sin t\,\mathrm{d}t$

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\ (-a\ \sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= a\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\,(t-\sin t\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{a\,\pi}{2}\,.$$

f) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x:$ Substitution: $t = \sqrt{x},\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\,t}\mathrm{d}x$

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{t}\,2t\,\mathrm{d}t = 2\,(t-1)\,\mathrm{e}^{t} + C$$

$$= 2\,(\sqrt{x}-1)\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C\,.$$

Bemerkung (8.3.9)

Es gibt keine allgemeinen Vorschriften, wie man ein vorgegebenes Integral unter Anwendung der obigen Integrationsregeln lösen kann!!

Häufig sind hierzu geschickte Substitutionen und Umformungen notwendig.

In vielen Fällen lassen sich jedoch vorgegebene Integrale trotz einfacher Gestalt der Integranden **überhaupt nicht „lösen“**, d.h., solche Integrale lassen sich nicht als Komposition elementarer Funktionen darstellen!

Beispiel: $\int \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ist nicht elementar integrierbar!

Satz (8.3.10) (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $p(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(\xi) \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bemerkung (8.3.11)

Für den Spezialfall $p = 1$ ergibt sich: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(\xi)\,(b-a)\,.$

Dies ist gerade der erste Mittelwertsatz der Differentialrechnung für eine Stammfunktion F von f, vgl. (5.1.5).

Satz (8.3.12) (Taylorscher Satz II)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^{n+1}–Funktion und $x_0 \in]a,b[$. Für die Taylor–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x;x_0)$$

gilt dann die folgende **Integraldarstellung des Restglieds**:

$$R_n(x;x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Bemerkung (8.3.13)

Wendet man auf die obige Restgliedformel den Mittelwertsatz der Integralrechnung an, vgl. (8.3.10), so ergibt sich die Lagrange-Restgliedformel, vgl. (5.1.10) .

8.4 Integration rationaler Funktionen:

Aufgabe ist die Bestimmung von $\int R(x)\,\mathrm{d}x$ für eine rationale Funktion R, wobei

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k\, x^k\,.$$

Grundprinzip ist die Verwendung der **Partialbruch–Zerlegung**. Hierdurch wird das Problem auf die Integration einfacher Standard-Funktionen zurückgeführt wird.

Typ 1: Polynome

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k\, x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1}\, x^{k+1} + C\,.$$

Typ 2: Inverse Monome mit reellen Nullstellen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-x_0)^\ell} = \begin{cases} \ln|x-x_0| + C, & \ell = 1\,, \\ \dfrac{1}{1-\ell}\,\dfrac{1}{(x-x_0)^{\ell-1}} + C, & \ell = 2,3,\ldots \end{cases}$$

Typ 3: Inverse Monome mit komplexen Nullstellen $\pm\mathrm{i}$

$$I_\ell := \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^\ell}, \quad \ell \in \mathbb{N}\,.$$

Für $\ell = 1$ kann man das Integral direkt angeben

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan t + C\,.$$

Für $\ell > 1$ wird I_ℓ rekursiv berechnet. Zunächst findet man mittels der Substitution $u := t^2 + 1$:

$$\int \frac{2t}{(t^2+1)^\ell}\,\mathrm{d}t = \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell}\,\frac{1}{(t^2+1)^{\ell-1}} + C$$

Weiter folgt hieraus mittels partieller Integration:

$$
\begin{aligned}
I_{\ell-1} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{\ell-1}} = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{\ell}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t}{2}\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^{\ell}}\,\mathrm{d}t \;+\; I_\ell \\
&= \frac{t}{2\,(1-\ell)\,(t^2+1)^{\ell-1}} \;-\; \frac{1}{2(1-\ell)}\; I_{\ell-1} \;+\; I_\ell\,.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung lässt sich nach I_ℓ auflösen:

$$
\boxed{I_\ell \;=\; \frac{1}{2\,(1-\ell)}\left[(3-2\,\ell)\,I_{\ell-1} \;-\; \frac{t}{(t^2+1)^{\ell-1}}\right], \qquad \ell = 2,3,\ldots}
$$

Typ 4: Inverse Monome mit allg. komplexen Nullstellen

$$
\int \frac{c\,x+d}{[\,(x-a)^2+b^2\,]^{\ell}}\,\mathrm{d}x, \qquad \ell\in\mathbb{N}, \quad b\neq 0.
$$

Wir formen zunächst um:

$$\int \frac{c\,x + d}{[\,(x-a)^2 + b^2\,]^\ell}\,\mathrm{d}x \;=$$

$$= \;\frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{[\,(x-a)^2 + b^2\,]^\ell}\,\mathrm{d}x \;+\; (d + c\,a)\int \frac{\mathrm{d}x}{[\,(x-a)^2 + b^2\,]^\ell}\,.$$

Erstes Integral: Mittels Substitution $u := (x-a)^2 + b^2$:

$$\int \frac{2\,(x-a)}{[\,(x-a)^2 + b^2\,]^\ell}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{\mathrm{d}u}{u^\ell}$$

$$= \begin{cases} \ln[\,(x-a)^2 + b^2\,] \;+\; C, & \ell = 1\,, \\ \dfrac{1}{1-\ell}\cdot\dfrac{1}{[\,(x-a)^2 + b^2\,]^{\ell-1}} \;+\; C\,, & \ell = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Zweites Integral: Mittels Substitution $t := (x-a)/b$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{[\,(x-a)^2 + b^2\,]^\ell} \;=\; \frac{1}{b^{2\ell-1}} \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^\ell} \;=\; \frac{1}{b^{2\ell-1}}\, I_\ell\,.$$

Mit Hilfe dieser vier Grundtypen lassen sich beliebige rationale Funktionen integrieren! Dazu geht man folgendermaßen vor:

Schritt 1:

Ist grad $p \geq$ grad q, so findet man durch Polynomdivision:

$$R(x) \;=\; p_1(x) \;+\; \frac{p_2(x)}{q(x)}\,,$$

wobei grad $p_2 <$ grad q. Dabei ist $\int p_1 \mathrm{d}x$ vom Typ 1.

Schritt 2: Gelte also grad $p <$ grad q.

Man bestimme eine Zerlegung von q bzgl. der Nullstellen:

$$q(x) = \prod_{j=1}^{n_1} (x - x_j)^{k_j} \cdot \prod_{j=n_1+1}^{n_2} [\,(x - a_j)^2 + b_j^2\,]^{k_j}\,.$$

Man prüfe, ob p und q gemeinsame Nullstellen haben und kürze ev. gemeinsame Linearfaktoren.

Ansatz für die **Partialbruch–Zerlegung**:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{x - x_j} + \frac{\alpha_{j2}}{(x - x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right] \\ &+ \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}\, x + \delta_{j1}}{[\,(x - a_j)^2 + b_j^2\,]^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}\, x + \delta_{jk_j}}{[\,(x - a_j)^2 + b_j^2\,]^{k_j}} \right]. \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Koeffizienten α_{jk}, γ_{jk} und δ_{jk} erfolgt durch Koeffizientenvergleich.

Die Integrale über die Summanden der Partialbruch–Zerlegung sind vom Typ 2 oder vom Typ 4 und lasssen sich mit den obigen Verfahren bestimmen.

Beispiel (8.4.1) $R(x) = \dfrac{1-x}{x^2\,(x^2+1)}\,.$

Aufgrund der Nullstellen des Nennerpolynoms ergibt sich der Ansatz:

$$\frac{1-x}{x^2\,(x^2+1)} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_1 x + b_2}{(x^2+1)}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$1 - x = (a_1 + b_1)\,x^3 + (a_2 + b_2)\,x^2 + a_1\,x + a_2\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$a_1 + b_1 = 0,\ \ a_2 + b_2 = 0,\ \ a_1 = -1,\ \ a_2 = 1$$

und somit

$$R(x) \ = \ -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}\,.$$

Für das gesucht Integral von R erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}\int R(x)\,\mathrm{d}x \ &= \ -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \ - \ \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\ &= \ -\ln|x| \ - \ \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \ - \ \arctan x \ + \ C\,.\end{aligned}$$

Bemerkung (8.4.2)

Integrale vom Typ (i) $\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ und (ii) $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ lassen sich durch geeignete Substitutionen auf Integrale rationaler Funktionen zurückführen. Dabei sei R eine rationale Funktion in einer bzw. in zwei Variablen.

(i) Substitution $t = \mathrm{e}^x$: $\displaystyle\int R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{R(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,.$

(ii) Substitution $t = \tan(x/2)$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R\Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \frac{2t}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

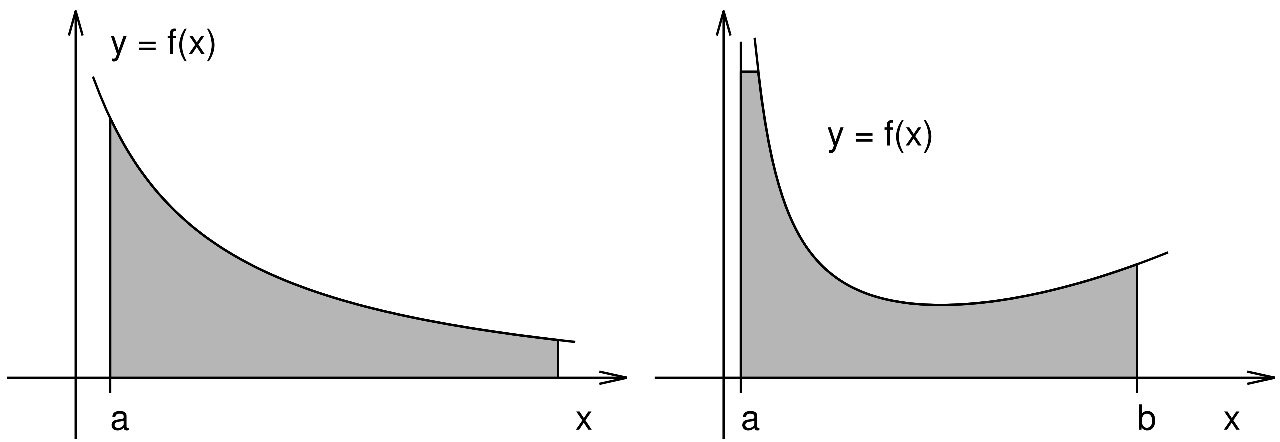
8.5 Uneigentliche Integrale:

Hierunter versteht man Integrale über unbeschränken Bereichen:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

oder Integrale von unbeschränkten Funktionen, z.B.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f : \,]a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \infty\,.$$



Definition (13.5.1)

a) $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar** über D, falls f über allen kompakten Intervallen $[a, b] \subset D$ (Riemann–) integrierbar ist.

b) Ist f über $[a, \infty[$ lokal integrierbar, so definiert man das uneigentliche Integral durch:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{z \to \infty} \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$$

Analog:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{z \to -\infty} \int_z^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x\,.$$

c) Ist f über $D := \,]a, b]$ lokal integrierbar, so setzt man, sofern die rechts stehenden Grenzwerte existieren:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{z\to a+} \int_z^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Analog, bei einer Singularität in b, bzw. in a und b mit $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{z\to b-} \int_a^z f(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

d) Besitzt f eine Singularität im Inneren des Integrationsbereichs, so zerlegt man das Integral in zwei Teilintegrale, die dann durch c) definiert werden.

Beispiele (8.5.2) a) Wegen

$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\,\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^z, & \alpha \neq 1 \\ \ln|x|\,\Big|_1^z, & \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ für $\alpha > 1$, und es divergiert für $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\,x\,|\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$ Zunächst ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\,x\,|\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$

Die Substitution $u := x^2$ ergibt

$$\int\limits_0^z x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{z^2} \mathrm{e}^{-u}\,du = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-z^2}) \to \frac{1}{2} \quad (z \to \infty)$$

Insgesamt folgt somit: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\,x\,|\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$

Definition (8.5.3)

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{z\to\infty} \int_{-z}^{z} f(x)\,\mathrm{d}x$$

heißt - falls existent - der **Cauchysche Hauptwert** des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Analog im Fall einer Singularität c im Inneren des Integrationsbereichs $[a,b]$:

$$\text{CHW} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right]$$

Man beachte, dass der Cauchysche Hauptwert existieren kann, ohne dass das uneigentliche Integral konvergiert!

Satz (8.5.4) (Konvergenzkriterien)

Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ lokal integrierbar.

a) $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert genau dann, wenn gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \; \exists\, C > a : \; \forall\, z_1, z_2 > C : \; \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon\,.$$

b) Absolute Konvergenz: Aus der absoluten Konvergenz $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ folgt die Konvergenz des uneigentl. Integrals.

c) Majorantenkriterium: Gilt $\forall\, x : \; |f(x)| \le g(x)$ und $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, so ist auch $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ abs. konvergent.

Gilt umgekehrt $0 \le h(x) \le f(x)$ und divergiert $\int\limits_a^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$, so divergiert auch $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Beispiel (8.5.5) $I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ heißt **Dirichlet–Integral**.

Beachte: $\int \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ ist nicht elementar integrierbar!
Für $0 < z_1 < z_2$ gilt:

$$\Big|\int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\Big| = \Big| - \frac{\cos t}{t}\Big|_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\Big|$$

$$\leq \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{2}{z_1} \to 0 \quad (z_1 \to \infty)\,.$$

Damit ist gezeigt, dass das Dirichlet–Integral konvergiert. Es ist jedoch nicht absolut konvergent!!
Es gilt (vgl. Skript Komplexe Funktionen, Abschnitt 12):

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,.$$

Beispiel (8.5.6) $\mathrm{Ei}\,(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$, $x < 0$, heißt **Exponentialintegral**. Wegen $\lim_{t\to-\infty} t\,\mathrm{e}^t = 0$ existiert ein $C > 0$ mit $|t\,\mathrm{e}^t| \le C$ für alle $t \in\,]-\infty, x]$. Somit folgt

$$\left|\frac{\mathrm{e}^t}{t}\right| = \frac{|\,t\,\mathrm{e}^t\,|}{t^2} \le \frac{C}{t^2}$$

Aus der Konvergenz des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ folgt somit nach dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von $\mathrm{Ei}\,(x)$, $x < 0$.

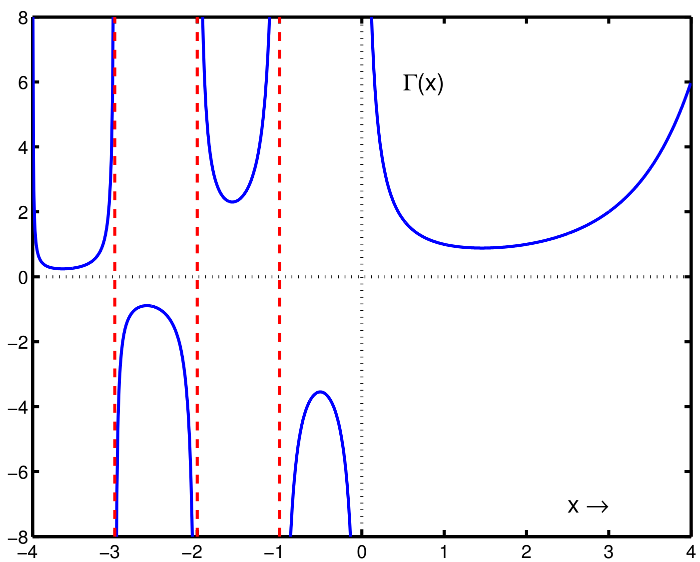
Beispiel (8.5.7) **Gamma–Funktion:** $\Gamma(x) := \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\mathrm{d}t\,.$

Für $0 < x < 1$ ist der Integrand bei $t = 0$ singulär. Die Konvergenz des Integrals (an der unteren Grenze) folgt dann aus dem Majorantenkriterium

$$\left| \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \right| \;\le\; t^{x-1}, \qquad 0 < t \le 1\,,$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_{\varepsilon}^{1} \left| \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \right| \mathrm{d}t \;\le\; \frac{1}{x}\, t^{x} \Big|_{\varepsilon}^{1} \;=\; \frac{1}{x}\,(1-\varepsilon^{x}) \;\to\; \frac{1}{x} \qquad (\varepsilon \to 0+)\,.$$

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie in (13.5.7). Wegen $\mathrm{e}^{-t}\, t^{x+1} \to 0 \;(t \to \infty)$ ist $\left| \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \right| \;\le\; \dfrac{c}{t^2}\,, \quad 1 \le t \le \infty\,.$



$$\Gamma(x+1) \;=\; x\,\Gamma(x),\; x > 0\,.$$

8.6 Parameterabhängige Integrale:

$$F(x) \quad := \quad \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y\,, \qquad x \in I\,.$$

Dabei ist $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x,\cdot)$ sei für $x \in I$ als Funktion von y über $[a,b]$ integrierbar.

Satz (8.6.1) (Stetigkeit parameterabhängiger Integrale)

Ist f auf $I \times [a,b]$ stetig , so existiert das obige Integral für alle Parameter $x \in I$ und F ist auf I stetig.

Satz (8.6.2) (Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale)

Ist f stetig und nach x stetig partiell differenzierbar, so ist auch F auf dem Intervall I stetig differenzierbar (einseitigen Ableitungen an den Rändern von I), und es gilt:

$$F'(x) \quad = \quad \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in I\,.$$

Beispiele (8.6.3)

a) $F(x) := \int_1^\pi \frac{\sin(t\,x)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \int_1^\pi \cos(t\,x)\,\mathrm{d}t$

b) Bessel-Funktion: $J_n(x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(x \sin t - n\,t)\,\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}$

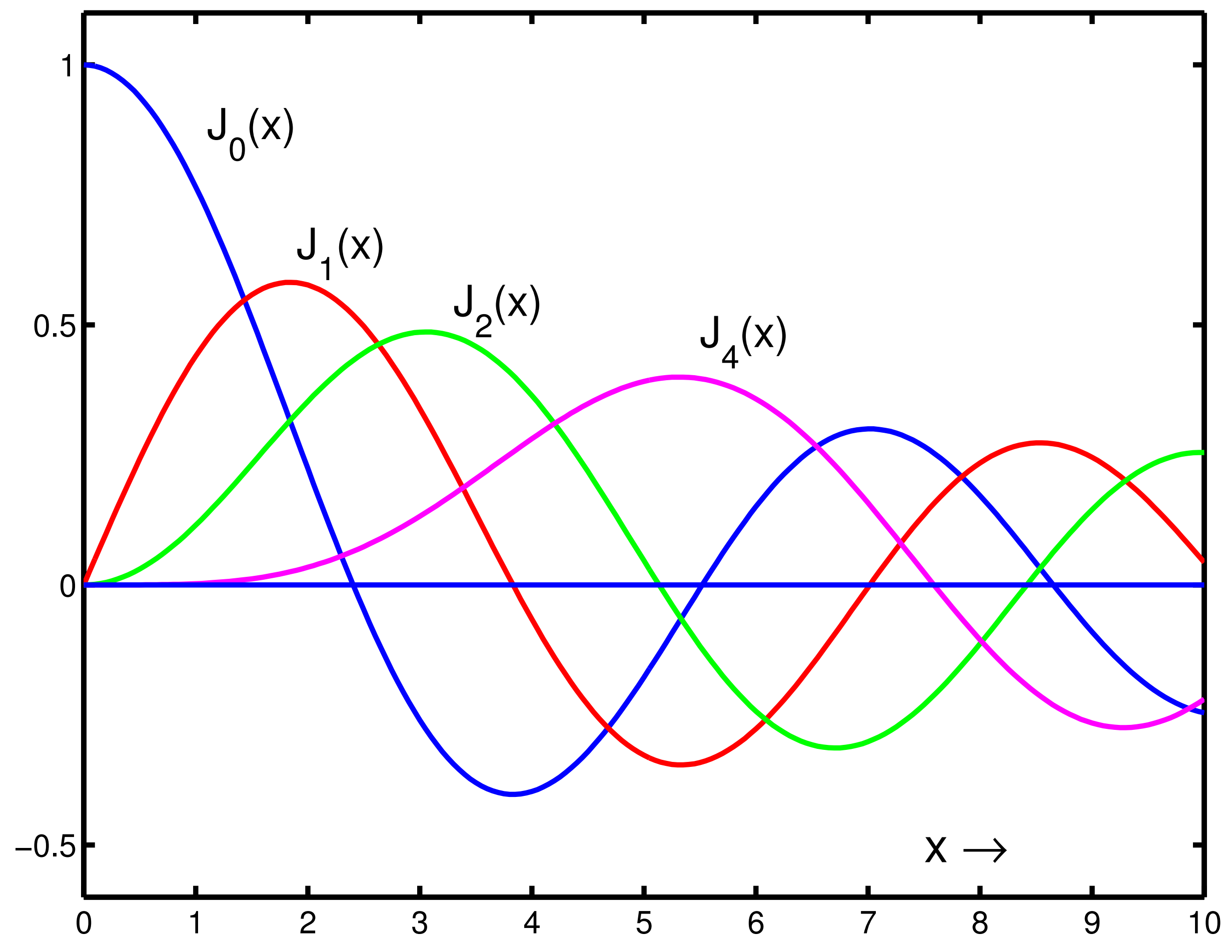
Mit (16.6.3) erhält man

$$
\begin{aligned}
J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t \cdot \sin(x \sin t - n\,t)\,\mathrm{d}t\\
J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin^2 t \cdot \cos(x \sin t - n\,t)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Die Bessel-Funktion $J_n(x)$ löst die Differentialgleichung:

$$x^2\,y''(x) + x\,y'(x) + (x^2 - n^2)\,y(x) = 0.$$

Besselsche Differentialgleichung



Die Bessel–Funktionen $J_n, \;\; j = 0, 1, 2, 4$

Friedrich Wilhelm Bessel:

Friedrich Wilhelm Bessel, geboren am 22.7.1784 in Minden und gestorben am 17.3.1864 in Königsberg, beschäftigte sich mit Astronomie, Mathematik, Geodäsie und Physik. Hauptarbeitsgebiet war die Astronomie. 1810 wurde Bessel der erste Professor für Astronomie an der Königsberger Universität und Direktor einer neu errichteten Sternwarte. Die mathematischen Untersuchungen hingen dabei zumeist mit den astronomischen Aufgaben zusammen. So fand Bessel die nach ihm benannten Besselschen Funktionen bei der Beschäftigung mit der Kepler-Gleichung zur Planetenberechnung.

Für **uneigentliche parameterabhängige Integrale**

$$F(x) := \int_a^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,, \quad x \in I\,,$$

gelten analoge Aussagen zu den Sätzen (8.6.1) und (8.6.2), sofern die auftretenden Integrale gleichmäßig konvergieren.

Definition (8.6.4)

Das Integral $\int_a^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,,\ x \in I,$ heißt **gleichmäßig konvergent**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $K > a$ gibt mit

$$\forall\, x \in I :\ \forall\, y_1,\, y_2 \geq K :\ \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right| < \varepsilon\,.$$

Zur Überprüfung der gleichmäßigen Konvergenz gilt analog zu (8.5.4) ein gleichmäßiges Majorantenkriterium.

Satz (8.6.5)

Ist $f(x,y)$ stetig und nach x stetig partiell differenzierbar und sind die Integrale

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{und} \qquad \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

auf allen kompakten Teilmengen von I gleichmäßig konvergent, so ist auch F stetig differenzierbar und die Ableitung lässt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen:

$$F'(x) \quad = \quad \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Beispiel (8.6.6)

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(x) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\cdot \ln t\,\mathrm{d}t\,.$$