12 Anfangswertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen und deren numerische Lösung. Differentialgleichungen beschreiben ganz allgemein die zeitliche Änderung einer oder mehrerer Zustandsgrößen in Abhängigkeit von der Zeit und von diesen Zustandsgrößen selbst. Sind die Zustände nun zu einem Anfangszeitpunkt t_0 bekannt, so legt die Differentialgleichung die Zustände für Zeiten $t \neq t_0$ fest. Das Lösen einer Anfangswertaufgabe bedeutet also, die Zustandsgrößen als Funktionen der Zeit zu bestimmen. Differentialgleichungen sind ein wesentlicher Bestandteil der angewandten Mathematik. Sie treten in nahezu allen Anwendungsbereichen auf. Als Beispiele seien die Disziplinen Physik, Ingenieurwissenschaften, Chemie, Biologie, Wirtschaftswissenschaften und Ökologie genannt. Neben Existenz- und Eindeutigkeitsfragen beschäftigen wir uns in der Hauptsache mit numerischen Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Am Schl**u**ß (ab Abscnitt 12.7, S. 125) haben wir auch noch einen konstruktiven Beweis für die eindeutige Lösbarkeit der Anfangswertaufgabe angegeben, der gilt, sofern in der gegebenen Gleichung (12.9), S. 107 die rechte Seite $\boldsymbol{f}$ hinreichend glatt ist.

Hinweis: Der erste Teil des vorliegenden Manuskripts (i. w. identisch mit einem frḧeren Manuskript zur Weiterbildung, 1989 von H. J. Oberle und G. Opfer, Hamburger Beiträge zur Angewandtewn Mathematik, Reihe B, Bericht 13, September 1989, Kapitel 4) ist noch unvollständig, die Zeichnungen fehlen (noch) fast alle.

12.1 Allgemeines

Wir beginnen mit einigen einfachen Beispielen für Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Beispiel 12.1. *Radioaktiver Zerfall*
Beim radioaktiven Zerfall nimmt man an, daß die in einem kleinen Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ zerfallende Masse $\Delta m = m(t_1) - m(t_2)$ proportional zur Anfangsmasse $m(t_1)$ und zur Länge des Zeitintervalls Δt ist, also

$$m(t_1) - m(t_2) = k \cdot m(t_1) \cdot (t_2 - t_1). \tag{12.1}$$

Betrachtet man nun den Grenzübergang $\Delta t \to 0$, d. h. $t_2 \to t_1$, so ergibt sich die folgende Differentialgleichung für die zerfallende Masse:

$$\dot{m}(t) = -km(t). \tag{12.2}$$

Die stoffspezifische Zahl k heißt relative *Zerfallsrate*. Ist die Anfangsmasse $m_0 = m(t_0)$ bekannt, so erhält man die folgende Lösung des Anfangswertproblems (Probe!)

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-k(t-t_0)}. \tag{12.3}$$

Der Zeitpunkt $\tau = \hat{t} - t_0$ in dem $m(\hat{t}) = \frac{1}{2}m_0$ ist, heißt *Halbwertszeit*. Zwischen der Halbwertszeit τ und der Zerfallsrate besteht also der Zusammenhang $\tau = \hat{t} - t_0 = \ln 2/k \approx 0.6931/k$.

Beispiel 12.2. *Elektrischer Schwingkreis*
Ein Ohmscher Widerstand R, eine Spule mit der Induktion L und ein Kondensator der Kapazität C sowie eine Spannungsquelle U seien in einem Stromkreis hintereinander geschaltet. Man vergleiche dazu Figur 12.3.

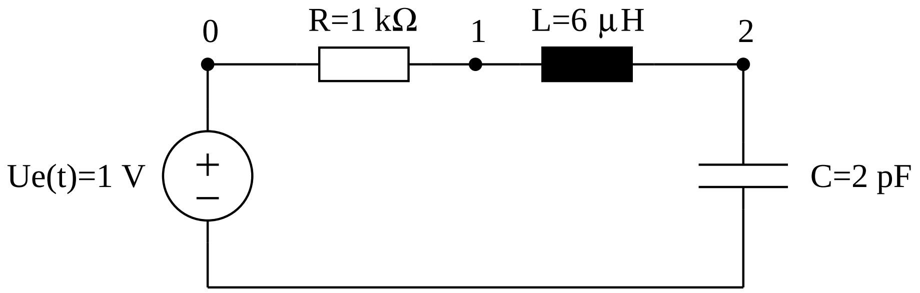


Abb. 12.3. Elektrischer Schwingkreis

Bezeichnen U_R, U_L, U_C die am Widerstand, an der Spule und am Kondensator anliegenden Spannungen und I die Stromstärke, so gilt:

$$\begin{aligned} U_R(t) = I(t) \cdot R, \quad I(t) &= C\dot{U}_C(t), \\ U_L(t) = L \cdot \dot{I}(t), \quad U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) &= U(t). \end{aligned}$$

Eliminiert man den Strom $I(t)$, so erhält man für $U_C(t)$ die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$LC\ddot{U}_C(t) + RC\dot{U}_C(t) + U_C(t) = U(t). \tag{12.4}$$

Die zugehörigen Anfangswerte lauten: $U_C(0) = U_0, \quad \dot{U}_C(0) = \dfrac{I_0}{C}$.

Beispiel 12.4. *Räuber-Beute Modell von Lotka-Volterra*
Es seien $y_1(t)$ die Zahl der Beutetiere und $y_2(t)$ die Zahl der Raubtiere in einem geschlossenen System. Wir nehmen an, daß die Anzahl der Tiere jeweils so groß ist, daß sie durch eine kontinuierliche, glatte Funktion approximiert werden kann. Ein einfaches Modell für das dynamische Verhalten von $y_1(t), y_2(t)$ kann durch folgendes System von zwei nichtlinearen, gekoppelten Differentialgleichungen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= ay_1(t) - by_1(t)y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= cy_1(t)y_2(t) - dy_2(t), \end{aligned} \tag{12.5}$$

mit den Anfangswerten $y_1(t_0) = \eta_1, \quad y_2(t_0) = \eta_2$.

Beispiel 12.5. *Fadenpendel*
Ein Massenpunkt sei an einem Faden der Länge L aufgehängt. Bei einer Auslenkung aus der Ruhelage um den Winkel $x(t)$ ergibt die Schwerkraft G eine rücktreibende Komponente der Größe $G \cdot \sin x = mg \sin x$; die hierdurch verursachte Beschleunigung ist $L\ddot{x}(t)$. Aus dem Newtonschen Kraftgesetz erhält man somit unter Beachtung der Beschleunigungsrichtung $mg \sin x(t) = -mL\ddot{x}(t)$, bzw.

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \sin x(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L}. \tag{12.6}$$

Abb. 12.6. Fadenpendel

Im Fall kleiner Auslenkungen läßt sich das Problem durch *Linearisierung* vereinfachen. Man ersetzt $\sin x(t)$ durch $x(t)$ und erhält

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{12.7}$$

Durch Einsetzen sieht man, daß $x(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$ für jedes $a, b \in \mathbb{R}$ diese Gleichung löst.

Anhand dieser Beispiele können wir die Problemstellung nun systematischer fassen. Wir nennen eine Gleichung der Form

$$x^{(m)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(m-1)}(t)) \tag{12.8}$$

eine (explizite) Differentialgleichung m-ter Ordnung. Hierbei kann x eine reellwertige Funktion (d. h. $x(t) \in \mathbb{R}$) aber auch durchaus eine vektorwertige Funktion, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, sein. Im letzteren Fall ist die *rechte Seite* $\boldsymbol{f}$ der Differentialgleichung natürlich ebenfalls vektorwertig. Häufig schränkt man sich auf den Fall eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung ein:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{12.9}$$

Eine Differentialgleichung m-ter Ordnung läßt sich stets in ein System erster Ordnung transformieren. Hierzu setzt man $x_k(t) := x^{(k-1)}(t)$, $k = 1, \ldots, m$, und erhält so das zu (12.8) äquivalente Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{m-1} \\ \dot{x}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ f(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{pmatrix}.$$

Ein Differentialgleichungssytem erster Ordnung heißt *linear*, falls es die Form hat:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\, \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t). \tag{12.10}$$

Hierbei ist $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^n n$ eine Matrixfunktion, $\boldsymbol{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ eine Vektorfunktion. Man nennt $\boldsymbol{b}(t)$ die *Inhomogenität* des Differentialgleichungssystems. Ist $\boldsymbol{b}(t) \equiv 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem *homogen*. Sind darüberhinaus $\mathbf{A}(t)$ und $\boldsymbol{b}(t)$ nicht von t abhängig (konstant), so spricht man von einem *linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*. Eine beliebige Differentialgleichung der Form (12.8) bzw. (12.9) heißt *autonom*, falls die rechte Seite nicht explizit von der Zeit t abhängt.

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Lösung von *Anfangswertaufgaben* beschäftigen. Zusätzlich zum Differentialgleichungssystem (12.9) bzw. (12.10) sind also die Werte $\boldsymbol{x}(t)$ in einem *Anfangspunkt* $t = t_0$ vorgegeben:

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{12.11}$$

Einen ersten Einblick über die Gestalt der Lösungen einer einzigen Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$ läßt sich durch folgende geometrische Betrachtung erhalten. Jedem Punkt $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ ordnen wir die Tangentenrichtung $\dot{x} = f(t,x)$ zu. Ein solches Tripel $(t,x,\dot{x})$ heißt ein *Linienelement*. Trägt man die Linienelemente in einem (t,x)-Bereich auf, so erhält man das *Richtungsfeld* der Differentialgleichung. Durch jeden Punkt (t,x) zeichnet man also eine kleine Strecke mit dem Winkel α gegen die t-Achse mit $\tan\alpha = \dot{x}$. Eine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung ist nun eine Kurve, die in das Richtungsfeld paßt. Der qualitative Verlauf der Lösungen läßt sich damit vielfach aus dem Richtungsfeld ablesen.

Abb. 12.7. Richtungsfeld und periodische Lösung von $\dot{x}(t) = -x(t) + 2 - \cos t$

12.2 Elementare Lösungsmethoden

Wir stellen in diesem Abschnitt einige analytische Lösungsmethoden für spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung zusammen. Der Abschnitt gibt nur einen kurzen Einblick in dieses Gebiet wieder; unser eigentliches Ziel liegt in den numerischen Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben, da in aller Regel explizite Lösungen für praktisch vorkommende Fälle nicht gefunden werden können. Einen ziemlich umfangreichen Überblick über explizit lösbare Typen von Differentialgleichungen gibt Kamke [1977].

12.2.1 Separierbare Differentialgleichungen

Ein oft verwendetes Verfahren ist die *Methode der Trennung der Variablen*. Dieses setzt voraus, daß die Variablen t, x in der rechten Seite f der Differentialgleichung in der Form $f(t,x) = u(t)v(x)$, also separiert in Produktform, vorkommen. Die Differentialgleichung hat die Form

$$\dot{x} = u(t) \cdot v(x). \tag{12.12}$$

Diese Voraussetzung ist z.B. für alle *autonomen* Differentialgleichungen $\dot{x}(t) = f(x)$ erfüllt, bei denen t in der rechten Seite nicht explizit vorkommt. Setzt man voraus, daß $v(x(t)) \neq 0$ für die Lösung $x(t)$ ist, so läßt sich (12.12) lösen:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{v(x)} &= u(t) \\ \Longrightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(\tau)}{v(x(\tau))} d\tau &= \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \\ \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{v(\xi)} &= \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Oder (mit unbestimmten Integralen)

$$\phi(t,x) := \int \frac{dx}{v(x)} - \int u(t) dt = \text{ const.} \tag{12.13}$$

Zur Lösung der Differentialgleichung (12.12) muß man also *Stammfunktionen*[3] von $1/v$ und u bestimmen.

Beispiel 12.8. *Lösung einer Differentialgleichung durch Separation*

$$\text{Wir betrachten} \qquad \dot{x} = -\frac{t}{x}.$$

Die Trennung der Variablen liefert:

$$\begin{aligned} \int x dx + \int t dt &= \text{const.} \\ \Longrightarrow \qquad x^2 + t^2 &= C^2. \end{aligned}$$

Für $C > 0$ sind dies Ursprungskreise (also Mittelpunkt Null) mit Radius $r = C$.

12.2.2 Homogene lineare Differentialgleichungen

Mit der Methode Trennung der Variablen läßt sich auch die folgende homogene, lineare Differentialgleichung lösen:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t). \tag{12.14}$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \int a(t)dt \\ \Longrightarrow \ln|x| - \int a(t)dt &= \text{const.} \end{aligned}$$

Somit lauten die Lösungen der homogenen, linearen Differentialgleichung:

$$x(t) = C \cdot \exp \int a(t)dt. \tag{12.15}$$

Für den Spezialfall konstanter Koeffizienten, d. h. $a(t) = \text{const}$, ergibt sich:

$$x(t) = Ce^{at}. \tag{12.16}$$

Aufgabe 1. Man löse die Differentialgleichung ((12.2), S. 105).

12.2.3 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten nun eine lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t). \tag{12.17}$$

Die allgemeine Lösung einer solchen inhomogenen Differentialgleichung läßt sich folgendermaßen mit Hilfe der homogenen Differentialgleichung beschreiben:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t), \tag{12.18}$$

dabei ist

[3] F heißt eine Stammfunktion von f, wenn $f = F'$ gilt.

$x_p(t)$**:** eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung,

$x_h(t)$**:** die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Dies ist eine typische Eigenschaft linearer Probleme. Sie gilt ganz analog für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung oder für lineare Differentialgleichungssysteme.

Beispiel 12.9. *Stromkreis, Beispiel einer inhomogenen Gleichung*
In einem Wechselstromkreis mit der Induktivität L und einem Ohmschen Widerstand R genügt die Stromstärke $I(t)$ der folgenden Differentialgleichung:

$$L\dot{I} + RI = U_0 \sin(\omega t).$$

Eine spezielle Lösung ist gegeben durch (man rechne nach!)

$$I_p = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \gamma), \quad \tan\gamma = \frac{\omega L}{R},$$

die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet nach (12.18)

$$I_h = Ae^{-\frac{R}{L}t}, \quad A = \text{ const.}$$

Somit gilt:

$$I = I_p + I_h = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \gamma) + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

Wie erhalten wir aber eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung? Hierzu kann man den folgenden Ansatz wählen, der als *Variation der Konstanten* bekannt ist. Man setzt

$$x(t) = C(t)\exp(\int a(t)dt) \tag{12.19}$$

mit einer noch unbekannten Funktion $C(t)$. (Man vergleiche (12.19) mit der Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung (12.15).) Ziel ist es nun, die Funktion $C(t)$ so zu bestimmen, daß $x(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung genügt. Hierzu bilden wir die Ableitung $\dot{x}(t)$ und setzen diese in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= C(t)\exp\Big(\int a(t)dt\Big)a(t) + \dot{C}(t)\exp\Big(\int a(t)dt\Big) \\
&\overset{!}{=} a(t)C(t)\exp\Big(\int a(t)dt\Big) + b(t) \\
\Longrightarrow \quad \dot{C}(t) &= b(t)\exp\Big(-\int a(t)dt\Big) \\
\Longrightarrow \quad C(t) &= \int b(t)\exp(-A(t))dt.
\end{aligned}$$

Hierbei ist A eine Stammfunktion von a.

Beispiel 12.10. *Berechnung einer speziellen Lösung einer inhomogenen Gleichung*
Wir berechnen eine spezielle Lösung I_p der Differentialgleichung

$$L\dot{I} + RI = U_0 \sin(\omega t)$$

(vgl. Beispiel 12.9, S. 110). Mit $I = Ae^{-\frac{R}{L}t}$, $A = A(t)$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{R}{L}Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{dA}{dt}e^{-\frac{R}{L}t} \\ &\stackrel{!}{=} -\frac{R}{L}Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{L}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

und somit:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{U_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t).$$

Bei der Integration darf die Integrationskonstante weggelassen werden:

$$\begin{aligned} A &= \frac{U_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)dt \\ &= \frac{U_0}{L}\,\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{(\frac{R}{L})^2+\omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right) \\ &= \frac{U_0}{R^2+\omega^2L^2}\,e^{\frac{R}{L}t}\left(R\sin(\omega t) - (\omega L)\cos(\omega t)\right) \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\,e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t-\gamma) \end{aligned}$$

$$\text{mit} \qquad \sin\gamma = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},\ \cos\gamma = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}.$$

$$\text{Somit folgt:} \qquad I_p = Ae^{-\frac{L}{R}t} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\gamma).$$

Aufgabe 2. Man ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = -x(t) + 2 - \cos t$ (vgl. Abb. 12.7, S. 108). Lösung: $x(t) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t - \frac{\pi}{4}) + Ce^{-t}$.

12.2.4 Bernoullische Differentialgleichung

In der Fischereiwissenschaft spielt das Modell von Bertalanffy eine wichtige Rolle, das das Wachstum von Fischen beschreibt. Ist $\omega(t)$ das Gewicht eines Fisches zur Zeit t, so ist nach diesem Modell

$$\dot{\omega}(t) = a\omega(t)^{\frac{2}{3}} - b\omega(t) \tag{12.20}$$

mit artspezifischen Konstanten $a, b > 0$. Die obige Differentialgleichung kann durch Verwendung von $y = \omega^{\frac{1}{3}}$ in eine lineare Differentialgleichung überführt werden. Dieser Trick funktioniert nun auch allgemein bei der sogenannten *Bernoullischen Differentialgleichung*

$$\dot{x}(t) = a(t)x^p(t) + b(t)x(t), \quad p \neq 1. \tag{12.21}$$

Man setzt dazu $y = x^{1-p}$ $\quad (\Rightarrow \dot{y} = (1-p)x^{-p}\,\dot{x})$ und multipliziert die gegebene Differentialgleichung mit x^{-p} :

$$x^{-p}\,\dot{x} = a + bx^{1-p}.$$

Wir erhalten also die einfachere lineare Differentialgleichung

$$\frac{\dot{y}(t)}{1-p} = a + by(t).$$

12.3 Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit

Wir betrachten die allgemeine Anfangswertaufgabe (AWA)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \quad t \in I = [t_0, t_1], \\ \boldsymbol{x}(t_0) & = & \boldsymbol{x}_0 \end{array}\right. \tag{12.22}$$

für ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Die rechte Seite $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ ist dabei eine Funktion $\boldsymbol{f} : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Typische Phänomene des Lösungsverhaltens der AWA erkennt man schon an einfachen Beispielen.

Beispiel 12.11. *Die Lösung einer AWA existiert i. a. nicht überall*
Zu lösen sei die AWA

$$\dot{x}(t) = x^2(t), \quad x(0) = 1.$$

Durch die Methode der Trennung der Variablen erhält man die Lösung

$$x(t) = 1/(1-t), \quad -\infty < t < 1.$$

Diese existiert offensichtlich nur für $t < 1$ und besitzt in $t = 1$ eine Singularität. Diese Beschränkung läßt sich nicht unmittelbar aus der rechten Seite $f(t,x) = x^2$ oder dem Anfangswert x_0 ablesen.

Beispiel 12.12. *AWA können mehrere Lösungen haben*
Zu lösen sei die AWA

$$\dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|}, \quad x(0) = 0.$$

Für beliebige $-\alpha < 0 < \beta$ ist die folgende Funktion $x(t)$ eine Lösung der AWA:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t+\alpha)^2 & , \quad -\infty < t \le -\alpha, \\ 0 & , \quad -\alpha \le t \le \beta, \\ \frac{1}{4}(t-\beta)^2 & , \quad \beta \le t < \infty. \end{cases}$$

Abb. 12.13. Lösungen der Anfangswertaufgabe

Die obige Anfangswertaufgabe hat also beliebig viele Lösungen. Die Ursache hierfür ist die Nichtdifferenzierbarkeit der rechten Seite $f(t,x) = \sqrt{|x|}$ an der Stelle $x = 0$.

Satz 12.14. (Cauchy, 1826) Die Anfangswertaufgabe besitzt lokal genau eine Lösung, falls die rechte Seite $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ in einer Umgebung des Anfangspunktes (t_0, x_0) stetig ist, und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ dort existieren und beschränkt sind.

Der Zusatz *lokal* heißt dabei, daß die Existenz nur in einem Intervall $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ garantiert werden kann mit einem a priori unbekannten $\varepsilon > 0$.

I. a. ist also nicht sichergestellt, daß sich die Lösung der AWA (12.22) bis zu einem vorgegebenen Wert t_1 fortsetzen läßt. Die Lösbarkeit der Anfangswertaufgabe allein, jedoch nicht die Eindeutigkeit, folgt nach einem Satz von Peano (1890) bereits nur aus der Stetigkeit der rechten Seite $f(t,x)$.

Die Voraussetzungen, welche lokale Existenz und Eindeutigkeit garantieren, lassen sich noch etwas abschwächen. Anstelle der Beschränktheit der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ genügt es, die Beschränktheit des Differenzenquotienten zu verlangen, d. h., es gibt eine Zahl L, die sogenannte *Lipschitz-Konstante*, mit

$$||\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2)|| \leq L||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|| \tag{12.23}$$

für alle $(t,\boldsymbol{x}_1)$, $(t,\boldsymbol{x}_2)$ aus einer Umgebung R des Anfangspunktes $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$.

In Analogie zum Fixpunktsatz von Banach läßt sich die Lipschitz-Konstante mit Hilfe der Jacobimatrix berechnen:

$$L := \sup_{(t,\mathbf{x})\in R} ||\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x})||. \tag{12.24}$$

Für die Praxis ist die Kenntnis der Lipschitz-Konstanten vorteilhaft, da man mit ihrer Hilfe angeben kann, wie sich die Lösung der Anfangswertaufgabe (12.22) in Abhängigkeit vom Anfangswert $\boldsymbol{x}_0$ verhält. Ist die Anfangswertaufgabe eindeutig lösbar, so bezeichnen wir die Lösung mit $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$, um die Abhängigkeit von den Anfangswerten $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ anzudeuten.

Gelten nun die in Satz (12.14) angegebenen Voraussetzungen (mit L nach (12.24)). Dann läßt sich die folgende Abschätzung beweisen:

$$||\boldsymbol{x}(t;t_0,\tilde{\boldsymbol{x}}_0) - \boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)|| \leq e^{L|t-t_0|}\, ||\tilde{\boldsymbol{x}}_0 - \boldsymbol{x}_0||. \tag{12.25}$$

Man erkennt, daß für $\tilde{\boldsymbol{x}}_0 \to \boldsymbol{x}_0$ auch die linke Seite bei festem t gegen Null konvergiert, d. h., die Lösung $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ hängt stetig vom Anfangswert $\boldsymbol{x}_0$ ab. Die Empfindlichkeit der AWA (d. h. wie stark sich Lösungen zu benachbarten Anfangswerten voneinander entfernen können) hängt jedoch gemäß (12.25) von der Lipschitz-Konstanten L und der Integrationslänge $|t-t_0|$ ab.

Wir haben hinten ab Abschnitt 12.7, S.125 einen konstruktiven Beweis dafür, daß die AWA in einem gegebenen Intervall genau eine Lösung besitzt, angegeben. Die Konstruktion wird mit dem bereits eingeführten Euler-Verfahren durchgeführt.

12.4 Einschrittverfahren

Wir kommen nun zu den numerischen Lösungsverfahren für Anfangswertaufgaben. Hierbei stellt sich die Aufgabe folgendermaßen: Gegeben sei ein Anfangswertproblem

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{12.26}$$

Gesucht ist ein Näherungswert für $\boldsymbol{x}(b)$ in einem Punkt $b > t_0$. Ein numerisches Verfahren berechnet dazu Näherungswerte auf einem Gitter durch Diskretisierung, d. h., wir wählen eine Unterteilung von $[t_0,b]$, nämlich

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b\ , \tag{12.27}$$

und berechnen Näherungen $\boldsymbol{x}_j$ von $\boldsymbol{x}(t_j)$ zunächst nur an den in (12.27) gegebenen Punkten. Die Lösung auf ganz $[t_0, b]$ kann dann z. B. dadurch appoximiert werden, daß wir die Punkte $(t_j, \boldsymbol{x}_j)$, $(t_{j+1}, \boldsymbol{x}_{j+1})$ geradlinig miteinander verbinden, d. h., unsere Näherung ist ein *Polygonzug* oder *linearer Spline* mit den Ecken $(t_j, \boldsymbol{x}_j)$, $j = 0, 1, \ldots, m$ (vgl. Abb. 12.15).

Abb. 12.15. Näherung durch Polygonzug

Die Größen

$$h_j := t_{j+1} - t_j, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{12.28}$$

heißen die *Schrittweiten* oder *Maschenweiten* des obigen Gitters. Die Zahl $h := \max h_j$ nennen wir *Maschenweite* (singular!) des Gitters. Ist $h = h_j$ für alle j, so sprechen wir von einem *äquidistanten* Gitter.

Im folgenden beschränken wir uns nur auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung — die Verfahren und die Ergebnisse lassen sich jedoch auch auf Systeme übertragen (soll dies nicht gemacht werden, so muß man später mit der Norm und nicht mit dem Betrag arbeiten).

Zu den ersten und einfachen numerischen Methoden zur Lösung eines Anfangswertproblems gehören die *Einschrittverfahren*. Allgemein sind solche Verfahren gegeben durch

$$\begin{aligned} \xi_0 &= x_0 \,, \\ \xi_{i+1} &= \xi_i + h_i \, \phi\,(t_i, \xi_i\,; h_i), \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. \end{aligned} \tag{12.29}$$

Die Werte ξ_i sollen dabei Näherungen für $x(t_i)$ darstellen. Die Funktion $\phi\,(t, \xi\,; h)$ heißt *Inkrementfunktion*. Die verschiedenen Einschrittverfahren unterscheiden sich also nur durch ihre unterschiedlichen Inkrementfunktionen.

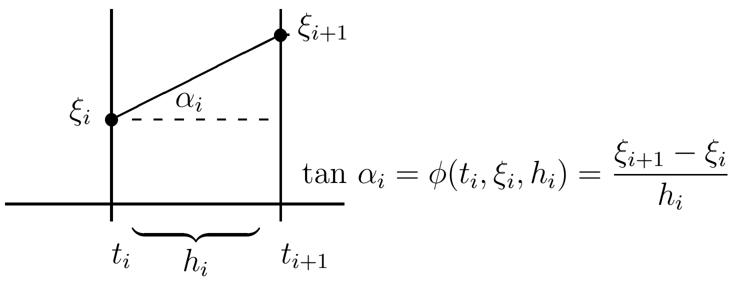


Abb. 12.16. Konstruktion von ξ_{i+1} bei allgemeiner Inkrementfunktion ϕ

Aus der Abb. 12.16 erkennt man die geometrische Interpretation von (12.29). Man startet bei (t_i, ξ_i) und geht dann geradlinig mit der Steigung $\phi(t_i, \xi_i; h_i) = \tan \alpha_i$ bis zur Abszisse t_{i+1} weiter und erhält dort den neuen Punkt ξ_{i+1}. Aus diesem Grund heißt ϕ auch *Fortschreiterichtung*.

Wir stellen einige einfache Einschrittverfahren vor.

12.4.1 Polygonzugverfahren von Euler, Cauchy

Das einfachste Verfahren entsteht durch Wahl von

$$\phi(t,x;h) = f(t,x), \tag{12.30}$$

d. h., man erhält

$$\xi_{i+1} = \xi_i + h_i f(t_i,\xi_i), \quad \xi_0 = x_0. \tag{12.31}$$

Dieses Verfahren bekommt man auch, wenn in der Differentialgleichung $\dot{x}(t_i)$ durch den Vorwärts-Differenzenquotienten $(\xi_{i+1} - \xi_i)/h_i$ ersetzt wird.

12.4.2 Das Verfahren von Heun

Statt die Steigung allein am linken Intervallende zu benutzen, verwenden wir den Mittelwert der Steigungen an beiden Intervallenden und erhalten

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \frac{h_i}{2}\left(f(t_i,\xi_i) + f(t_i + h_i, \xi_i + h_i f(t_i,\xi_i))\right). \tag{12.32}$$

Dies ist eine Modifikation des obigen Polygonzugverfahrens; siehe dazu Figur 12.17.

Abb. 12.17. Zur Konstruktion des Heun-Verfahrens

12.4.3 Das modifizierte Euler-Verfahren

Analog zum Heun-Verfahren wird hier eine mittlere Steigung für die Konstruktion der Inkrementfunktion gewählt und man erhält

$$\xi_{i+1} = \xi_i + h_i f(t_i + \frac{h_i}{2}, \xi_i + \frac{h_i}{2} f(t_i,\xi_i)). \tag{12.33}$$

12.4.4 Das Fehlerverhalten der Einschrittverfahren

Um die Güte eines Einschrittverfahrens zu beurteilen, betrachtet man einen einzelnen Integrationsschritt und vergleicht die Fortschreiterichtung $\phi(t_i,\xi_i\,;h)$ des Verfahrens mit der "exakten" Fortschreiterichtung. Die Differenz dieser beiden Steigungen heißt *lokaler Diskretisierungsfehler*.

Definition 12.18.

a) Sei $z(t)$ die Lösung der (lokalen) Anfangswertaufgabe

$$\dot{z} = f(t,z), \quad z(t_i) = \xi_i\,.$$

Dann heißt

$$\begin{aligned} d_i &:= d(t_i,\xi_i;h_i) \\ &:= \frac{1}{h_i}(z(t_i+h_i) - \xi_{i+1}) \\ &= \frac{z(t_i+h_i) - \xi_i}{h_i} - \phi(t_i,\xi_i,h_i) \end{aligned} \tag{12.34}$$

der *lokale Diskretisierungsfehler* und

$$e_i := e(t_i; h_0, \dots, h_{i-1}) := x(t_i) - \xi_i \tag{12.35}$$

der *globale Diskretisierungsfehler*, wobei $x(t)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe (12.26) ist.

b) Das Einschrittverfahren heißt *konsistent*, falls für alle stetig differenzierbaren $f(t, x)$ gilt:

$$\lim_{h \to 0} d(t, x; h) = 0. \tag{12.36}$$

Das ist äquivalent zur Bedingung:

$$\lim_{h \to 0} \phi(t, x; h) = f(t, x).$$

Das Verfahren besitzt die *Ordnung p*, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$|d(t, x; h)| \leq Ch^p , \quad 0 < h \leq h_{\max}. \tag{12.37}$$

Hierbei kann die Konstante C von der rechten Seite $f(t, x)$ und vom aktuellen Näherungswert (t, x) abhängen, jedoch nicht von der Schrittweite h.

c) Ein Einschrittverfahren heißt *konvergent*, falls für konstante Schrittweiten $h_0 = h_1 = \dots = h$ und (festem) b gilt:

$$\lim_{h \to 0} e(b; h) = 0 , \quad h = \frac{b - t_0}{m} . \tag{12.38}$$

Der Nachweis der Konsistenz und die Berechnung der Ordnung eines vorgelegten Verfahrens geschieht mit Hilfe der Taylor-Entwicklung des lokalen Diskretisierungsfehlers bezüglich der Schrittweite h.

Wir zeigen das prinzipielle Vorgehen anhand des Euler-Cauchy-Verfahrens.

Für das Euler-Cauchy-Verfahren gilt:

$$\phi\ (t, x; h) = f(t, x),$$

und somit

$$d(t, \xi; h) = \frac{1}{h}\left(z(t + h) - \xi\ \right) - f(t, \xi).$$

Wir verwenden den Taylorschen Satz:

$$z(t + h) = \xi + h\dot{z}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{z}(t) + O(h^3)$$

und finden

$$d(t, \xi; h) = \dot{z}(t) + \frac{h}{2}\dot{z}(t) - f(t, \xi) + O(h^2).$$

Die Ableitungen werden mit Hilfe der Differentialgleichungen für $z(t)$ berechnet:

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= f(t,z)\,, \\
\ddot{z}(t) &= \frac{d}{dt}\left(f(t,z(t))\right) \\
&= f_t(t,z) + f_x(t,z)\cdot \dot{z}(t)|_{\,z\,=\,\xi} \\
&= f_t(t,\xi) + f_x(t,\xi) f(t,\xi).
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt erhält man für den lokalen Diskretisierungsfehler:

$$d(t,\xi;h) = \frac{h}{2}(f_t + f_x f) + O(h^2).$$

Das Euler-Cauchy-Verfahren hat also die Ordnung $p = 1$. □

Für Einschrittverfahren der Ordnung $p \geq 1$ folgt bereits unter bestimmten Voraussetzungen die globale Konvergenz des Verfahrens.

Satz 12.19. (Konvergenzsatz) Gegeben sei ein Einschrittverfahren mit äquidistanter Schrittweite

$$\begin{aligned}
&\xi_{i+1} = \xi_i + h\phi\,(t_i, \xi_i\,; h) \quad , i = 0, \ldots, m-1, \\
&h = \frac{b-a}{m}.
\end{aligned}$$

Das Verfahren sei konsistent und habe eine Ordnung $p \geq 1$. Ferner sei die Inkrementfunktion $\phi(t,x;h)$ lipschitzstetig bezüglich x mit der Lipschitz-Konstanten L. Dann ist das Einschrittverfahren konvergent. Genauer: Ist $x(b)$ die Lösung des Anfangswertproblems in $t = b$, so gilt mit einer Konstanten K die folgende Abschätzung für den globalen Fehler des Verfahrens bei äquidistanter Schrittweite $h = (b-a)/m$:

$$|\xi_m - x(b)| \leq \frac{e^{(b-a)L} - 1}{L} \cdot K \cdot h^p. \tag{12.39}$$

Diese Ungleichung zeigt, daß das Verfahren ebenfalls die globale Ordnung p besitzt.

Berücksichtigt man zusätzlich die Rundungsfehler bei der Berechnung der Näherungswerte ξ_i, so erhält man anstelle von (12.39) die Abschätzung

$$|\xi_m - x(b)| \leq \frac{e^{(b-a)L} - 1}{L} \left(K h^p + \frac{\varepsilon ||\xi||_\infty}{h} \right) \tag{12.40}$$

mit $||\xi||_\infty$: obere Schranke für die $|\xi_i| = |\xi_i(h)|$ und ε: Schranke für den relativen Fehler bei Auswertung der ξ_i.

Die Figur 12.20 zeigt qualitativ, wie sich der Gesamtfehler aus Rundungsfehlern und Diskretisierungsfehlern (Verfahrensfehlern) zusammensetzt.

Abb. 12.20. Gesamtfehler und optimale Schrittweite

Man erkennt insbesondere, daß bei vorgegebenen Verfahren und vorgegebener Arithmetik nur eine gewisse (natürlich vom konkreten Problem abhängige) Genauigkeit erreichbar ist. Wir verdeutlichen dies nochmals anhand des folgenden Beispiels.

Beispiel 12.21. $\dot{x}(t) = -200\, tx^2\,(t), \quad x(-1) = \frac{1}{101}$.
Die exakte Lösung lautet $x(t) = \frac{1}{1+100t^2}$. Mit dem noch zu besprechenden Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 wird die Näherung $\xi(0)$ für verschiedene Schrittweiten h berechnet. In der Tabelle (12.22) sind jeweils die absoluten Fehler angegeben.

Tabelle 12.22. Absolute Fehler für verschiedene Schrittweiten

h	$x(0) - \xi(0)$
$1.0 \cdot 10^{-2}$	$0.3 \cdot 10^{-4}$
$0.5 \cdot 10^{-2}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$
$1.0 \cdot 10^{-3}$	$0.2 \cdot 10^{-7}$
$0.5 \cdot 10^{-3}$	$0.2 \cdot 10^{-7}$
$1.0 \cdot 10^{-4}$	$0.5 \cdot 10^{-6}$
$0.5 \cdot 10^{-4}$	$0.7 \cdot 10^{-6}$
$1.0 \cdot 10^{-5}$	$0.2 \cdot 10^{-5}$

Man erkennt, daß die größte Genauigkeit für eine Schrittweite um 10^{-3} erreicht wird. Verkleinert man die Schrittweite weiter, so verfälschen die Rundungsfehler zunehmend die numerischen Ergebnisse.

12.5 Runge-Kutta-Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren (abgekürzt *RK-Verfahren*) sind Verallgemeinerungen des Verfahrens von Heun und des modifizierten Euler-Verfahrens. Man versucht, die exakte Fortschreiterichtung durch eine Linearkombination von f-Werten mit möglichst hoher Ordnung zu approximieren. Die allgemeine Form dieser Verfahren lautet:

$$
\begin{aligned}
\xi_{i+1} &= \xi_i + h_i \sum_{j=1}^{s} c_j k_j, && (12.41)\\
k_1 &= f(t_i, \xi_i),\\
k_j &= f(t_i + \alpha_j h_i, \xi_i + h_i \sum_{l=1}^{j-1} \beta_{jl} k_l), \quad j = 2, 3, \ldots, s. && (12.42)
\end{aligned}
$$

Die in (12.42) auftretenden Koeffizienten werden üblicherweise in einem dreieckigen *Tableau* notiert:

Tabelle 12.23. Runge-Kutta-Tableau

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\alpha_2 & \beta_{21} & & & & \\
\alpha_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
\alpha_s & \beta_{s1} & \beta_{s2} & \cdots & \beta_{s,s-1} & \\
\hline
 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{s-1} & c_s
\end{array}
$$

Die Zahlen k_j heißen auch *Inkremente* des RK-Verfahrens, s heißt *Stufenzahl*.

Es existiert eine Korrelation zwischen Stufenzahl und Ordnung eines Verfahrens. Zur Konstruktion eines Runge-Kutta-Verfahrens der Ordnung p benötigt man mindestens s Stufen nach der folgenden Tabelle.

Tabelle 12.24. Minimale Stufenzahl eines RK-Verfahrens in Abhängigkeit von der Ordnung

p	1	2	3	4	5	6	7
s	1	2	3	4	6	7	9

Beispiel 12.25. *Einfache Runge-Kutta-Formeln*

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Heun ($p = s = 2$)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

mod. Euler ($p = s = 2$)

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Runge,Kutta (1895) ($p = s = 4$)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Kutta Regel ($p = s = 3$)

Je höher die Ordnung eines Verfahrens ist, desto mehr f-Auswertungen sind i. a. pro Integrationsschritt erforderlich. Dieser Mehraufwand wird jedoch bei gleicher Genauigkeitsanforderung durch die Wahl einer größeren Schrittweite und damit auch einem geringeren Rundungsfehlereinfluß kompensiert. Dies veranschaulicht nachstehendes Beispiel.

Beispiel 12.26. *Vergleich zwischen Euler- und Runge-Kutta-Verfahren*
Wir lösen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{t^2 + x^2}} \quad , t \in [0, 4], \\ x(0) &= 1 \ . \end{aligned}$$

a) Euler-Verfahren mit $h = \dfrac{4}{n}$:

Für die numerische Lösung mit der Schrittweite h werden n Auswertungen von f benötigt.

Tabelle 12.27. Operationszahlen beim Euler-Verfahren

n	$\xi(4)$
1024	2.64324191
2048	2.64267499
4096	2.64239167
8192	2.64225005
16384	2.64217925

b) Runge-Kutta-Verfahren ($p = 4$) mit $h = \dfrac{4}{n}$:

Für die numerische Lösung mit der Schrittweite h werden $4n$ Auswertungen von f benötigt.

Tabelle 12.28. Operationszahlen beim Runge-Kutta-Verfahren

n	$\xi(4)$
32	2.64210875
64	2.64210848
128	2.64210846
256	2.64210846

Das RK-Verfahren liefert also bei geringerem Aufwand genauere Resultate.

Haben wir nun den Spezialfall der numerischen Quadratur, d. h. lösen wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t) \quad , x \in [t_0, \hat{t}\,], \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

so ist die Lösung durch das Integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

gegeben. Das Verfahren von Heun entspricht dann der Approximation von $x(t)$ mittels Trapezsummen, das modifizierte Euler-Verfahren der Mittelpunktsregel und das Verfahren von Runge-Kutta der Simpsonregel.

12.6 Schrittweitensteuerung

Aufgabe ist die Bestimmung einer "optimalen" Schrittweite für die numerische Integration der Anfangswertaufgabe (12.26). Die Schrittweite soll

— groß sein, damit der Rechenaufwand gering ist,

— klein genug sein, damit die geforderte Genauigkeit eingehalten wird.

Eine in diesem Sinn "optimale" Schrittweite wird i. a. nicht über viele Integrationsschritte konstant sein, sondern sich dem Lösungsverlauf anpassen:

rasche Änderung der Lösung, empfindliches Problem $\cong$ kleines h,
glatter Lösungsverlauf $\cong$ großes h.

Eine Schrittweitensteuerung ist daher ein *lokaler* Prozeß.

12.6.1 Grundprinzip

Von einer Stelle (t_i, ξ_i) wird mit einer geschätzten Schrittweite h_{alt} integriert.
Die Schrittweitensteuerung liefert dann:

a) eine Entscheidung, ob dieser Schritt "erfolgreich" war, d. h. ob die geforderte (lokale!) Genauigkeit eingehalten wird und

b) eine Schätzung für die neue Schrittweite h_{neu}.

Die Genauigkeit wird durch den lokalen Diskretisierungsfehler gemessen. Nach (12.37) hat man bei einem Verfahren der Ordnung p:

$$\frac{z\,(t_i + h_{alt}) - \xi_{i+1}}{h_{alt}} = Ch_{alt}^p + O\,(h_{alt}^{p+1}). \tag{12.43}$$

Die Idee ist, sich eine Schätzung τ_{est} für den lokalen Diskretisierungsfehler zu verschaffen. Eine Möglichkeit besteht darin, mit *zwei Verfahren* verschiedener Ordnung zu arbeiten. Sei also:

$$\begin{aligned} \xi_{i+1} &= \xi_i + h\phi\,(t_i, \xi_i\,; h) \quad \text{von der Ordnung } p, \\ \hat{\xi}_{i+1} &= \xi_i + h\hat{\phi}\,(t_i, \xi_i\,; h) \quad \text{von der Ordnung } p+1. \end{aligned}$$

Dann gilt neben (12.43) auch noch

$$\hat{d}_i = \frac{z\,(t_i + h_{alt}) - \hat{\xi}_{i+1}}{h_{alt}} = O\,(h_{alt}^{p+1}). \tag{12.44}$$

Subtraktion liefert:

$$\tau_{est} := \frac{\hat{\xi}_{i+1} - \xi_{i+1}}{h_{alt}} = Ch_{alt}^p + O\,(h_{alt}^{p+1}). \tag{12.45}$$

Die neue Schrittweite h_{neu} soll nun so gewählt werden, daß

$$\tau_{est} \approx Ch_{neu}^p = \text{ TOL}. \tag{12.46}$$

TOL ist dabei die vorgeschriebene (absolute) Genauigkeit pro Rechenschritt.
Aus (12.45), (12.46) wird das unbekannte C eliminiert:

$$C = \frac{\tau_{est}}{h_{alt}^p} = \frac{\text{TOL}}{h_{neu}^p}.$$

Damit folgt:

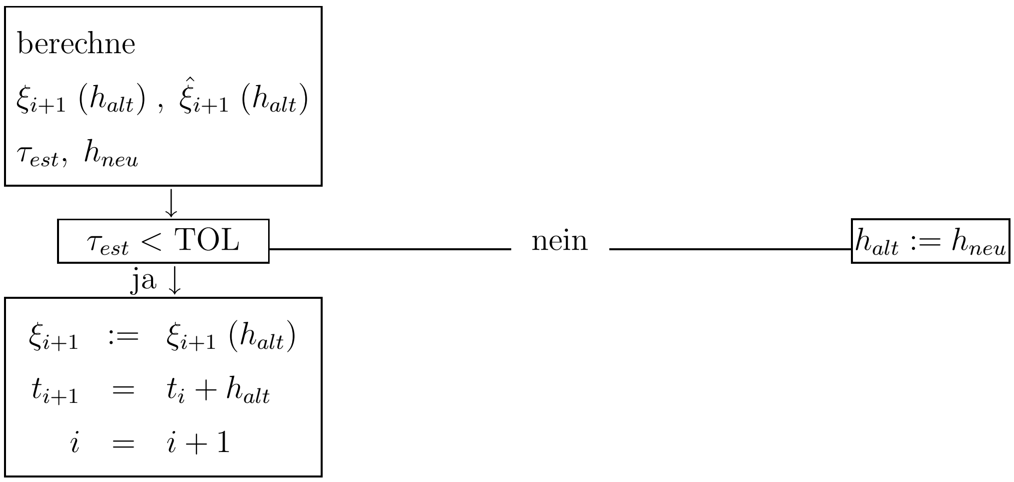
$$\left\{\begin{array}{rcl} \tau_{est} & := & \left|\dfrac{\hat{\xi}_{i+1} - \xi_{i+1}}{h_{alt}}\right| , \\ h_{neu} & := & h_{alt} \cdot \sqrt[p]{\dfrac{\mathrm{TOL}}{\tau_{est}}} . \end{array}\right. \tag{12.47}$$

Für die Praxis ist diese Steuerung noch zu modifizieren. Die Schrittweite wird stets etwas kleiner gewählt als “optimal”; ferner wird durch zusätzliche Schranken sichergestellt, daß die Schrittweitenfolge nicht zu sehr schwankt:

$$\begin{array}{rcl} \tau_{est} & := & \left|\dfrac{1}{h_{alt}} \cdot \Big(\hat{\xi}(t_{i+1}, h_{alt}) - \xi(t_{i+1}, h_{alt})\Big)\right| , \\ h_{neu} & := & 0.9 \cdot h_{alt} \cdot \sqrt[p]{\dfrac{\mathrm{TOL}}{\tau_{est}}} , \\ h_{neu} & := & \min(h_{neu}, 1.5 \cdot h_{alt}) , \\ h_{neu} & := & \max(h_{neu}, 0.5 \cdot h_{alt}) . \end{array} \tag{12.48}$$

Die Einzelheiten ergeben sich aus dem Flußdiagramm in Tabelle (12.29).

Tabelle 12.29. Flußdiagramm zur automatischen Schrittweitensteuerung



Für den Start der Integration hat der Benutzer eine Anfangsschrittweite vorzugeben.

12.6.2 Abbruch der Integration

Der Benutzer gibt den Wert t_{end} vor, an dem er die Lösung berechnen möchte. Der Abbruch kann dann folgendermaßen erfolgen:

a) vor jedem Schritt: $t_i \to t_{i+1}$ falls $(t_{i+1} > t_{end})$:

$$\begin{array}{rcl} h_{alt} & := & t_{end} - t_i, \\ t_{i+1} & := & t_{end}. \end{array}$$

b) Abbruch, falls nach einem Integrationsschritt $t_i = t_{end}$ gilt.

12.6.3 Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren

Nach einer Idee von Fehlberg lassen sich gewisse Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p durch Hinzufügen von einer oder zwei Zeilen im Runge-Kutta-Tableau zu einem Verfahren der Ordnung $(p+1)$ erweitern. Solche "eingebetteten" Verfahren heißen *Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren* (kurz *RKF-Verfahren*). Die Schrittweitensteuerung ist für diese Verfahren besonders effizient, da nur ein oder zwei zusätzliche Funktionsauswertungen benötigt werden, um die Schrittweite zu bestimmen.

Die (expliziten) RKF-Verfahren sind folgendermaßen aufgebaut:

$$\begin{aligned} \xi_{i+1} &= \xi_i + h \sum_{j=1}^{s} c_j k_j , \\ \hat{\xi}_{i+1} &= \xi_i + h \sum_{j=1}^{\hat{s}} \hat{c}_j k_j \end{aligned} \tag{12.49}$$

mit den (gemeinsamen!) Inkrementen

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, \xi_i) , \\ k_j &= f(t_i + \alpha_j h, \xi_i + h \sum_{l=1}^{j-1} \beta_{jl} k_l), \quad j = 2, 3, \ldots, \hat{s}. \end{aligned} \tag{12.50}$$

In vielen Fällen ist $\hat{s} = s + 1$.

Das allgemeine Schema ergibt sich nun aus der nachfolgenden Tabelle:

Tabelle 12.30. Koeffiziententableau zum RKF-Verfahren

$$\begin{array}{r|cccccc}
0 & & & & & & \\
\alpha_2 & \beta_{21} & & & & & \\
\alpha_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
\alpha_s & \beta_{s1} & \beta_{s2} & \cdots & \beta_{s,s-1} & & \\
\alpha_{\hat{s}} & \beta_{\hat{s},1} & \beta_{\hat{s},2} & \cdots & \beta_{\hat{s},s-1} & \beta_{\hat{s},\hat{s}-1} & \\
\hline
\text{Ordnung } p & c_1 & c_2 & & c_{s-1} & c_s & \\
\text{Ordnung } p+1 & \hat{c}_1 & \hat{c}_2 & & \hat{c}_{s-1} & \hat{c}_s & \hat{c}_{\hat{s}}
\end{array}$$

Werden eingebettete RK-Verfahren der Ordnungen p und $\hat{p} = p + 1$ mit der Schrittweitensteuerung aus (12.43) verwendet, so schreibt man RKF $p(\hat{p})$. Dies bedeutet, daß das eigentliche Verfahren die Ordnung p besitzt, während das Verfahren der Ordnung $\hat{p}$ lediglich zur Schrittweitensteuerung verwendet wird. Im folgenden geben wir verschiedene Beispiele an.

Tabelle 12.31. Eingebettete Runge-Kutta-Formeln mit Ordnund 2(3) und 4(5)

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1 & 1 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\
\hline
p=2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
p=3 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}
\end{array}
$$

RKF 2(3),
(nach Fehlberg, 1969)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & \\
1 & 0 & -1 & 2 & & & \\
\frac{2}{3} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} & 0 & \frac{1}{27} & & \\
\frac{1}{5} & \frac{28}{625} & -\frac{1}{5} & \frac{546}{625} & \frac{54}{625} & -\frac{378}{625} & \\
\hline
p=4 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \\
p=5 & \frac{14}{336} & 0 & 0 & \frac{35}{336} & \frac{162}{336} & \frac{125}{336}
\end{array}
$$

RKF 4(5),
(nach England, 1969)

Tabelle 12.32. Eingebettete Runge-Kutta-Formel mit Ordnund 4(5) nach Fehlberg

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
\frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\
\frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\
1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & & \\
\frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & \\
\hline
p=4 & \frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & -\frac{1}{5} & \\
p=5 & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6696}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55}
\end{array}
$$

RKF 4(5),
(nach Fehlberg, 1969)

Tabelle 12.33. Eingebettete Runge-Kutta-Formel mit Ordnund 7(8) nach Fehlberg

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccc}
0 & & & & & & & & & & & & & \\
\frac{2}{27} & \frac{2}{27} & & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{36} & \frac{1}{12} & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{8} & & & & & & & & & & \\
\frac{5}{12} & \frac{5}{12} & 0 & -\frac{25}{16} & \frac{25}{16} & & & & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{20} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & & & & & & & & \\
\frac{5}{6} & -\frac{25}{108} & 0 & 0 & \frac{125}{108} & -\frac{65}{27} & \frac{125}{54} & & & & & & & \\
\frac{1}{6} & \frac{31}{300} & 0 & 0 & 0 & \frac{61}{225} & -\frac{2}{9} & \frac{13}{900} & & & & & & \\
\frac{2}{3} & 2 & 0 & 0 & -\frac{53}{6} & \frac{704}{45} & -\frac{107}{9} & \frac{67}{90} & 3 & & & & & \\
\frac{1}{3} & -\frac{91}{108} & 0 & 0 & \frac{23}{108} & -\frac{976}{135} & \frac{311}{54} & -\frac{19}{60} & \frac{17}{6} & -\frac{1}{12} & & & & \\
1 & \frac{2383}{4100} & 0 & 0 & -\frac{341}{164} & \frac{4496}{1025} & -\frac{301}{82} & \frac{2133}{4100} & \frac{45}{82} & \frac{45}{164} & \frac{18}{41} & & & \\
0 & \frac{3}{205} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{41} & -\frac{3}{205} & -\frac{3}{41} & \frac{3}{41} & \frac{6}{41} & 0 & & \\
1 & -\frac{1777}{4100} & 0 & 0 & -\frac{341}{164} & \frac{4496}{1025} & -\frac{289}{82} & \frac{2193}{4100} & \frac{51}{82} & \frac{33}{164} & \frac{12}{41} & 0 & 1 & \\
\hline
p=7 & \frac{41}{840} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{34}{105} & \frac{9}{35} & \frac{9}{35} & \frac{9}{280} & \frac{9}{280} & \frac{41}{840} & & \\
p=8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{34}{105} & \frac{9}{35} & \frac{9}{35} & \frac{9}{280} & \frac{9}{280} & 0 & \frac{41}{840} & \frac{41}{840}
\end{array}
$$

RKF 7(8),
(nach Fehlberg, 1968)

Weitere Koeffizientensätze findet man in Bettis [1978, S. 9–18], Fehlberg [1970], Hairer, Nørsett & Wanner [1993, 166–167, 177–178, 180–181], Verner [1979].

12.7 Der Eindeutigkeitssatz bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Es soll gezeigt werden, daß die *Anfangswertaufgabe* (kurz AWA)

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [a,b], \quad x(a) = x_0 \tag{12.51}$$

unter geeigneten Voraussetzungen an f bei beliebigem, vorgegebenen x_0 genau eine Lösung x auf dem gesamten Intervall $[a,b]$ besitzt. Die Annahmen sind die folgenden:

– (A) Die Funktion f ist auf dem *Streifen*

$$S = [a,b] \times \mathbb{R}^n$$

definiert mit Werten im $\mathbb{R}^n$ und dort stetig. Das Intervall $[a,b]$ ist kompakt und $a < b$.

– (B) Es gibt eine Konstante $L \geq 0$ mit

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|, \quad t \in [a,b], \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \tag{12.52}$$

wobei $\| \quad \|$ eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ bedeutet.

Die in (12.52) auftretende Zahl L heißt *Lipschitzkonstante* von f.

Die hier im folgenden angegebene Herleitung stammt i. w. aus dem Buch von HENRICI [1962, Kap. 1].

Satz 12.34. Unter den angegebenen Eigenschaften (A) und (B) gibt es bei beliebig vorgegebenem $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine differenzierbare Funktion $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ für die (12.51) gilt.

Im folgenden Beweis, der sich über verschiedene Teile erstreckt, wird gezeigt, daß angenäherte Lösungen, berechnet mit dem *Eulerschen Polygonzugverfahren* gegen die Lösung von (12.51), S. 125 konvergieren, und daß es andere Lösungen nicht geben kann. Wir benötigen einige Begriffe und Hilfssätze um den Beweis zu führen.

12.8 Das Eulersche Polygonzugverfahren

Definition 12.35. Sei die AWA (12.51), S. 125 gegeben. Für $h > 0$ definieren wir

$$x_{j+1} := x_j + hf_j \quad \text{mit} \quad t_j := a + jh \le b, \quad f_j := f(t_j, x_j), \quad j = 0, 1, \ldots \tag{12.53}$$

Das so (zur Berechnung von Näherungswerten für $x(t_j)$) beschriebene Verfahren heißt *Eulersches Polygonzugverfahren* zur *Maschenweite* h. Der lineare Spline s_h, der die Daten (t_j, x_j) geradlinig verbindet, heißt *Eulerscher Polygonzug*. Die Werte t_j heißen *Knoten*, und die Menge aller Knoten in $[a,b]$ heißt *h-Gitter*. Die Knoten werden auch *Gitterpunkte* genannt.

Ist $t \in [a,b]$ gegeben, so bezeichnen wir mit t_{h^*} den nächsten links von t (in bezug auf das durch h definierte Gitter) gelegenen Knoten. Das soll auch gelten, wenn t selbst ein Knoten ($\neq a$) ist. Es ist also immer

$$t_{h^*} < t \le t_{h^*} + h \quad \text{für} \quad t > a, \quad a_{h^*} := a. \tag{12.54}$$

Damit erhalten wir für den Spline s_h die Darstellung

$$s_h(t) = s_h(t_{h^*}) + (t - t_{h^*}) f(t_{h^*}, s_h(t_{h^*})), \quad t \in]a,b], \quad s_h(a) = x_0. \tag{12.55}$$

Ist $\tau \in [t_{h^*}, t[$, so kann der Spline s_h auch dargestellt werden in der Form

$$s_h(t) = s_h(\tau) + (t - \tau) f(t_{h^*}, s_h(t_{h^*})), \quad t \in]a,b], \quad \tau \in [t_{h^*}, t[, \quad s_h(a) = x_0. \tag{12.56}$$

Ist t ein Knoten $\neq a$ im h-Gitter, so ist $t - t_{h^*} = h$. Man beachte, daß s_h ein Vektor im $\mathbb{R}^n$ ist und nur komponentenweise mit einem gewöhnlichen linearen Spline übereinstimmt. Der Spline s_h ist offensichtlich stetig. Wir wählen die Maschenweite h jetzt immer so, daß $a + mh = b$ für ein bestimmtes $m \in \mathbb{N}$. Für die Maschenweite h gilt also immer $h = (b-a)/m$ mit einem ganzzahligen $m \ge 1$. Bei unserem noch zu führenden Beweis von Satz 12.34, S. 126 wählen wir als Maschenweite

$$h_p := \frac{b-a}{2^p}, \quad p = 0, 1, \ldots \quad \text{und setzen} \quad s_p := s_{h_p}, \quad t_{p^*} := t_{h_p{}^*}. \tag{12.57}$$

Lemma 12.36. Die oben definierte Folge $\{s_p\}$ konvergiert für $p \to \infty$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion s.

Beweis: Wir zeigen mit Hilfe des späteren Lemmas 2.7, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine ganze Zahl P existiert mit

$$\|s_p(t) - s_q(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad p, q > P \quad \text{und alle} \quad t \in [a, b]. \tag{12.58}$$

Die Folge $\{s_p\}$ der Splines bildet also gleichmäßig für $t \in [a, b]$ eine Cauchy-Folge. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\{s_p\}$ gegen eine Grenzfunktion s (Heuser, I, S. 546). Da alle s_p stetig sind, ist auch die Grenzfunktion s stetig (Forster, Bd 1, 4. Aufl., S.164, Bd 2, 5. Aufl., S.14). □

12.9 Die Beschränktheit des Eulerschen Polygonzugverfahrens

Wir beweisen zuerst ein Lemma über rekursiv formulierte Ungleichungen, das hier und an späterer Stelle nützlich ist.

Lemma 12.37. Seien a, b beliebige, reelle Konstanten und $\{\xi_j\}$ eine Folge reeller Zahlen mit

$$\xi_{j+1} \le a\xi_j + b, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{12.59}$$

Dann gilt

$$\xi_j \le a^j\,\xi_0 + \begin{cases} \dfrac{a^j - 1}{a - 1}b, & \text{für } a \neq 1, \\ jb, & \text{für } a = 1, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{12.60}$$

Beweis: Wir führen einen Induktionsbeweis nach j. Die Ungleichung (12.60), S. 127 für $j = 1$ stimmt mit der Ungleichung (2.9) für $j = 0$ überein. Ist (12.60), S. 127 richtig, so gilt nach der Voraussetzung (12.59), S. 127

$$\xi_{j+1} \le a\left(a^j\xi_0 + \begin{cases} \dfrac{a^j - 1}{a - 1}b, & \text{für } a \neq 1, \\ jb & \text{für } a = 1. \end{cases}\right) + b = a^{j+1}\xi_0 + \begin{cases} \dfrac{a^{j+1} - 1}{a - 1}b, & \text{für } a \neq 1, \\ (j+1)b, & \text{für } a = 1. \end{cases} \quad \square \tag{12.61}$$

Ist in dieser Ungleichung $a = 1 + \delta$ mit einem $\delta > 0$, so erhalten wir wegen $1 + \delta < \boldsymbol{e}^\delta$ aus (12.60), S. 127

$$\xi_j \le \boldsymbol{e}^{j\delta}\,\xi_0 + \frac{\boldsymbol{e}^{j\delta} - 1}{\delta}b. \tag{12.62}$$

Aus der Annahme (B) erhalten wir insbesondere

$$\|f(t, x) - f(t, 0)\| \le L\|x\|, \quad t \in [a, b], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\|f(t, x)\| \le L\|x\| + c \quad \text{mit} \quad c = \max_{t \in [a,b]} \|f(t, 0)\|. \tag{12.63}$$

Damit ergibt sich für das Eulersche Polygonzugverfahren (12.53), S. 126 für beliebige Maschenweite $h > 0$

$$\|x_{j+1}\| \le \|x_j\| + h\|f_j\| \le (1 + hL)\|x_j\| + hc, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Diese Ungleichung hat genau die Form (12.59), S. 127 des Lemmas 2.4 mit $a = 1+\delta$, $\delta = hL$, $b = hc$, $\xi_j = \|x_j\|$, es gilt also nach (12.62), S. 127 die Ungleichung

$$\|x_j\| \leq \boldsymbol{e}^{jhL}\,\|x_0\| + \frac{\boldsymbol{e}^{jhL} - 1}{L}c, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Nun ist (man vgl. (12.53), S. 126) $0 \leq jh = t_j - a \leq b - a$ und daher

$$\|x_j\| \leq \boldsymbol{e}^{(b-a)L}\,\|x_0\| + \frac{\boldsymbol{e}^{(b-a)L} - 1}{L}c =: X, \quad t_j \in [a, b], \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{12.64}$$

mit einer Konstanten X, die von h unabhängig ist. Damit gilt auch für den Spline s_p, der die Daten (t_j, x_j) linear verbindet die Abschätzung

$$\|s_p(t)\| \leq X, \quad t \in [a, b]. \tag{12.65}$$

Mit dem gerade in (12.64), S. 128 definierten X setzen wir

$$R := \{(t, x) \,:\, t \in [a, b],\ \|x\| \leq X\}, \tag{12.66}$$

und nennen R ein *Rechteck*..

12.10 Der Stetigkeitsmodul von f

Wir ziehen jetzt einige Schlußfolgerungen aus der Annahme (A), die bisher noch nicht direkt verwendet wurde.

Definition 12.38. Für $\delta \geq 0$ und die in (A) definierte Funktion f, restringiert auf das Rechteck R sei

$$\omega(\delta) := \max\{\|f(t, x) - f(t^*, x)\| \,:\, (t, x),\ (t^*, x) \in R,\ |t - t^*| \leq \delta\}. \tag{12.67}$$

Die so definierte Abbildung ω heißt *Stetigkeitsmodul* von f.

Lemma 12.39. Der Stetigkeitsmodul hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $0 < \delta \leq \delta' \quad \Rightarrow \quad \omega(\delta) \leq \omega(\delta')$,

(ii) $\delta, \delta' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(\delta + \delta') \leq \omega(\delta) + \omega(\delta')$,

(iii) ω ist stetig für alle $\delta \geq 0$,

(iv) $\lim_{\delta \to 0^+} \omega(\delta) = 0$, (rechtsseitiger Grenzwert).

Beweis: Forster, Bd. 1 [1983, S. 71]. [Die roten Zeichen gehören nach links] □

12.11 Die Konvergenz des Eulerschen Polygonzugverfahrens

Im folgenden Lemma finden wir eine Abschätzung für die Differenz

$$d(t) := s_p(t) - s_q(t), \quad 0 \leq p < q. \tag{12.68}$$

Lemma 12.40. Für $t \in [a,b]$ gilt

$$\|d(t)\| \le (1 + (t - t_{q^*})L)\|d(t_{q^*})\| + (t - t_{q^*})\Omega_p, \quad \text{mit} \tag{12.69}$$

$$\Omega_p = \omega(h_p) + LMh_p, \quad M = \max_{(t,x)\in R} \|f(t,x)\|. \tag{12.70}$$

Beweis: Nach (12.56), S. 126 mit $h = h_p$ und $\tau = t_{q^*} \in [t_{p^*}, t[$ und nach (12.55), S. 126 mit $h = h_q$ haben wir

$$\begin{aligned} s_p(t) - s_p(t_{q^*}) &= (t - t_{q^*})f(t_{p^*}, s_p(t_{p^*})), &(12.71)\\ s_q(t) - s_q(t_{q^*}) &= (t - t_{q^*})f(t_{q^*}, s_q(t_{q^*})). &(12.72)\end{aligned}$$

Aus der Darstellung von s_p folgt insbesondere

$$\|s_p(t_{q^*}) - s_p(t_{p^*})\| \le (t_{q^*} - t_{p^*})M \le Mh_p. \tag{12.73}$$

Subtrahieren wir (12.72), S. 129 von (12.71), S. 129, so erhalten wir

$$\begin{aligned} d(t) - d(t_{q^*}) &= (t - t_{q^*})(f(t_{p^*}, s_p(t_{p^*})) - f(t_{q^*}, s_q(t_{q^*})))\\ &= (t - t_{q^*})[f(t_{p^*}, s_p(t_{p^*})) - f(t_{p^*}, s_p(t_{q^*})) +\\ &\quad f(t_{p^*}, s_p(t_{q^*})) - f(t_{q^*}, s_p(t_{q^*})) +\\ &\quad f(t_{q^*}, s_p(t_{q^*})) - f(t_{q^*}, s_q(t_{q^*}))].\end{aligned}$$

Nun ist nach (B) und (12.73), S. 129

$$\|f(t_{p^*}, s_p(t_{p^*})) - f(t_{p^*}, s_p(t_{q^*}))\| \le L\|s_p(t_{p^*}) - s_p(t_{q^*}))\| \le LMh_p,$$
$$\|f(t_{q^*}, s_p(t_{q^*})) - f(t_{q^*}, s_q(t_{q^*}))\| \le L\|d(t_{q^*})\|.$$

Den Mittelteil kann man mit Hilfe des Stetigkeitsmoduls abschätzen:

$$\|f(t_{p^*}, s_p(t_{q^*})) - f(t_{q^*}, s_p(t_{q^*}))\| \le \omega(t_{q^*} - t_{p^*}) \le \omega(h_p),$$

wegen der Monotonie des Moduls nach Lemma 12.39, S. 128 (i). Der Rest folgt aus der Dreiecksungleichung. □

Ist in der Abschätzung (12.69), S. 129 t ein Knoten $t_j = t_{q^*}$ des h_q-Gitters, so hat diese Abschätzung die Form

$$\|d(t_j)\| \le A\|d(t_{j-1})\| + B \quad \text{mit} \quad A = 1 + h_qL, \quad B = h_q\Omega_p, \tag{12.74}$$

und das Lemma 12.37, S. 127 liefert in der Form (12.62), S. 127 wegen $d(t_0) = 0$ und wegen $jh_q = t_{q^*} - a$ nach (12.53), S. 126 die Abschätzung

$$\|d(t_{q^*})\| \le \Omega_p \frac{\boldsymbol{e}^{(t_{q^*}-a)L} - 1}{L}. \tag{12.75}$$

Setzen wir diese Abschätzung in (12.69), S. 129 ein, und verwenden wir die einfachen Ungleichungen

$$1 + u \le \boldsymbol{e}^u, \quad v \le \frac{\boldsymbol{e}^{vL} - 1}{L},$$

so folgt aus (12.69), S. 129

$$\|d(t)\| \leq \Omega_p \Big\{ \boldsymbol{e}^{(t-t_{q^*})L} \frac{\boldsymbol{e}^{(t_{q^*}-a)L} - 1}{L} + \frac{\boldsymbol{e}^{(t-t_{q^*})L} - 1}{L} \Big\} = \Omega_p \frac{\boldsymbol{e}^{(t-a)L} - 1}{L}. \tag{12.76}$$

Die rechte Seite hängt nicht von q ab, damit haben wir gezeigt, das $\{s_p(t)\}$ gleichmäßig in t eine Cauchy-Folge ist, denn Ω_p, definiert in (12.70), S. 129, geht für $p \to \infty$ nach Lemma 12.39, S. 128 (iv) gegen Null. Damit haben wir Lemma 12.36, S. 126 bewiesen.

12.12 Die Lösung der Anfangswertaufgabe

Wir zeigen, daß die im vorigen Abschnitt als Grenzwert des Eulerschen Polygonzugverfahrens konstruierte Grenzfunktion s die Anfangswertaufgabe (2.1) löst.

Lemma 12.41. Die im vorigen Abschnitt konstruierte Grenzfunktion s löst die AWA (12.51), S. 125.

Beweis: Wir definieren

$$f_p(t) \quad = \quad \begin{cases} f(a, x_0) & \text{für } t = a, \\ f(t_{p^*}, s_p(t_{p^*})) & \text{für } t \in]a, b]. \end{cases}$$

Diese Funktion f_p ist stückweise konstant auf den Intervallen $t_{p^*} < t \leq t_{p^*} + h_p$, und der konstante Wert stimmt mit der Steigung von s_p auf diesem Intervall überein. Wir haben mit den Bezeichnungen und den Abschätzungen des vorigen Abschnitts

$$\begin{aligned} f_p(t) - f(t, s(t)) \quad &= \quad f(t_{p^*}, s_p(t_{p^*})) - f(t_{p^*}, s_p(t)) + \\ & \quad\quad f(t_{p^*}, s_p(t)) - f(t_{p^*}, s(t)) + \\ & \quad\quad f(t_{p^*}, s(t)) - f(t, s(t)) \quad \Rightarrow \\ \|f_p(t) - f(t, s(t))\| \quad &\leq \quad LMh_p + (\omega(h_p) + LMh_p)(\boldsymbol{e}^{((b-a)L)} - 1) + \omega(h_p). \end{aligned}$$

Da die rechte Seite nicht von t abhängt, haben wir

$$\lim_{p\to\infty} f_p(t) \quad = \quad f(t, s(t)) \quad \text{gleichmäßig in } t. \tag{12.77}$$

Der nächste Schritt besteht in der Gewinnung einer Abschätzung für

$$\frac{s(v) - s(u)}{v - u} \quad - \quad f(u, s(u)), \quad a \leq u < v \leq b.$$

Wir definieren Δ_p, $\nu_p \in \{0, 1, \ldots\}$ durch

$$\Delta_p \quad := \quad v_{p^*} - u_{p^*} =: \nu_p h_p. \tag{12.78}$$

Wir erhalten dann wegen $v_{p^*} = u_{p^*} + \nu_p h_p$ unter Benutzung von (12.53), S. 126

$$\begin{aligned} s_p(v_{p^*}) - s_p(u_{p^*}) \quad &= \quad \sum_{\nu=1}^{v_p} [s_p(u_{p^*} + \nu h_p) - s_p(u_{p^*} + (\nu - 1)h_p)] \\ &= \quad h_p \sum_{\nu=0}^{v_p - 1} f_p(u_{p^*} + \nu h_p) \\ &= \quad h_p \sum_{\nu=0}^{v_p - 1} [f_p(u_{p^*} + \nu h_p) - f_p(u_{p^*})] + \Delta_p f_p(u_{p^*}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
\|f_p(\sigma) - f_p(\tau)\| &\le \|f(\sigma_{p^*}, s_p(\sigma_{p^*})) - f(\tau_{p^*}, s_p(\sigma_{p^*}))\| \\
&+ \|f(\tau_{p^*}, s_p(\sigma_{p^*})) - f(\tau_{p^*}, s_p(\tau_{p^*}))\| \\
&\le \omega(|\sigma_{p^*} - \tau_{p^*}|) + LM|\sigma_{p^*} - \tau_{p^*}|
\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\|f_p(u_{p^*} + \nu h_p) - f_p(u_{p^*})\| \le \omega(\Delta_p) + LM\nu h_p.$$

Nun ist $\sum_{\nu=0}^{\nu_p - 1} \nu = 0.5\nu_p \cdot (\nu_p - 1) \le 0.5\nu_p^2 = 0.5h_p^{-2}\Delta_p^2,$ und daher

$$\|s_p(v_{p^*}) - s_p(u_{p^*}) - \Delta_p f_p(u_{p^*})\| \le h_p \sum_{\nu=0}^{\nu_p - 1} [\omega(\Delta_p) + LM\nu h_p] \le \Delta_p \omega(\Delta_p) + 0.5LM\Delta_p^2. \tag{12.79}$$

Lassen wir $p \to \infty$ bei festen u, v, so erhalten wir

$$u_{p^*} \to u,\ v_{p^*} \to v \ \Rightarrow \Delta_p \to \Delta := v - u,\ s_p(v_{p^*}) \to s(v),\ s_p(u_{p^*}) \to s(u),$$

und weiter (für $u_{p^*} \neq a$)

$$f_p(u_{p^*}) = f(u_{p^*} - h_p, s_p(u_{p^*} - h_p)) \to f(u, s(u)).$$

Aus der Stetigkeit von ω (Lemma 12.39, S. 128 (iii)) folgt daher aus (12.79), S. 131

$$\|s(v) - s(u) - \Delta f(u, s(u))\| \le \Delta\omega(\Delta) + 0.5LM\Delta^2,$$

und nach Division durch Δ

$$\left\|\frac{s(v) - s(u)}{\Delta} - f(u, s(u))\right\| \le \omega(\Delta) + 0.5LM\Delta. \tag{12.80}$$

Das zeigt, daß s an der Stelle u von rechts differenzierbar ist mit Ableitung $f(u, s(u))$, da Δ und damit auch die rechte Seite von (12.80), S. 131 beliebig klein gemacht werden kann. Da f stetig ist, ist s auch linksseitig an der Stelle u differenzierbar mit derselben Ableitung und damit ist s differenzierbar und $s'(t) = f(t, s(t))$, $s(a) = x_0$, s löst also die AWA (12.51), S. 125. □

12.13 Die eindeutige Lösbarkeit der Anfangswertaufgabe

Wir zeigen, daß die AWA (12.51), S. 125 nur eine Lösung haben kann.

Lemma 12.42. Sei z irgendeine Lösung der AWA (12.51), S. 125 und $\{s_p\}$ die mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren (man vgl. (12.53), S. 126 bis (12.56), S. 126) hergestellte Folge von Näherungslösungen. Dann konvergiert $\{s_p\}$ für $p \to \infty$ gegen z.

Beweis: Da z eine Lösung von (12.51), S. 125 ist, ist $z'(t) = f(t, z(t))$ stetig. Wir können also den Mittelwertsatz (komponentenweise) anwenden:

$$z_j(t) - z_j(t_{p^*}) = (t - t_{p^*}) f_j(\tau_j, z(\tau_j)), \quad \tau_j \in [t_{p^*}, t], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Andererseits gilt nach (12.55), S. 126

$$s_p(t) - s_p(t_{p^*}) = (t - t_{p^*}) f(t_{p^*}, s_p(t_{p^*})), \quad t \in [a, b].$$

Wir setzen

$$Z = \max_{t \in [a,b]} \|z'(t)\|, \qquad d(t) = s_p(t) - z(t)$$

und schätzen die Komponenten von d ab mit Techniken, die in Abschnitt 2.4 schon verwendet wurden:

$$d_j(t) - d_j(t_{p^*}) = (t - t_{p^*})[f_j(t_{p^*}, s_p(t_{p^*})) - f_j(\tau_j, s_p(t_{p^*}))$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + f_j(\tau_j, s_p(t_{p^*})) - f_j(\tau_j, z(t_{p^*})) \\
&\quad + f_j(\tau_j, z(t_{p^*})) - f_j(\tau_j, z(\tau_j))] \quad \Rightarrow \\
|d_j(t) - d_j(t_{p^*})| \;&\leq\; (t - t_{p^*})[\omega_j(h_p) + L_j|d_j(t_{p^*})| + L_j Z h_p].
\end{aligned}
$$

Daraus folgt genau wie in Abschnitt 2.4

$$|d_j(t)| \;\leq\; (\omega_j(h_p) + L_j Z h_p)\frac{\mathbf{e}^{(t-a)L_j} - 1}{L_j}.$$

Dabei sind ω_j die Stetigkeitsmoduln und L_j die Lipschitzkonstanten bezüglich der Komponente f_j von f. Da $\omega_j(h_p) + L_j Z h_p$ für $p \to \infty$ gegen Null geht, folgt $s_p(t) \to z(t)$ und damit $z(t) = s(t)$. □

Damit haben wir den Satz 12.34, S. 126 vollständig bewiesen. Gleichzeitig haben wir bewiesen, daß sich die Konvergenzgeschwindigkeit von $s_p(t) \to z(t)$ wie $\omega_j(h_p)+L_j Z h_p \to 0$ verhält. Ist f stetig nach allen Variablen differenzierbar, so gilt $\omega_j(h_p) \leq c h_p$, d. h. in diesem Fall konvergiert das Euler-Verfahren wie $h_p \to 0$, also langsam. Über schnellere Methoden wird in Hairer, Nørsett & Wanner [1991] berichtet.

12.14 Beispiele und Ergänzungen

In Satz 12.34, S. 126 kann auf die Bedingung (B) nicht verzichtet werden:

Beispiel 12.43. *Keine Lösungen, mehrere Lösungen von Differentialgleichungen*
Sei für $\varepsilon \neq 0$

$$x' = |x|^{1+\varepsilon}, \quad x(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon > 0, \\ 0 & \text{für } -1 < \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Im ersten Fall ist die Lösung

$$x(t) = (1 - \varepsilon t)^{-1/\varepsilon},$$

nur für $0 \leq t < 1/\varepsilon$ erklärt, und im zweiten Fall haben wir außer $x = 0$ für jedes $c \geq 0$ die Lösung

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq c, \\ [-\varepsilon(t - c)]^{-1/\varepsilon} & \text{für } t > c \end{cases}.$$

Ist f hinreichend einfach, so kann die Lösung des Eulerschen Polygonzugverfahrens mitsamt seinem Grenzwert explizit angegeben werden.

Beispiel 12.44. *Numerisches Beispiel mit expliziter Lösung*
Sei

$$x' = x, \quad x(0) = 1 \tag{12.81}$$

zu lösen. Das Eulersche Polygonzugverfahren ergibt unter Berücksichtigung von $x_0 = 1$

$$x_{j+1} = x_j + h x_j = (1 + h)x_j \quad \Rightarrow \quad x_j = (1 + h)^j, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Wegen $t = hj$ ist dann

$$x_j = (1 + h)^{t/h} = [(1 + h)^{1/h}]^t \to \boldsymbol{e}^t \text{ für } h \to 0.$$

Damit haben wir (12.81), S. 132 explizit mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren gelöst und $x(t) = \boldsymbol{e}^t$ gefunden.

Beispiel 12.45. *Eulerches Polygonzugverfahren*
Wir rechnen bei $h = 0.1$ einige Schritte des Eulerschen Polygonzugverfahrens für

$$x'(t) = f(t, x(t)) := t - x^2(t), \quad x(0) = 0. \tag{12.82}$$

Tabelle 12.1. Ergebnisse des Eulerschen Polygonzugverfahrens für (12.82), S. 133 mit $h = 0.1$

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x	0	0.0	0.01000	0.02999	0.05990	0.09954
$f(t,x)$	0	0.1	0.19990	0.29910	0.39641	0.49009

Differentialgleichungen vom Typ

$$x'(t) = f(t), \quad f \in \boldsymbol{c}[a, b]$$

erfüllen immer die Voraussetzungen des Satzes 2.1, d. h., wir haben bewiesen, daß jede stetige Funktion $f \in \boldsymbol{c}[a, b]$ ein unbestimmtes Integral besitzt. Bei *linearen Differentialgleichungen*

$$x'(t) = f(t, x(t)) := \mathbf{A}(t)x(t) + \boldsymbol{b}(t), \quad \mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{b}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad t \in [a, b]$$

mit stetigen Einträgen in $\mathbf{A}$ und $\boldsymbol{b}$ ist $f(t, u) - f(t, v) = \mathbf{A}(t)(u - v)$, und damit gelten die Voraussetzungen von Satz 12.34, S. 126 mit $L = \max_{t\in[a,b]} \|\mathbf{A}(t)\|$, wobei die Matrixnorm die Eigenschaft $\|\mathbf{A}x\| \le \|\mathbf{A}\| \, \|x\|$ haben muß.

Neben Henrici [1962, Kap. 5.2-1], in dem die Theorie der Differenzengleichungen komprimiert abgehandelt wird, sind Bücher von Berg Goldberg, Hildebrand, Nörlund, Rjabenki & Filippow über dieses Thema zu erwähnen. Nähere Angaben am Schluß vom nächsten Abschnitt.