13 Diskretisierungsmethoden für Optimalsteuerungsaufgaben

A. Allgemeines

Ein breites Anwendungsfeld der Optimierungstheorie stellen **Aufgaben der optimalen Steuerung** dar. Hier geht es darum, ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen durch gewisse, i. allg. zeitabhängige Steuervariable so zu steuern, daß ein vorgegebenes Kriterium optimiert (minimiert oder maximiert) wird. Die Kriterien (Zielfunktionale) können dabei - je nach Anwendungsgesichtspunkten - sehr unterschiedlich sein.

Beispielsweise ist der Bewegungsablauf eines Roboterarms in der Fertigungsindustrie durch die antreibenden Drehmomente (Motoren in den Armgelenken) so zu steuern, das ein vorgeschriebener Bewegungsablauf möglichst schnell abläuft. Das Zielfunktional ist dann die (freie) Endzeit.

In der Raumfahrt geht es etwa darum, optimale Flugbahnen zu berechnen, für die die zu befördernde Nutzlast maximal ist. Die Steuervariable sind dabei zumeist der Schub und der Schubwinkel der Raumfahrzeugs. Innerhalb der Atmosphäre spielen auch gewisse Klappenstellungen mit denen Auftrieb und Widerstand beeinflußt werden können, die Rolle von Steuerfunktionen. Bei der Rückkehr von Raumfahrzeugen zur Erde sind die Wiedereintrittsbahnen so zu optimieren, daß die Aufheizung bei der Abbremsung in der Atmosphäre möglichst gering ausfällt.

In der chemischen Verfahrenstechnik sind chemische Prozesse beispielsweise über die Temperatur steuerbar. Aufgabe ist es dann eine optimale Steuerung zu bestimmen, durch die die Produktkonzentration am Ende des chemischen Prozesses maximiert wird.

Neben den Anwendungen im technisch - ingenieurwissenschaftlichen Bereich gibt es Anwendungen der Theorie und Numerik optimaler Steuerungen in nahezu allen wissenschaftlichen Bereichen, in denen mathematische Modellbildung eine Rolle spielt. Erwähnt sei insbesondere der große Bereich der Modellbildungen innerhalb der Wirtschaftswissenschaften (Operations Research), sowie Anwendungen in Biologie, Klimatologie und jüngst auch in der Medizin.

Die allgemeine Problemstellung einer Aufgabe der optimalen Steuerung läßt sich etwa folgendermaßen formulieren

Problem (13.1)
Gesucht sind m **Steuerfunktionen** $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m,\ 0 \le t \le t_f$ und (eventuell) eine freie Endzeit t_f, so daß ein Zielfunktional der Form

$$I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t_f) \ := \ g(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) \ + \int_0^{t_f} L(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))dt \tag{13.2}$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\boldsymbol{x}'(t) \ = \ \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))\,, \quad 0 \le t \le t_f \tag{13.3}$$

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(t_f)) \ = \ \boldsymbol{0} \tag{13.4}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \ \ge \ \boldsymbol{0} \tag{13.5}$$

Die eigentlich unabhängigen Variablen des Problems sind die m Steuerfunktionen u_i – und eventuell die freie Endzeit t_f. Jede dieser Steuerfunktionen wird als stückweise stetig (meist sogar als global stetig) angenommen. (13.3) bilden die sogenannten Zustandsgleichungen (Differentialgleichungen) für die n **Zustandsvariablen** $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$.

(13.4) beschreibt die **Randbedingungen**, die an die Zustandsvariable gestellt werden. I.a. sind dabei bis zu $2\,n$ Randbedingungen sinnvoll, d.h. $\boldsymbol{r}$ ist eine Funktion $\boldsymbol{r}$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$, wobei $0 \le k \le 2\,n$. Der Fall $k = 0$ bedeutet, daß keine Randbedingung vorgeschrieben wird. Häufig sind die Randbedingungen natürlich von der einfachen Form $r_i := x_j(0) - x_{j0} = 0$ oder $r_i := x_j(t_f) - x_{jf} = 0$ für gewisse i und j, wobei x_{j0} bzw. x_{jf} vorgegebenen sind. Es können jedoch durchaus auch gekoppelte und ev. nichtlineare Randbedingungen auftreten. Im Zusammenhang mit Interpolationsaufgaben sind auch sogenannte Mehrpunkt-Randbedingungen möglich.

Die Ungleichungen (13.5) schließlich beschreiben die sogenannten **Steuerungs**– bzw. **Zustandsbeschränkungen**. In Fällen $C_i = C_i(\boldsymbol{u})$ bzw. $C_i = C_i(\boldsymbol{x})$ spricht man von einer reinen Steuerungs- bzw. einer reinen Zustandbeschränkung, andernfalls von einer gemischten Restriktion.

Beispiel (13.6)
Ein Zug bewege sich geradlinig in eine Richtung. Seine Bewegung kann vereinfacht durch die Differentialgleichung $z'' = u$ beschrieben werden. Dabei bezeichnet z die zurückgelegte Strecke und u die Beschleunigung des Zuges. Nimmt man an, daß der Energieverbrauch proportional zur Beschleunigung ist, und setzt man $x_1 := z$ und $x_2 := z'$, so kann man die folgende Optimalsteuerungsaufgabe formulieren:

Problem (13.6 a)
Man bestimme eine stückweise stetige Steuerfunktion $u(t)$, $0 \le t \le t_f$, so daß das Funktional

$$I_1(u) \;=\; \int_0^{t_f} u(t)^2 dt$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rclrclrcl} x_1' &=& x_2, & x_1(0) &=& 0, & x_1(t_f) &=& a, \\ x_2' &=& u, & x_2(0) &=& 0, & x_2(t_f) &=& 0. \end{array}$$

Mit dieser Problemstellung soll also der für die Zugfahrt benötigte Energieverbrauch minimiert werden. Etwaige Schranken für die Beschleunigung bleiben unberücksicht.

Für die Daten $a = 1$ und $t_f = 2$ ist die Lösung dieser Optimalsteuerungsaufgabe in der Abbildung 13.1 dargestellt. Für die Zielfunktion ergibt sich der (minimale) Wert $I_1(u_{\text{opt}}) = 1.5$.

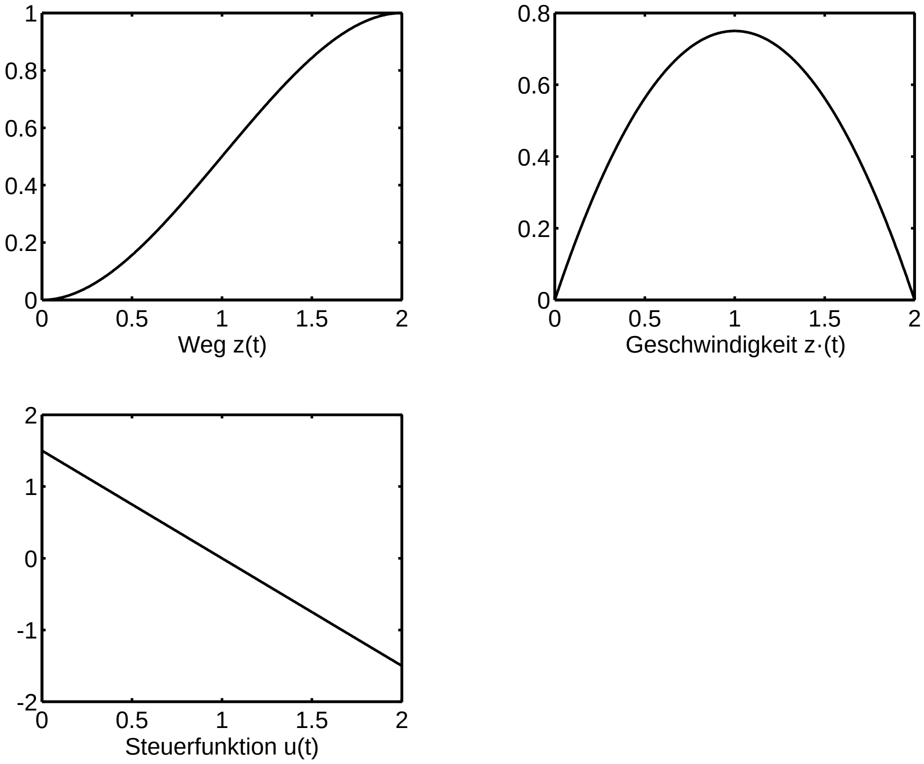

Abb. 13.1. Zug - Beispiel: Energieoptimales Problem

Will man statt der Energieminimierung die Fahrzeit t_f minimieren, so muß man die Beschleunigungsschranken berücksichtigen. Man erhält dann beispielsweise das folgende Optimalsteuerungsprovblem mit freier Endzeit:

Problem (13.6 b)
Man bestimme eine stückweise stetige Steuerfunktion $u(t),\ 0 \le t \le t_f$ sowie die freie Endzeit t_f, so daß das Funktional

$$I_2(t_f) \;=\; t_f$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, & x_1(0) &= 0, & x_1(t_f) &= a, \\ x_2' &= u, & x_2(0) &= 0, & x_2(t_f) &= 0, \\ -1 \le u(t) &\le 1. \end{aligned}$$

Trotz der Linearität dieses Problems, ist die numerische Lösung hier komplizierter. Der Grund hierfür liegt darin, daß die optimale Steuerung hier nur noch stückweise stetig ist. Speziell ergibt sich das obige Problem mit $a = 1$ eine sogenannte **bang–bang Steuerung**, das ist eine Steuerung, die ganz am Rande des Steuerungbereichs verläuft. Die Lösungstrajektorie ist in der folgenden Abbildung 13.2 dargestellt.

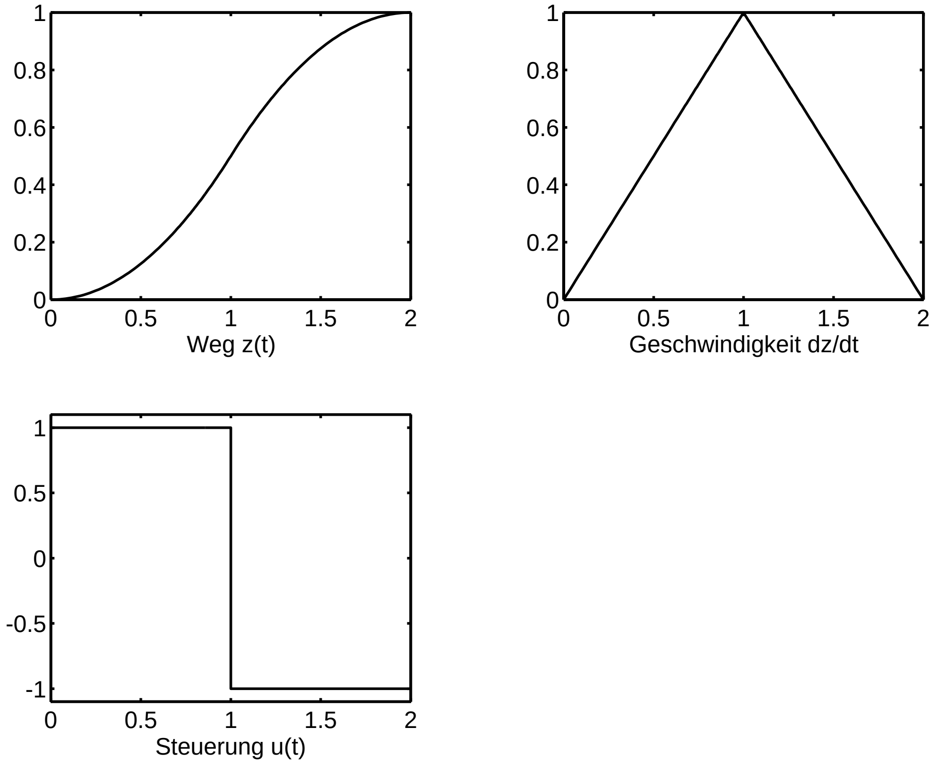

Abb. 13.2. Zug - Beispiel: Zeitminimales Problem

Als Zielfunktional ergibt sich $I_2 = t_f = 2$, der Energieverbrauch – gemessen wie in Problem (13.6 a) – ist $I_1 = 2$.

Zur numerischen Lösung von Optimalsteuerungsaufgaben der Form (13.1) sind die verschiedensten Verfahren entwickelt worden. Es ist üblich, zwei Verfahrensklassen, die sogenannten direkten und die indirekten Verfahren zu unterscheiden. Die **direkten Verfahren** arbeiten mit Diskretisierungen der Steuervariablen und (eventuell) auch der Zustandsvariablen. Hierdurch wird das Ausgangsproblem (dies ist ein Problem der infiniten Optimierung) durch ein finites Optimierungsproblem approximiert und dieses wird dann mit Standardverfahren (zum Beispiel mit einem SQP Verfahren) oder mit einem an die spezielle Struktur des Problems angepaßten Verfahren der finiten Optimierung gelöst. Wir werden in diesem Abschnitt lediglich auf eine Teilklasse der direkten Verfahren, nämlich die sogenannten direkten Shooting–Verfahren eingehen können.

Die Verfahrensklasse der **indirekten Verfahren** basiert dagegen auf notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das infinite Optimalsteuerungsproblem. Analog wie dies in Abschnitt 1 und Abschnitt 7 für finite Optimierungsaufgaben erfolgt ist, lassen sich auch für Optimalsteuerungsprobleme notwendige und hinreichende Bedingungen herleiten. Diese notwendigen Bedingungen lassen sich in der Regel als eine Randwertaufgabe für die Zustandsvariablen und für sogenannte adjungierte Variable (Lagrange–

Parameter) formulieren. Zu den indirekten Verfahren gehören demgemäß alle Verfahren zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben.

B. Direkte Schießverfahren

Wir betrachten die allgemeine Problemstellung (13.1) mit vorgegebener (fester) Endzeit t_f und verschwindender Lagrange-Funktion $L(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \equiv 0$.

Probleme mit freier Endzeit (vgl. etwa das Beispiel (13.6 b) lassen sich durch die Transformation

$$t =: \tau \cdot t_f; \quad 0 \le \tau \le 1; \quad x_{n+1}(\tau) := t_f \; (= \text{const.}) \tag{13.7}$$

in eine Optimalsteuerungsaufgabe mit fester Endzeit transformieren. Beispielsweise lautet das entsprechend transformierte Problem (13.6 b):

Minimiere das Funktional

$$I_2(x_3) = x_3(1)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_3 \cdot x_2, & x_1(0) &= 0, & x_1(1) &= a,\\
x_2' &= x_3 \cdot u, & x_2(0) &= 0, & x_2(1) &= 0,\\
x_3' &= 0, & & & &\\
-1 \le u(\tau) &\le 1; & 0 \le \tau &\le 1. & &
\end{aligned}$$

Ebenso lassen sich Probleme mit nichtverschwindender Lagrange-Funktion durch Einführung einer neuen Variablen

$$x_{n+1}(t) := \int_0^t L(\tau, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\, d\tau \tag{13.8}$$

in eine Optimalsteuerungsaufgabe mit verschwindender Lagrange–Funktion transformieren. Beispielsweise lautet das entsprechend transformierte Problem (13.6 a):

Minimiere das Funktional

$$I_1(x_3) = x_3(t_f)$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2, & x_1(0) &= 0, & x_1(t_f) &= a,\\
x_2' &= u, & x_2(0) &= 0, & x_2(t_f) &= 0,\\
x_3' &= u^2, & x_3(0) &= 0. & & .
\end{aligned}$$

Ausgangspunkt ist eine Unterteilung des Intervalls $[0, t_f]$ vermöge eines (nicht notwendig äquidistanten) Gitters

$$0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_M = t_f\,. \tag{13.9}$$

Zu Näherungwerten $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_M)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m \cdot M}$ für die Steuerfunktionen in den Knoten, d.h $\boldsymbol{u}_j \approx \boldsymbol{u}(t_j)$, wird $\boldsymbol{u}(t)$ durch Interpolation angenähert:

$$\boldsymbol{u}(t) \approx IP(t, \boldsymbol{U})\,. \tag{13.10}$$

IP bezeichnet dabei einen Interpolationoperator. Gebräuchlich sind hierfür die folgenden Interpolationsoperatoren:

Interpolation durch eine stückweise konstante Funktionen:

$$IP_0(t, \boldsymbol{U}) \ := \ \begin{cases} \boldsymbol{u}_j, & \text{für } t \ \in \ [t_j, t_{j+1}[, \ \ j = 1, \ldots, M \\ \boldsymbol{u}_M, & \text{für } t \ = \ t_M \, . \end{cases} \tag{13.11}$$

Interpolation durch Polygonzüge:

$$IP_1(t, \boldsymbol{U}) \ := \ \boldsymbol{u}_j \ + \ \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \, (\boldsymbol{u}_{j+1} - \boldsymbol{u}_j), \quad \text{für } t \in [t_j, t_{j+1}], \ \ j = 1, \ldots, M. \tag{13.12}$$

Interpolation durch kubische Splinefunktionen (13.13)

$IP_3(t, \boldsymbol{U})$ bezeichne den natürlichen kubischen Spline zu den vorgegebenen Interpolationsknoten $(t_j, \boldsymbol{u}_j), \ j = 1, \ldots, M$; vergleiche Lehrbücher über Numerische Mathematik, z.B. Opfer[...].

Neben den Daten $\boldsymbol{U}$ für die Steuervariablen wird eine Näherung $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ für die Anfangswerte $\boldsymbol{x}(0)$ der Zustandsvariablen gewählt. Wir nehmen an, daß $\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}(0)\|$ und $\|\boldsymbol{u}(t) - IP(t, \boldsymbol{U})\|$ hinreichend klein sind, so daß die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{x}'(t) \ = \ \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), IP(t, \boldsymbol{U}))\,, \quad \boldsymbol{x}(0) \ = \ \boldsymbol{X} \tag{13.14}$$

eine Lösung im gesamten Intervall $[0, t_f]$ besitzt. Diese werde mit $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$ bezeichnet. Bei der numerischen Lösung der Anfangswertaufgabe (13.14) ist zu beachten, daß die interpolierende Funtion $IP(t, \boldsymbol{U})$ lediglich intervallweise glatt ist, und man die numerische Integration daher auch in den Knoten t_j unterbrechen muß.

Insgesamt läßt sich nun die folgende finite Optimierungsaufgabe formulieren:

Problem (13.15)

Man bestimme die Variablen $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{m \cdot M}$ und $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$, so daß die Zielfunktion

$$I(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}) \ := \ g(\boldsymbol{x}(t_f; \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})) \tag{13.16}$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}(0; \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}), \boldsymbol{x}(t_f; \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})) \ = \ \boldsymbol{0} \tag{13.17}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(t_j; \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}), \boldsymbol{u}(t_j; \boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})) \ \geq \ \boldsymbol{0}\,, \quad j = 1, \ldots, M\,. \tag{13.18}$$

Mit Problem (13.15) haben wir das urspüngliche Optimalsteuerungsproblem (13.1) in eine klassische finite Optimierungsaufgabe mit Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen vom Typ (0.1), (0.2) transformiert. Diese Aufgabe läßt sich nun mit einem Standardverfahren für finite Optimierungsaufgaben (beispielsweise einem SQP–Verfahren) numerisch lösen.

Bemerkungen (13.19)

a) Natürlich approximiert das Problem (13.15) lediglich in gewissem Sinn unser Ausgangsproblem. Dies wird etwa an den Ungleichungsnebenbedingungen (13.18) deutlich. Die ursprünglichen Nebenbedingungen (13.5) müssen für alle $t \in [0, t_f]$ erfüllt sein, eine Lösung von (13.15) erfüllt diese Nebenbedingungen jedoch nur in den Knoten – möglicherweise wird (13.5) daher zwischen den Knoten verletzt sein. Die approximierten „optimalen“ Steuerfunktionen sind somit eventuell (im strengen Sinn) für das Problem (13.1) garnicht zulässig. Beeinflussen läßt sich diese Abweichung durch Einführung weiterer Zwischenknoten (zwischen den t_j), an denen zusätzlich (13.18) gefordert wird.

b) Die Approximationsgüte läßt sich durch Verfeinerung der Schrittlängen $h_j = t_{j+1} - t_j$ verbessern. Allerdings erhöht sich hierdurch auch die Variablenzahl für das finite Optimierungsverfahren und damit der numerische Aufwand. Für jede Auswertung der Zielfunktion und der Nebenbedingungen wird ja die numerische Lösung einer Anfangswertaufgabe benötigt. I.a. wird daher ein direktes Schießverfahren nur für relativ grobe Gitter praktikabel sein und auch Näherungen mit nur geringer Genauigkeit liefern.

c) Für eine sehr genaue Lösung von Optimalsteuerungsaufgaben haben sich Kombinationen von direkten und indirekten Verfahren bewährt. Die direkten Verfahren liefern dabei recht zuverlässig brauchbare Startdaten für die anschließende Lösung mit einem indirekten Verfahren. Auch für die adjungierten Variablen, die bei Anwendung einer indirekten Methode benötigt werden, lassen sich aus den Ergebnissen eines direkten Verfahrens gute Anfangsnäherungen gewinnen.

d) Es gibt zahlreiche Varianten des obigen beschriebenen Algorithmus. Diese beinhalten beispielsweise eine automatische Gittererzeugung und Gitteranpassung während der Iteration, die Verwendung anderer (besserer ?) Interpolationsoperatoren oder die Einbeziehung (variabler) Schaltpunkte, an denen die Steuerungen Sprungstellen besitzen können. Einer Variante, die sogenannten direkten Mehrzielmethode, vermeidet die Integration der Zustandsgleichungen über „langen“ Intervalle durch Einführung weiterer Zustandsanfangswerte an inneren Knoten. Hierdurch wird die numerische Integration stabilisiert.