1 Unrestringierte Optimierungsaufgaben

Zur Bestimmung der Minima (oder Maxima) einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einer nichtleeren Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ zulässiger Punkte werden zumeist **notwendige und hinreichende Bedingungen** herangezogen. Diese Bedingungen zielen jedoch auf **lokale** Minima bzw. Maxima ab. Aussagen über globale Extrema sind dagegen i. allg. nur schwer zu erhalten. Ein nützliches Hilfsmittel hierzu ist die bekannte Existenzaussage des Satzes von Weierstraß.

Satz (1.1) (Weierstraß)

Ist die Funktion f stetig und ist die Menge M der zulässigen Punkte nichtleer und **kompakt**, *d.h. M ist beschränkt und abgeschlossen, so besitzt f ein globales Minimum $\boldsymbol{x}^* \in M$ auf M.*

Beweis: Es gibt eine Folge $\boldsymbol{x}_k \in M \; (k \in \mathbb{N})$ mit $f(\boldsymbol{x}_k) \longrightarrow \inf(f(M)), \; (k \longrightarrow \infty)$.
Da M beschränkt ist, besitzt die Folge $(\boldsymbol{x}_k)$ eine konvergente Teilfolge $\boldsymbol{x}_{k_j} \longrightarrow \boldsymbol{x}^*$, $(j \longrightarrow \infty)$. Dies besagt der Satz von Bolzano und Weierstraß. Da nun M auch abgeschlossen ist, liegt $\boldsymbol{x}^*$ (als Häufungspunkt von M) in M und aus der Stetigkeit von f folgt

$$f(\boldsymbol{x}^*) \;=\; \lim_{j\to\infty} f(\boldsymbol{x}_{k_j}) \;=\; \inf(f(M)),$$

d.h. $\boldsymbol{x}^*$ ist globales Minimum von f auf M. $\square$

Folgerung (1.2)

Ist die Funktion f stetig und ist für ein $\tilde{\boldsymbol{x}} \in M$ die **Niveaumenge** *(Levelmenge)*

$$L(\tilde{\boldsymbol{x}}) \;:=\; \{\boldsymbol{x} \in M \mid f(\boldsymbol{x}) \le f(\tilde{\boldsymbol{x}})\}$$

kompakt, so besitzt f ein globales Minimum auf M.

Mitunter gelingt es, aufgrund von Konvexitätseigenschaften der Funktion f von einem lokalen Minimum auf ein globales zu schließen. Hierzu benötigen wir die folgende Definition.

Definition (1.3)

a) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls gilt

$$\forall\, \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in M \;\; \forall\, \lambda \in [0,1] \;:\; \boldsymbol{x} + \lambda\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \;\in\; M.$$

b) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex** auf einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, falls für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$\boldsymbol{x} + \lambda\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \;\in\; M \;\;\Longrightarrow\;\; f(\boldsymbol{x} + \lambda\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) \le f(\boldsymbol{x}) + \lambda\,(f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})).$$

c) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **strikt konvex** auf einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, falls für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$, $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y})$ und alle $\lambda \in]0,1[$ gilt

$$\boldsymbol{x} + \lambda\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \in M \implies f(\boldsymbol{x} + \lambda\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) < f(\boldsymbol{x}) + \lambda\,(f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})).$$

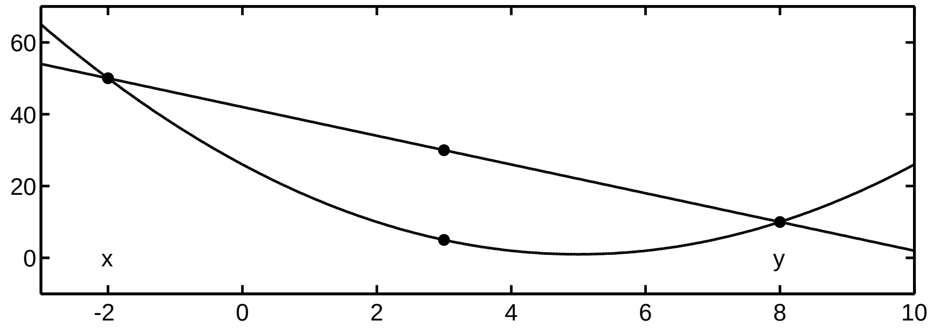

Abb. 1.1. Konvexe Funktion

Geometrisch bedeutet die Konvexität einer Funktion, daß deren Graph stets unterhalb seiner Sekanten verläuft, siehe Abb. 1.1. Der folgende Satz besagt, daß ein lokales Minimum einer konvexen Funktion stets zugleich schon ein globales Minimum ist.

Satz (1.4)

a) *Die Menge der globalen Minima einer konvexen Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist konvex. Ist f sogar strikt konvex, so gibt es höchstens ein globales Minimum (Eindeutigkeit!).*

b) *Jedes lokale Minimum einer konvexen Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist zugleich ein globales Minimum. Ist f eine konvexe C^1–Funktion (d.h. f ist stetig differenzierbar), so ist jeder stationäre Punkt $\boldsymbol{x}^*$ von f, bereits ein globales Minimum. Hierbei heißt $\boldsymbol{x}^*$ ein stationärer Punkt, falls gilt*

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*)\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}.$$

Beweis:

zu a) Aus $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) = \inf f(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in]0,1[$ folgt

$$f(\boldsymbol{x} + \lambda\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) \leq f(\boldsymbol{x}) + \lambda\,(f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})) = \inf f(\mathbb{R}^n),$$

d.h. auch $\boldsymbol{x} + \lambda\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ ist ein globales Minimum von f. Da in der obigen Ungleichung nun durchgehend Gleichheit gilt, folgt für eine strikt konvexe Funktion f, daß notwendig $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ gilt, und damit die Eindeutigkeit des globalen Minimums.

zu b) Nehmen wir an, $\boldsymbol{x}^*$ ist ein lokales, aber kein globales Minimum von f. Dann existiert ein Vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\boldsymbol{x}^*) > f(\boldsymbol{y})$. Aus der Konvexität von f folgt dann für alle $\lambda \in]0,1[$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}^* + \lambda\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*)) &\leq f(\boldsymbol{x}^*) + \lambda\,(f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}^*)) \\ &< f(\boldsymbol{x}^*) + \lambda\,(f(\boldsymbol{x}^*) - f(\boldsymbol{x}^*)) \;=\; f(\boldsymbol{x}^*). \end{aligned}$$

In jeder ε–Kugel $K_\varepsilon(\boldsymbol{x}^*)$ liegen aber – für hinreichend kleine λ – Punkte der Form $\boldsymbol{x}^* + \lambda\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*)$, d.h. $\boldsymbol{x}^*$ ist kein lokales Minimum im Widerspruch zur Voraussetzung.
Die zweite Behauptung folgt durch Differentiation der Funktion

$$g(\lambda) \;:=\; f(\boldsymbol{x}^*) + \lambda\,(f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}^*))) \;-\; f(\boldsymbol{x}^* + \lambda\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*)).$$

g ist eine C^1–Funktion, nichtnegativ auf $\lambda \in [0,1]$ und erfüllt $g(0) = 0$. Daher folgt

$$g'(0) \;=\; f(\boldsymbol{y}) \;-\; f(\boldsymbol{x}^*) \;-\; \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^*) \;\geq\; 0.$$

Ist daher $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) = 0$, so folgt $f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}^*)$ für alle $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. □

Bemerkung (1.5)

Die Definition der Konvexität einer Funktion eignet sich meist nicht gut zur Überprüfung dieser Eigenschaft. Wir geben einige äquivalente Formulierungen an. Für einen Beweis dieser Eigenschaften sei auf Krabs [...] verwiesen.

a) Für $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gelten:

$$f \text{ konvex} \iff \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \,:\; f(\boldsymbol{y}) \;\geq\; f(\boldsymbol{x}) \;+\; \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\,,$$

$$f \text{ strikt konvex} \iff \forall\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \,:\; f(\boldsymbol{y}) \;>\; f(\boldsymbol{x}) \;+\; \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\,.$$

b) Für $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gelten:

$$f \text{ konvex} \iff \forall\, \boldsymbol{x} \,:\; \boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}) \text{ positiv semidefinit}\,,$$

$$f \text{ strikt konvex} \impliedby \forall\, \boldsymbol{x} \,:\; \boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}) \text{ positiv definit}\,.$$

Hier und im folgenden bezeichnet $\boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x})$ die **Hesse–Matrix** der Funktion f:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}) \quad := \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) & , \ldots , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & , \ldots , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Beispiel (1.7)

Eine **quadratische Funktion** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ in n Variablen hat die Form

$$f(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \frac{1}{2}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \;-\; \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \;+\; c$$

mit einer symmetrischen Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

f ist als Polynomfunktion eine C^∞–Funktion (also beliebig oft differenzierbar) mit

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \;-\; \boldsymbol{b}\,, \qquad \boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \boldsymbol{A}\,.$$

Die quadratische Funktion f ist also genau dann konvex, wenn die Matrix $\boldsymbol{A}$ positiv semidefinit ist. Ist $\boldsymbol{A}$ sogar positiv definit, so hat f ein eindeutig bestimmtes (striktes, globales) Minimum $\boldsymbol{x}^*$. Dieses läßt sich bestimmen durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) \quad = \quad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* \;-\; \boldsymbol{b} \quad = \quad \boldsymbol{0}\,.$$

Wir kommen nun zu den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein lokales Minimum einer hinreichend glatten Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Satz (1.8) (Notwendige Bedingungen)

a) *Ist* $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *und ist* $\boldsymbol{x}^*$ *ein lokales Minimum von* f, *so gilt* $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) \;=\; \boldsymbol{0}$.

b) *Ist* $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *und ist* $\boldsymbol{x}^*$ *ein lokales Minimum von* f, *so ist die Hesse-Matrix* $\boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ *positiv semidefinit.*

Beweis:

zu a) Nehmen wir, es gelte $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) \neq \boldsymbol{0}$. Es sei $\boldsymbol{s} := -\,\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*)$. Für die Funktion $\phi(\alpha) := f(\boldsymbol{x}^* + \alpha\,\boldsymbol{s})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\phi(0) \;=\; f(\boldsymbol{x}^*)\,, \;\; \phi'(\alpha) \;=\; \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^* + \alpha\,\boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{s}\,.$$

Aus dem Taylorschen Satz für die Funktion ϕ ergibt sich damit

$$\phi(\alpha) \;=\; f(\boldsymbol{x}^*) \;-\; \alpha\,\|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*)\|^2 \;+\; o(\alpha),$$

also $f(\boldsymbol{x}^* + \alpha\,\boldsymbol{s}) < f(\boldsymbol{x}^*)$ für hinreichend kleine α. Die widerspricht der Voraussetzung, daß $\boldsymbol{x}^*$ ein lokales Minimum ist.

zu b) Wäre $\boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ nicht positiv semidefinit, so gäbe es einen Vektor $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{s} < 0$. Wiederum liefert die Taylor–Entwicklung von $\phi(\alpha) := f(\boldsymbol{x}^* + \alpha\,\boldsymbol{s})$ zum Entwicklungspunkt $\alpha = 0$:

$$\phi(\alpha) \;=\; f(\boldsymbol{x}^*) \;+\; \frac{1}{2}\,\alpha^2\,\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{s} \;+\; o(\alpha^2)$$

und damit $f(\boldsymbol{x}^* + \alpha\,\boldsymbol{s}) < f(\boldsymbol{x}^*)$ für hinreichend kleine α, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkung (1.9)

Die notwendigen Bedingungen, $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ positiv semidefinit, sind nicht hinreichend für ein lokales Minimum. So ist der Punkt $\boldsymbol{0}$ offenbar ein Sattelpunkt der Funktion $f(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^4$, beide notwendigen Bedingungen sind jedoch erfüllt.

Satz (1.10) (Hinreichende Bedingungen)

Ist $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *und gelten für einen Punkt* $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ *die Bedingungen*

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \qquad \textit{und} \qquad \boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}^*) \ \textit{positiv definit,}$$

so ist $\boldsymbol{x}^*$ *ein striktes lokales Minimum von* f.

Beweis:

Da die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix stetig von den Koeffizienten der Matrix abhängen, gibt es eine ε–Umgebung um $\boldsymbol{x}^*$ mit der Eigenschaft

$$\forall\ \boldsymbol{u} \ :\ \|\boldsymbol{u}\| < \varepsilon \implies \boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{u}) \ \text{positiv definit.}$$

Das Rayleighsche Prinzip besagt nun, daß alle Rayleigh–Quotienten einer symmetrischen Matrix $\boldsymbol{A}$ zwischen kleinstem und größtem Eigenwert liegen:

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}) \ \le\ \frac{\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{s}} \ \le\ \lambda_{\max}(\boldsymbol{A})\,, \ \text{für alle } \boldsymbol{s} \ne \boldsymbol{0}.$$

Wendet man dies auf die Hesse-Matrizen von f an, so erhält man die Existenz von Konstanten $\varepsilon > 0$ und $\lambda_{\min} > 0$ mit der Eigenschaft

$$\forall\, \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \ :\ \|\boldsymbol{u}\| < \varepsilon \implies \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{s} \ \ge\ \lambda_{\min}\,\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{s}\,.$$

Der Taylorsche Satz (mit Restgliedformel nach Lagrange) liefert dann

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{s}) &= f(\boldsymbol{x}^*) + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\nabla}^2 f(\boldsymbol{x}^* + \theta\,\boldsymbol{s})\,\boldsymbol{s}\,, \qquad 0 < \theta < 1, \\ &\ge \frac{1}{2}\,\lambda_{\min}\,\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{s} \qquad \text{für } \|\boldsymbol{s}\| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Setzt man hierin $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{s}$, so erhält man

$$f(\boldsymbol{x}) \ \ge\ f(\boldsymbol{x}^*) + \frac{1}{2}\,\lambda_{\min}\,\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|^2\,, \ \text{für } \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon\,.$$

$\boldsymbol{x}^*$ ist also ein striktes lokales Minimum von f; darüber hinaus wächst f in einer Umgebung von $\boldsymbol{x}^*$ mindestens quadratisch an. □

Bemerkungen (1.11)

a) Die hinreichenden Bedingungen (1.10) für ein striktes lokales Minimum sind nicht notwendig. Als Gegenbeispiel wähle man $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^4$.

b) Ist $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ und $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ indefinit, so ist $\boldsymbol{x}^*$ ein Sattelpunkt von f, d.h. in jeder Umgebung von $\boldsymbol{x}^*$ gibt es Punkte $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ mit $f(\boldsymbol{x}_1) < f(\boldsymbol{x}^*) < f(\boldsymbol{x}_2)$.

Beweis: Es gibt Eigenwerte $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$ von $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$. Für zugehörige Eigenvektoren $\boldsymbol{s}_1$ und $\boldsymbol{s}_2$ gilt dann

$$\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}}\, \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)\, \boldsymbol{s}_1 \; < \; 0 \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{s}_2^{\mathrm{T}}\, \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)\, \boldsymbol{s}_2 \; > \; 0.$$

Der Taylorsche Satz liefert $(j = 1, 2)$

$$f(\boldsymbol{x}^* + \alpha\, \boldsymbol{s}_j) \; - \; f(\boldsymbol{x}^*) \;\; = \;\; \frac{\alpha^2}{2} \left(\boldsymbol{s}_j^{\mathrm{T}}\, \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^* + \alpha\, \theta\, \boldsymbol{s}_j)\, \boldsymbol{s}_j \right)$$

mit $\alpha > 0$ und $\theta = \theta(j, \alpha) \in \,]0, 1[$.
Für hinreichend kleine α folgt die Behauptung. □

c) In einem stationären Punkt $\boldsymbol{x}^*$ sind durch die Eigenvektoren zu den positiven bzw. negativen Eigenwerten der Hesse–Matrix Richtungen gegeben, in denen f wächst bzw. fällt.

Beispiel (1.12)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x_1, x_2) \;\; := \;\; x_2^2\,(x_1 - 1) \; + \; x_1^2\,(x_1 + 1)\,.$$

Für den Gradienten von f erhält man

$$\nabla f(x_1, x_2) \;\; = \;\; (x_2^2 + 3\,x_1^2 + 2\,x_1\,,\; 2\,x_2\,(x_1 - 1))^{\mathrm{T}}\,.$$

Die stationären Punkte sind $\boldsymbol{x}^1 = (0, 0)^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{x}^2 = (-2/3, 0)^{\mathrm{T}}$.

Aus $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^1) \; = \; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (indefinit !) folgt, daß $\boldsymbol{x}^1$ ein Sattelpunkt von f ist.

Aus $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^2) \; = \; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10/3 \end{pmatrix}$ (negativ definit !) folgt, daß $\boldsymbol{x}^2$ ein striktes lokales Maximum von f ist.

Zur graphischen Darstellung der Funktion mittels Höhenlinien bzw. eines 3-D-Plots lassen sich die folgenden MATLAB Programme verwenden. Der Einfachheit halber sollte man die Programme jeweils in einem sogenannten m-File abspeichern.

MATLAB Programm (1.13)

```
%
% Hoehenlinien der Funktion z=f(x,y)
%
[x,y]=meshgrid(-1:0.01:0.5,-0.5:0.01:0.5);
z=(y.^2).*(x-1)+(x.^2).*(x+1);
contour(z,30,-1:0.01:0.5,-0.5:0.01:0.5)
print -deps figur2
%
```

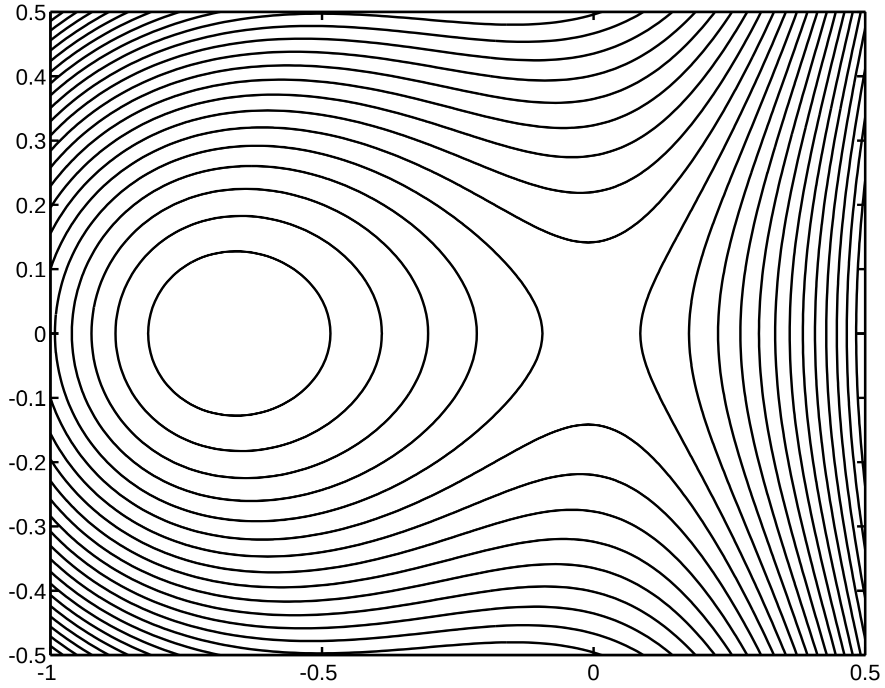

Abb. 1.2. Höhenlinien der Funktion $f(x, y)$

MATLAB Programm (1.14)

```
%
% 3-D-Darstellung der Funktion z=f(x,y)
%
[x,y]=meshgrid(-1:0.02:0.5,-0.5:0.02:0.5);
z=(y.^2).*(x-1)+(x.^2).*(x+1);
mesh(x,y,z)
print -deps figur3
%
```

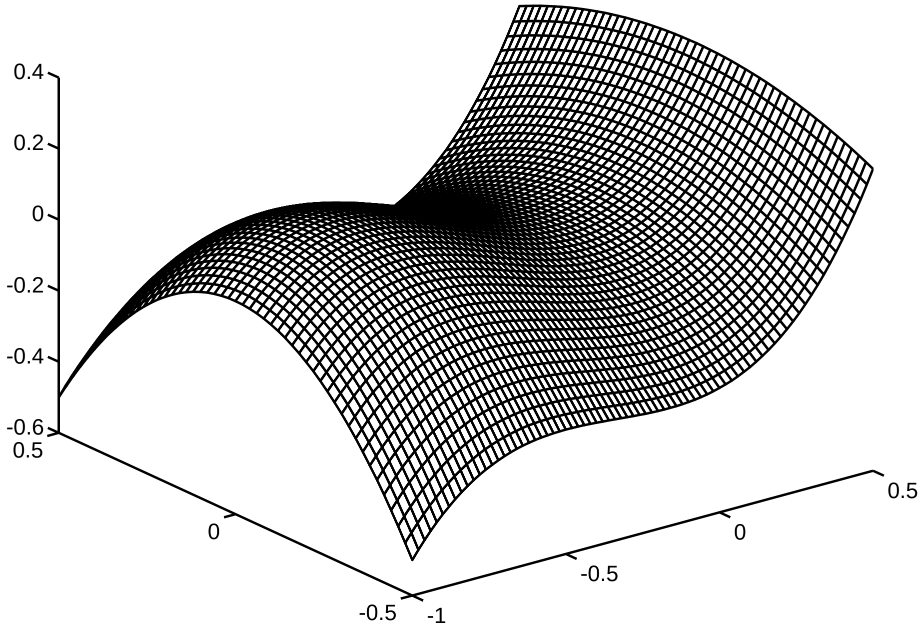

Abb. 1.3. 3-D-Darstellung der Funktion $f(x, y)$