0 Finite Optimierungsaufgaben

Wir betrachten Optimierungsaufgaben in endlich vielen reellen Variablen und mit (höchstens) endlich vielen Nebenbedingungen in Gleichungs– oder Ungleichungsform.

Die **allgemeine Problemstellung** lautet also:

Man bestimme ein Minimum einer Funktion

$$f(\boldsymbol{x}), \;\; x \in \mathbb{R}^n \tag{0.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ll} c_i(\boldsymbol{x}) = 0 & \quad (i \in E := \{1, \ldots, n'\}) \\ c_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 & \quad (i \in I := \{n'+1, \ldots, n''\}). \end{array} \tag{0.2}$$

Hierbei ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die sogenannte **Zielfunktion**. Die Funktionen $c_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in E \cup I)$ legen die Nebenbedingungen fest. Die Indexmengen E und I sind dabei **endliche** Mengen; sie dürfen auch leer sein ($n' = 0$ bzw. $n'' = n'$). Im Fall $E = I = \emptyset$ spricht man von einer **unrestringierten Optimierungsaufgabe**.

Durch die Nebenbedingungen (0.2) wird die Menge

$$M \;:=\; \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid c_i(\boldsymbol{x}) = 0 \,(i \in E) \text{ und } c_i(\boldsymbol{x}) \geq 0 \,(i \in I)\,\} \tag{0.3}$$

der **zulässigen Punkte** (auch **zulässiger Bereich**) festgelegt. Generell setzen wir im folgenden voraus, daß der zulässige Bereich M nichtleer ist. Die Aufgabe ist es also, einen Punkt $\boldsymbol{x}^* \in M$ zu bestimmen, für den gilt

$$\forall \boldsymbol{x} \in M \;:\; f(\boldsymbol{x}^*) \;\leq\; f(\boldsymbol{x}). \tag{0.4}$$

Man sagt dann, $\boldsymbol{x}^*$ ist ein **globales Minimum** von f auf M. Gilt sogar

$$\forall \boldsymbol{x} \in M\,,\;\; \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^* \;:\; f(\boldsymbol{x}^*) \;<\; f(\boldsymbol{x}), \tag{0.5}$$

so spricht man von einem **strikten globalen Minimum** von f auf M.

Gilt (0.4) bzw. (0.5) nur in einer Umgebung um $\boldsymbol{x}^*$ (etwa einer ε–Kugel $K_\varepsilon(\boldsymbol{x}^*)$), so heißt x^* ein **lokales Minimum** bzw. ein **striktes lokales Minimum** von f auf M. Die Bedingung (0.4) bzw. (0.5) wird hierzu ersetzt durch

$$\forall \boldsymbol{x} \in M \;:\; (\; \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon \;\Longrightarrow\; f(\boldsymbol{x}^*) \;\leq\; f(\boldsymbol{x}) \;) \tag{0.6}$$

bzw.

$$\forall \boldsymbol{x} \in M \;:\; (\; 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| < \varepsilon \;\Longrightarrow\; f(\boldsymbol{x}^*) \;<\; f(\boldsymbol{x}) \;)\,, \tag{0.7}$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ und einer beliebigen Norm $\|.\|$ des $\mathbb{R}^n$.

Trotz der Einschränkung auf den endlichdimensionalen Fall ist die Problemstellung (0.1), (0.2) noch sehr allgemein und umfaßt eine Reihe wichtiger speziellerer Probleme für die gesonderte Methoden und Verfahrensklassen entwickelt worden sind. Zur Klassifikation der allgemeinen Problemstellung seien einige Stichworte genannt:

- Unrestringierte Optimierung: $E = I = \emptyset$
  Restringierte Optimierung: $E \neq \emptyset$ oder $I \neq \emptyset$
- Lineare Optimierung: $f(\boldsymbol{x})$ linear, $c_i(\boldsymbol{x})$ affin-linear
  Quadratische Optimierung: $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c$, $c_i(\boldsymbol{x})$ affin-linear
  Konvexe Optimierung: $f(\boldsymbol{x})$ konvex, $c_i(\boldsymbol{x})$ konkav $(i \in I)$, $c_i(\boldsymbol{x})$ affin-linear $(i \in E)$
- Glattheit: Für die meisten numerischen Verfahren zur Optimierung wird die Glattheit der Funktionen f und c_i $(i \in E \cup I)$ benötigt. I.allg. wird vorausgesetzt, daß diese Funktionen zumindest zweifach stetig differenzierbar sind.
  Nichtdifferenzierbare Optimierung: Die Funktionen f und c_i $(i \in E \cup I)$ sind nur stetig bzw. stückweise glatt.
- L_2–Probleme: Die Zielfunktion f hat die spezielle Form

  $$f(\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{i=1}^{m} w_i\,(f_i(\boldsymbol{x}))^2$$

  mit glatten Funktionen f_i und Gewichten $w_i > 0$. Man vergleiche hierzu auch die Problemstellung für (nichtlineare) Ausgleichsaufgaben.
- Minimax Probleme: Die Zielfunktion f hat die spezielle Form

  $$f(\boldsymbol{x}) \;=\; \max_{i=1,\ldots,m} f_i(\boldsymbol{x})$$

  wiederum mit glatten Funktionen f_i. Man beachte, daß Minimax Probleme i. allg. auf eine nichtdifferenzierbare Zielfunktion führen.

Für eine konkrete Problemstellung ist die Klassifikation durchaus wichtig, um ein geeignetes numerisches Verfahren zur Lösung des Problems auswählen zu können. Man vergleiche hierzu etwa die in Gill, Murray, Saunders und Wright bzw. in den Handbüchern zu den NAG oder IMSL Programmbibliotheken angegebenen Diagramme zur Klassifikation.