5. Boolesche Polynome

Definition (5.1) (Boolesche Funktionen)
Sei $(B, \wedge, \vee)$ eine Boolesche Algebra. Wir definieren die *Menge der Booleschen Funktionen* durch

$$F_n(B) \;:=\; \{f \mid f: \;B^n \;\to\; B\} \tag{5.2}$$

Auf der Menge $F_n(B)$ lassen sich die folgenden Verknüpfungen definieren

$$\begin{aligned} f \wedge g : B^n \to B \;&:\; (f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x) \\ f \vee g : B^n \to B \;&:\; (f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x). \end{aligned}$$

Damit wird $F_n(B)$ zu einer Booleschen Algebra $(F_n(B), \wedge, \vee)$.
Dabei wird $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$, $0(x) := 0_B$ und $1(x) := 1_B$.

Definition (5.3) (Boolesche Polynome)

Boolesche Polynome in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ werden folgendermaßen rekursiv definiert:

(P$_1$) $x_1, \ldots, x_n$, 0, 1 sind Boolesche Polynome.

(P$_2$) Sind p, q Boolesche Polynome, so auch die Verknüpfungen $p \wedge q$, $p \vee q$ und $\overline{p}$.

Boolesche Polynome in $x_1, \ldots, x_n$ sind also Ausdrücke, die durch endliche Anwendung der obigen Regeln entstehen. Boolesche Polynome sind *keine Funktionen*!! *Die Menge der Booleschen Polynome* wird mit P_n, oder genauer $P_n(x_1, \ldots, x_n)$, bezeichnet.

Beachte: Zwei Boolesche Polynome p und q sind genau dann gleich sind, wenn sie als Zeichenfolge gleich sind. Daher sind z.B. $x_1 \wedge x_2$ und $x_2 \wedge x_1$ als Boolesche Polynome nicht gleich!

Definition (5.4) (Boolesche Polynomfunktionen)
Sei $(B, \wedge, \vee)$ eine Boolesche Algebra. Zu jedem Booleschen Polynom $p \in P_n$ konstruieren wir eine Boolesche Funktion $p_B \in F_n(B)$ wie folgt: Für $(a_1, \ldots, a_n) \in B^n$ bezeichne $p_B(a_1, \ldots, a_n) \in B$ das Element aus B, das durch Einsetzen von a_i für die Variable x_i in p entsteht.

Die Funktionen $p_B \in F_n(B)$, die durch die oben angegebene Konstruktion gegeben sind, heißen *Boolesche Polynomfunktionen*.

Wir haben damit eine Abbildung $\Phi : P_n \to F_n(B)$ konstruiert mittels $p \mapsto p_B =: \Phi(p)$. Diese ist strukturerhaltend:

$$(p \wedge q)_B = p_B \wedge q_B, \quad (p \vee q)_B = p_B \vee q_B, \quad (\overline{p})_B = \overline{p_B}.$$

Beachte: Verschiedene Boolesche Polynome können auf die gleiche Boolesche Polynomfunktion abgebildet werden.

Beispielsweise sind die Booleschen Polynome $p := x_1 \wedge (x_1 \vee x_2)$ und $q := x_1$ verschieden, liefern jedoch – aufgrund des Absorptionsgesetzes – die gleiche Polynomfunktion $p_B = q_B$.

Satz (5.5)

Bezeichnet $P_n(B)$ die Menge der Booleschen Polynomfunktionen $p_B : B^n \to B$, so ist $(P_n(B), \wedge, \vee)$ eine Boolesche Algebra, genauer eine Unteralgebra von $F_n(B)$.

Wir teilen die Menge P_n der Booleschen Polynome nun in Äquivalenzklassen ein und zwar definieren wir die Relation

$$p \sim q \;:\Leftrightarrow\; p_{\mathbb{B}} = q_{\mathbb{B}}, \quad \mathbb{B} = \{0, 1\}. \tag{5.6}$$

Man zeigt leicht, dass hierdurch tatsächlich eine Äquivalenzrelation definiert wird.

Die spezielle Wahl der zugrunde gelegten Booleschen Algebra $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ ist dabei nicht entscheidend. Es gilt nämlich der Satz

Satz (5.7)

Für eine beliebige Boolesche Algebra $(B, \wedge, \vee)$ gilt

$$p_B = q_B \;\Leftrightarrow\; p \sim q \;\Leftrightarrow\; p_{\mathbb{B}} = q_{\mathbb{B}}.$$

Das Normalformenproblem.

Da verschiedene Boolesche Polynome auf die gleiche Boolesche Polynomfunktion führen können, ist es naheliegend, nach einem (möglichst einfachen) *Repräsentantensystem* zu suchen, vgl. (3.11). Genauer heißt dies: Wir suchen eine Menge N_n von Booleschen Polynomen in n Variablen mit der Eigenschaft

$$\forall\, p \in P_n \quad \exists_1\, q \in N_n \;:\; p_{\mathbb{B}} = q_{\mathbb{B}}.$$

Definition (5.8)

Für die Elemente einer Booleschen Algebra führen wir folgende Schreibweisen ein:

$$a^1 := a, \quad a^0 := \overline{a}.$$

Analog definieren wir für die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in einem Booleschen Polynom $p \in P_n$:

$$x_k^1 := x_k, \quad x_k^0 := \overline{x_k}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Satz (5.9) (Normalformen)

(a) Die Booleschen Polynome der Form

$$p = \bigvee_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{B}^n} a_{i_1\ldots i_n} \wedge x_1^{i_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n}$$

mit $a_{i_1\ldots i_n} \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$ bilden ein Repräsentantensystem. Die obige Darstellung heißt *disjunktive Normalform (DNF)*.

(b) Die Booleschen Polynome der Form

$$p = \bigwedge_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{B}^n} b_{i_1\dots i_n} \vee x_1^{i_1} \vee \dots \vee x_n^{i_n}$$

mit $b_{i_1\dots i_n} \in \{0,1\}$ bilden ein Repräsentantensystem. Die obige Darstellung heißt *konjunktive Normalform (KNF)*.

Beweis: (nur a):

i) Berechnet man $p_{\mathbb{B}}(k_1,\dots,k_n)$, wobei p ein Boolesches Polynom in DNF ist und $(k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{B}^n$, so ergibt sich wegen $0^1 = 1^0 = 0$ und $0^0 = 1^1 = 1$

$$\begin{aligned} p_{\mathbb{B}}(k_1,\dots,k_n) &= \bigvee_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{B}^n} a_{i_1\dots i_n} \wedge k_1^{i_1} \wedge \dots \wedge k_n^{i_n} \\ &= a_{k_1\dots k_n} \wedge k_1^{k_1} \wedge \dots \wedge k_n^{k_n} = a_{k_1\dots k_n}, \end{aligned}$$

d.h. die Werte der zugehörigen Polynomfunktion sind durch die Koeffizienten von p bereits vollständig beschrieben.

ii) Sind p und q *verschiedene* Polynome in DNF, so unterscheiden sich ihre Koeffizienten. Damit ist nach i) aber auch $p_{\mathbb{B}} \neq q_{\mathbb{B}}$, d.h. p und q sind nicht äquivalent.

iii) Zu einer *beliebigen* Booleschen Funktion $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ setze man $a_{k_1 \dots k_n} := f(k_1, \dots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{B}$, und definiere ein Polynom p in DNF mit diesen Koeffizienten. Nach i) folgt dann $p_{\mathbb{B}} = f$.

Damit ist gezeigt, dass die Booleschen Polynome in DNF ein Repräsentantensystem bilden, und, dass sich jede Boolesche Funktion $f \in F_n(\mathbb{B})$ als Boolesches Polynom in DNF darstellen lässt. $\square$

Bemerkung (5.10)

Für die Anzahl der Booleschen Polynomfunktionen in DNF gilt $\#F_n(B) = \#(DNF) = 2^{(2^n)}$. Sie wächst also mit n sehr stark an.

n	1	2	3	4	5	6
$\#F_n$	4	16	256	65536	$\sim 4.3 \cdot 10^7$	$\sim 1.8 \cdot 10^{19}$

Beispiele (5.11)

a) Die allgemeine DNF eines Booleschen Polynoms für $n = 1$ und $n = 2$ lautet

$$\begin{aligned} p(x_1) &= (a_1 \wedge x_1) \vee (a_0 \wedge \overline{x}_1) \\ p(x_1, x_2) &= (a_{11} \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (a_{10} \wedge x_1 \wedge \overline{x}_2) \\ &\vee\ (a_{01} \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2) \vee (a_{00} \wedge \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2) \end{aligned}$$

b) Die zum Booleschen Polynom $p = x_1 \vee x_2$ zugehörige DNF lautet (vgl. Beweis zu (5.9))

$$q = (1 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (1 \wedge x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee (1 \wedge \overline{x}_1 \wedge x_2) \vee (0 \wedge \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2).$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise verwenden wir die folgenden Abkürzungen.

Wir schreiben $x_1^{i_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n}$ anstelle von $1 \wedge x_1^{i_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n}$ und lassen alle Terme der Form $0 \wedge x_1^{i_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{i_n}$ weg.

Schließlich wird auch das Verknüpfungszeichen $\wedge$ (analog zum Multiplikationszeichen) weggelassen.

Mit diesen Vereinbarungen lautet die DNF aus b):

$$q = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2.$$

c) Gesucht ist die DNF des Booleschen Polynoms

$$p = ((x_1 \wedge x_2) \vee \overline{x}_3) \vee (((x_1 \wedge (\overline{x_2 \wedge x_3})) \wedge x_4) \vee x_1).$$

Wir erstellen dazu eine vollständige Wertetabelle von $p_{\mathbb{B}}$:

x_1	x_2	x_3	x_4	$p_{\mathbb{B}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$p_{\mathbb{B}}$
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Damit lautet die DNF von p (Wertetabelle rückwärts lesen und Terme mit Funktionswert 1 notieren):

$$\begin{aligned} p_{DNF} \;=\; & x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \\ \vee\; & x_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \\ \vee\; & \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \end{aligned}$$

Konjunktive Normalform.

Zur Aufstellung der KNF kann man sich die DNF des komplementären Booleschen Polynoms zunutze machen. Für das obige Beispiel notiert man einfach die Terme der DNF, die zu den Funktionswerten 0 gehören. Hier ergibt sich

$$\overline{p}_{DNF} \;=\; \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4.$$

Durch Komplementbildung erhält man hieraus mit Hilfe der de Morganschen Regeln die KNF von p:

$$\begin{aligned} p_{KNF} \;=\; & (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \\ \wedge\; & (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4). \end{aligned}$$